Gonglu Qiaoliang Diansuan

公 路 桥 梁 电 算

杨炳成　编著

人 民 交 通 出 版 社

前　言

80 年代后期，电子计算机已普及到人们生活的各个领域，成为一个科技工作者必不可少的工作设施。特别是进行结构物优化设计、方案比较、内力分析、设计图绘制、工程概预算及管理等，都离不开电子计算机。电子计算机使用的程度和水平，取决于软件。功能齐全、性能可靠、使用方便、易于掌握的软件，已成为电子计算机为人们服务的核心。

桥梁结构，由于形式多样，工作条件及所承受的荷载多变，在设计中，计算分析工作非常繁重。过去，为减轻繁重劳动，人们花了很多时间编制了大量的图表，用于辅助设计。但是，这不仅使计算精度受到限制和带来诸多不便，而且使使用范围局限在图表之内。对于结构优化，新思维的实现，快速完成生产任务带来了重重困难，甚至使其无法实现。多年来，为了满足教学需要，作者从投入生产实用的程序中选择了一些具有广泛代表性的源程序，汇编成册，以供交流。

为了便于操作、阅读、修改和与以绘图接口，源程序均采用 BASIC 语言，采用数学、力学公式直接使用的办法，较少采用深奥的编写技巧和计算中的交错包含。注意到在使用中需要不断修改完善，分析比较才能确定的因素，源程序一般采用人机对话的方式。

全书共十二章，除前两章考虑到满足教学需要而补充一点基础知识外，其余十章均为桥梁设计中必不可少的实用内容，基本上包括了常见桥型的内力分析，截面设计和配筋，结构验算，施工验算等，还列举了国内大量采用的桥梁下部柔性墩台设计与计算程序。这样，全书基本上覆盖了高校统编教材的“桥梁工程”、“结构设计原理”、“基础工程”、“结构力学”等课程中的计算内容。在编写格式上，各章节均以基本理论、计算公式、标识符说明、程序框图、源程序、程序注解和计算实例为序。

结构内力分析，第五章采用梁单元通用计算程序。第六章提供了悬链线无铰拱桥，依理论公式为基础的手算单孔及多孔连拱的计算程序，其步骤与手算(查表法)一一对应，以适应人们的习惯。第七章是求活载内力，这里只考虑了公路桥梁设计计算对所规定的各种活载内力，其中各级汽车加载采用了动态加载法，其余活载采用直接法进行。计算中严格遵守了交通部颁布的公路桥涵设计规范。

程序在生产中投入使用已十多年，在此期间，经多次修改完善，达到了输入数据少，计算内容齐全，占用机器内存少，节省机时，打印结果清晰突出，适宜于各种机型使用等优点。只要具备一般的桥梁知识便可使用。

全书第一、二、三、四、五、七章由杨炳成编写；第六章由贺栓海、赵小星编写；第八、十二章由陈偕民编写；第九、十一章由郝宪武编写；第十章由徐岳编写。全书由杨炳成组织编写和审稿。

我们真诚地希望本书的出版能够对从事桥梁设计与施工的工程技术人员以及路、桥专业的教学有所裨益，但由于作者水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者不吝指正。有关意见可径寄西安公路学院公路系，以便再版时修改。文中各章节的源程序均有磁盘寄存，欢迎交流使用。需要时，可直接与作者联系。

杨炳成　　1994 年 5 月

(京)新登字 091 号

公路桥梁电算

杨炳成　编著

插图设计:汪萍　正文设计:李仇　责任校对:杨白萍
人民交通出版社出版发行
(100013 北京和平里东街 10 号)
各地新华书店经销
三河市永旺印刷厂印刷
开本:787×1092 1/16 印张:23 字数:580 千
1995 年 3 月　第 1 版
1995 年 3 月　第 1 版　第 1 次印刷
印数:0001—3000 册　定价:19.80 元
ISBN7-114-02035-x
U·01365

内 容 提 要

本书主要介绍公路桥梁及其他工程结构物内力分析和截面配筋设计的源程序。源程序语言采用扩展BASIC。设计计算严格遵守了交通部颁发的公路桥涵设计规范。

本书可作为高校桥梁工程专业、公路工程专业的桥梁电算课程教材，亦可作为相近专业的师生和有关设计、施工、养护单位工程技术人员的参考书。

目　录

第一章　插　　值

在结构计算中，往往出现函数的已知点并非计算需要点，想求得需要点的函数值，则需利用周围已知点的函数进行近似插值取得。其方法一般依精度要求和已知条件来决定。

第一节　直线插值法

已知为直线变化的函数或虽为曲线变化，但相邻两点间的变化近似直线，均可采用直线插值的办法求得需要点的函数值。有时，我们对于曲线函数已知点较密，精度要求又不太高的情况也采用直线插值。

一、计 算 方 法

线性插值就是两点插值，其插值公式在实践中常用点斜式。设给定的几个插值节点是：$x_1<x_2<\cdots<x_n$，对应的函数值是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。若要求 x 点的函数值 $y(x)$，其线性插值公式如下：

$$\because \quad \frac{y(x)-y_k}{y_{k+1}-y_k}=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

$$\therefore \quad y(x)=y_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}(y_{k+1}-y_k) \tag{1-1}$$

其中：

$$k=\begin{cases}1 & x<x_2 \\ i & x_i<x<x_{i+1} \qquad i=2,3,\cdots,n-2 \\ n-1 & x>x_{n-1}\end{cases}$$

二、标识符说明

N——整型变量，已知节点的个数；

X(N)——存放节点数的一维数组，要求：X(I)<X(I+1)　(I=1,2,…,N−1)；

Y(N)——存放节点函数的一维数组；

T——要求插值点的坐标；

Y——实型变量，存放插值结果。

在 DATA 语句中，数据的提供应按 READ 语句的读入顺序存放，即 $X_1,Y_1,X_2,Y_2,\cdots$

三、源　程　序

```
10 READ N
15 DIM X(N). Y(N)
20 FOR I=1 TO N
25 READ X(I),Y(I)
30 NEXT I
```

```
35 INPUT"T=";T
40 FOR I=1 TO N-2
45 IF T<=X(I+1) THEN 60
50 NEXT I
55 I=N-1
60 U=(T-X(I))/(X(I+1)-X(I))
65 Y=Y(I)+U*(Y(I+1)-Y(I))
70 PRINT "Y(";T;")=";Y
75 END
80 DATA 4,.1,.0998,.2,.1987,.3,.2955,.4,.3894
```

四、算　　例

已知　x_i:0.1,0.2,0.3,0.4

　　　$y(x_i)$:0.0998,0.1987,0.2955,0.3894

求:$y(0.15)$,$y(0.35)$的值

按25句READ的读入顺序在80句置数,其中$N=4$。运行程序,在键盘上回答要求插值的点则即得结果。

```
RUN
T=?.15        Y(.15)=.14925
OK
RUN
T=?.35        Y(.35)=.34245
OK
```

第二节　抛物线插值法

对于曲线函数,在其中插入一批值,插值函数若为曲线,则比直线插值具有更高的精度。已知三个不同位置的函数值,则可依此构成抛物线插值函数,任给一个x,便可寻得对应的y值。

一、计算方法

设已知$f(x)$在三个不同点x_0,x_1,x_2的函数值为y_0,y_1,y_2时,可构成如下一个函数:

$$g(x)=Ax^2+Bx+C$$

并且使$g(x_i)=f(x_i)$　　　$i=0,1,2$

则$g(x)$就称为$f(x)$的抛物线(或二次)插值公式。事实上,由于所求插值函数的存在及其唯一性,我们令:

$$g(x)=a+b(x-x_0)+c(x-x_0)(x-x_1) \tag{1-2}$$

由插值条件知,在$x=x_0$时,$g(x_0)=f(x_0)$,代入式(1-2)得:

$$a=f(x_0) \tag{1-3}$$

在$x=x_1$时,$g(x_1)=f(x_1)=f(x_0)+b(x_1-x_0)$

则：
$$b=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{1-4}$$

在 $x=x_2$ 时，$g(x_2)\doteq f(x_2)$

$$f(x_2)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)+c(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

则：
$$c=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1} \tag{1-5}$$

将 a，b，c 回代入式(1-2)，得：

$$g(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+\frac{\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}(x-x_0)(x-x_1) \tag{1-6}$$

有了式(1-6)，则任给一个 x 值，便可以求得相应的 y 值。

二、标识符说明

M——需要求得的插值点个数；

X(2)，Y(2)——为存放已知节点坐标值的数组；

X1——需要求得插值点的位置，由键盘回答；

Y——存放插值结果；

B，C——仍然存放式(1-4)、(1-5)的值；

A——存放中间结果。

在 DATA 语句中，按 READ 语句要求的顺序存放数据。

三、源　程　序

```
10 DIM X(2),Y(2)
15 READ M
20 FOR I=0 TO 2
25 READ X(I),Y(I)
30 NEXT I
35 FOR K=1 TO M
40 INPUT "X1=";X1
45 A=(Y(2)-Y(0))/(X(2)-X(0))
50 B=(Y(1)-Y(0))/(X(1)-X(0))
55 C=(A-B)/(X(2)-X(1))
60 PRINT "Y=";Y(0)+(X1-X(0))
   *B+(X1-X(0))*(X1-X(1))*C
65 NEXT K
70 END
75 DATE 2, 1, 9, 2, 16, 3, 25
```

四、算　例

已知三个不同点的函数值为：$f(1)=9$，$f(2)=16$，$f(3)=25$。欲求 $x_1=1.5$，$x_1=4$ 两个点的函数值时，填写出 75 句的数据，执行程序，且回答 1.5，4，则立即显示出相应的 y 值来。

```
RUN
X1=? 1.5        Y=12.25
X1=? 4        Y=36
OK
```

第三节　拉格朗日内插法

一、计算方法

拉格朗日插值公式是三点插值公式，对于给定的 n 个插值节点 x_1，x_2，…，x_n及其相应的函数 y_1，y_2，…，y_n，利用拉格朗日插值公式计算插值点 x 的函数值，计算式为：

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \tag{1-7}$$

二、标识符说明

N——已知节点的个数；

M——需求插值点的个数；

X(N)、Y(N)——为存放已知节点值和相应函数值的一维数组；

T——为每一次存放插值点数值的简单变量；

F——存放每一次的插值结果。

三、源　程　序

```
100 READ, M
110 DIM X(N),Y(N),T(M)
120 FOR K=1 TO M
130 READ T(K)
140 NEXT K
150 FOR I=1 TO N
160 READ X(I),Y(I)
170 NEXT I
180 FOR K=1 TO M
190 F=0
200 FOR I=1 TO N
210 P=1
220 FOR J=1 TO N
230 IF I-J=0 THEN 250
240 P=P * (T(K)-X(J))/(X(I)-X
    (J))
250 NEXT J
260 F=F+P * Y(I)
270 NEXT I
280 PRINT "Y(";T(K);")=";F
290 PRINT
300 NEXT K
310 END
320 REM N--M
330 DATA 7,5
340 REM T(M)
350 DATA .5,1.5,2.5,3.5,4.5
360 REM X(I)--Y(I)
370 DATA 0,0.2,.1027, 1,.38632, 1.
    9,.58762, 2.8, .73374, 4.1 , .
    89641, 5,.98959
```

四、算　　例

1.已知 7 个点的不等距函数值为：$y(0)=0.$ $y(0.2)=0.1027$，$y(1.0)=0.38632$，$y(1.9)=0.58762$，$y(2.8)=0.73374$，$y(4.1)=0.89641$，$y(5.0)=0.98959$。求 $x_i=0.5$，1.5，2.5，3.5，4.5 五个点的插值。

```
RUN
Y(.5)=.2280608
Y(1.5)=.5071898
Y(2.5)=.6894756
Y(3.5)=.8251097
Y(4.5)=.9416708
OK
```

2. 已知不等距函数 $y(0.1)=0.05371$，$y(0.198)=0.10176$，$y(0.302)=0.14852$，$y(0.402)=0.18995$，欲求 $x_i=0.15$，0.25，0.35，的插值。将 320-370 句的置数语句改写成：

```
320 REM N--M
330 DATA 4,3
340 REM T(M)
350 DATA .15, .25, .35
360 REM X(I)--Y(I)
370 DATA.1,.05371,.198,.10176,.302,.14852,.402,.18995
```

然后执行即得：

```
RUN
Y(.15)=7.874299E-02
Y(.25)=.1256467
Y(.35)=.1688029
OK
```

第四节　牛顿插值法

一、计算方法

在已经知道了 n 个点的坐标值 (x_i, y_i)，$i=0,1,2,\cdots,n-1$ 的情况下，若想求得 m 个横坐标 x_i 位置的函数 y_i 时，利用牛顿插值公式则有：

对于给出一个离散函数 $y_i=f(x_i)$，$i=0,1,\cdots,n-1$ x_0，x_1，x_2，...，x_{n-1}；$y_0,y_1,y_2,\cdots$，y_{n-1}，欲找出一个不超过 $n-1$ 次的多项式 $N(x_i)=f(x_i)$ 其中：$i=0,1,2,\cdots,n-1$

对于已知的 n 个点，由差商的定义可以得知插入点以已知点的关系：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_1x_0)$$

$$f(x_1x_0)=f(x_0,x_1)+(x-x_1)f(x,x_0,x_1)$$

……

$$f(x,x_0,x_1\cdots x_{n-2})=f(x_0,x_1\cdots x_{n-1})+(x-x_{n-1})f(x,x_0,x_1\cdots x_{n-1})$$

将上面第二式两边乘以 $(x-x_0)$，第三式两边乘以 $(x-x_0)x-x_1)$，依次类推，最后相加得：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})f(x_0,x_1\cdots x_{n-1})+R_{n-1}(x) \tag{1-8}$$

这里 $R_{n-1}(x)=(x-x_0)x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x,x_0,x_1,\cdots x_{n-1})$

我们将式(1-8)的前面都分记为 $N(x)$，即为所求的 $n-1$ 次多项式。该式称为牛顿插值多

项式。

二、标识符说明

N——已知节点的个数；

M——需求插值点的个数；

X(N) Y(N)——存放已知节点值和相应函数值的一维数组；

C(M)——欲求插值点的节点值一维数组；

Z(M)——存放插值结果的一维数组。

三、源　程　序

```
100 READ N,M
110 DIM X(N),Y(N),C(M),Z(M)
120 FOR I=1 TO N
130 READ X(I),Y(I)
140 NEXT I
150 FOR K=1 TO M
160 READ C(K)
170 NEXT K
180 FOR L=2 TO N
190 FOR I=N TO L STEP -1
200  Y(I)=(Y(I-1)-Y(I))/(X(I-L
      +1)-X(I))
210 NEXT I
220 NEXT L
230 FOR L=1 TO M
240 Z(L)=0
250 FOR I=1 TO N
260 S=1
270 IF I=1 THEN 310
280 FOR J=1 TO I-1
290 S=S*(C(L)-X(J))
300 NEXT J
310 Z(L)=Z(L)+S*Y(I)
320 NEXT I
330 NEXT L
340 FOR I=1 TO M
350 PRINT
360 PRINT "Y(";C(I);")=";Z(I)
370 NEXT I
380 END
390 REM N--M
400 DATA 4,3
410 REM X(N)---Y(N)
420 DATA 1,8,2,27,3,64,4,125
430 REM C(M)
440 DATA 0,5,2.5
```

四、算　　例

已知 4 个点的函数值：$y(1)=8$，$y(2)=27$，$y(3)=64$，$y(4)=125$，欲求 $x_i=0,5,2.5$ 处的函数插值。按要求填写 390-440 句置数语句的数据，执行后有：

```
RUN
Y(0)=1
Y(5)=216
Y(2.5)=42.875
OK
```

第五节　三次样条函数插值

一、计算方法

样条函数插值，除了保证样点的函数值外，还可以保证样点上具有一阶和二阶连续导数。从工程应用角度来看，样条函数已经相当“光滑”，因此，近年来样条函数的应用和发展很快。在样条函数中，三次样条函数(也称自然样条)最为常用。

假设在平面上给定 $n+1$ 个点(x_i,y_i)，定义 $a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$，通过这 $n+1$ 个点的曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数存在，在区间$[a,b]$上建立 $f(x)$的样条函数 $s(x)$应满足条件：

1. $s(x)$在已知点 x_j 处的值应为已知数 y_j，即：$s(x_j)=y_j \qquad j=0,1,\cdots,n$

2. 在区间$[a,b]$上，有一阶和二阶的连续导数存在，这样就保证了联结点对曲线是光滑的。

3. 在每一子区间$[x_j,x_{j+1}]$上，$s(x)$都是三次多项式。

在区间$[a,b]$上满足以上条件的函数 $s(x)$，叫做曲线 $y=f(x)$的三次样条函数。

假设在区间$[a,b]$上三次样条函数 $s(x)$存在，令 $s(x)$在 x_j 点的导数为 m_j，则在每个子区间$[x_j,x_{j+1}]$上满足条件：

$$s(x_j)=y_j \qquad s'(x_j)=m_j$$

$$s(m_{j+1})=y_{j+1} \qquad s'(x_{j+1})=m_{j+1}$$

设在$[x_j.x_{j+1}]$上的三次多项式为如下形式：

$$s(x)=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}y_{j+1}+\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}y_j+(ax+b)(x-x_j)(x-x_{j+1})$$

显然：

$$s(x_j)=y_j \qquad\qquad s(x_{j+1})=y_{j+1}$$

$$s'(x)=\frac{y_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}+\frac{y_j}{x_j-x_{j+1}}+a(x-x_j)(x-x_{j+1})+(ax+b)(2x-x_{j+1}-x_j)$$

$$s'(s_j)=\frac{y_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}+\frac{y_j}{x_j-x_{j+1}}+(ax_j+b)(x_j-x_{j+1})=m_j$$

故：

$$ax_j+b=(m_j-\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j})/(x_j-x_{j+1}) \tag{1-9}$$

同理：

$$ax_{j+1}+b=(m_{j+1}-\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j})/(x_{j+1}-x_j) \tag{1-10}$$

从式(1-9)、(1-10)中解出 a、b 来，并且有：

$$ax+b=\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x-x_j)(x_j-x_{j+1})}\frac{m_j-\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}}{x_j-x_{j+1}}+\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x-x_{j+1})(x_{j+1}-y_j)}\frac{m_{j+1}-\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}}{x_{j+1}-x_j} \tag{1-11}$$

将式(1-11)代入 $s(x)$中，加以整理得：

$$s(x)=[\frac{3}{h_j^2}(x_{j+1}-x)^2-\frac{2}{h_j^3}(x_{j+1}-x)^3]y_j+[\frac{3}{h_j^3}(x-x_j)2-\frac{3}{h_j^3}(x-x_j)^3]y_{j+1}+h_j[\frac{1}{h_j^2}(x_{j+1}-x)^2-\frac{1}{h_j^3}(x_{j+1}-x)^3]m_j-h_j[\frac{3}{h_j^3}(x-x_j)^2-\frac{3}{h_j^3}(x-x_j)^3]m_{j+1} \tag{1-12}$$

其中：
$$h_j=x_{j+1}-x_j \tag{1-13}$$

由于 $s(x)$ 在样点 x_j 上的导数 $s'(x_j)=m_j$ 仍然未知，只有求得 $m_0,m_1,\cdots,m_n$ 之后，才能得到区间 $[a,b]$ 上的三次样条函数 $s(x)$。为了求得 m_j 的值，可以利用函数 $s(x)$ 在样点 x_j 上具有连续的二阶导数条件，对 $s(x)$ 求二阶导数得：

$$s''(x)=[\frac{6}{h_j^2}-\frac{12}{h_j^3}(x_{j+1}-x)]y_j+[\frac{6}{h_j^2}-\frac{12}{h_j^3}(x-xj)]y_{j+1}+h_j[\frac{2}{h_j^2}-\frac{6}{h_j^3}(x_{j+1}-x)]\cdot m_j-h_j[\frac{2}{h_j^2}-\frac{6}{h_j^3}(x-x_j)]\cdot m_{j+1} \tag{1-14}$$

于是，在 x_j. x_{j+1} 点有：

$$s''(x_j)=-\frac{6}{h_j^2}y_j-\frac{6}{h_j^2}y_{j+1}-\frac{4}{h_j}m_j-\frac{2}{h_j}m_{j+1}$$

$$s''(x_{j+1})=\frac{6}{h_j^2}y_j-\frac{6}{h_j^2}y_{j+1}+\frac{2}{h_j}m_j+\frac{4}{h_j}m_{j+1}$$

现在再考虑 $s(x)$ 在子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 的右端点 x_j 的二阶导数值，记作 $s''(x_j^-)$ 则：

$$s''(x_j^-)=\frac{6}{h_{j-1}^2}y_{j-1}-\frac{6}{h_{j-1}^2}y_j+\frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1}+\frac{4}{h_{j-1}}m_j \tag{1-15}$$

同样，用 $s''(x+j)$ 记 $s(x)$ 在区间 $[x_j,x_{j+1}]$ 左端点 x_j 的二阶导数值，则：

$$s''(x_j^+)=-\frac{6}{h_j^2}y_j+\frac{6}{h_j^2}y_{j+1}-\frac{4}{h_j}m_j-\frac{2}{h_j}m_{j+1} \tag{1-16}$$

由于 $s(x)$ 在联结点 x_j 处二阶导数连续，因而有：$s''(x_j^-)=s''(x_j^+)$，代入(1-15)、(1-16)则：

$$\frac{6}{h_{j-1}^2}y_{j-1}-\frac{6}{h_{j-1}^2}y_j+\frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1}+\frac{4}{h_{j-1}}m_j=-\frac{6}{h_j^2}y_j+\frac{6}{h_j^2}y_{j+1}-\frac{4}{h_j}m_j-\frac{2}{h_j}m_{j+1}$$

将该式整理得：

$$\frac{1}{h_{j-1}}(m_{j-1}+2m_j)+\frac{1}{h_j}(2m_j+m_{j+1})=3[\frac{1}{h_{j-1}^2}(y_j-y_{j-1})+\frac{1}{h_j^2}(y_{j+1}-y_j)] \tag{1-17}$$

令：
$$\alpha_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j} \tag{1-18}$$

则式(1-17)可以写成：

$$(1-\alpha_j)m_{j-1}+2m_j+\alpha_j m_{j+1}=3[\frac{1-\alpha_j}{h_{j-1}}(y_j-y_{j-1})+\frac{\alpha_j}{h_j}(y_{j+1}-y_j)] \tag{1-19}$$

再令：

$$\beta_j=3[\frac{1-\alpha_j}{h_{j-1}}(y_j-y_{j-1})+\frac{\alpha_j}{h_j}(y_{j+1}-y_j)] \tag{1-20}$$

则式(1-19)可以写为：
$$(1-\alpha_j)m_{j-1}+2m_j+\alpha_j m_{j+1}=\beta_j \tag{1-21}$$

该式对每个联结点都成立，即 $j=1,2,\cdots,n-1$，若逐个联结点写出上式，则有方程组：

$$\begin{cases}(1\text{-}\alpha_1)m_0+2m_1+\alpha_1 m_2 & =\beta_1\\(1\text{-}\alpha_2)m_1+2m_2+\alpha_2 m_3 & =\beta_1\\(1\text{-}\alpha_3)m_2+2m_3+\alpha_4 m_4 & =\beta_1\\\cdots\cdots & \\(1\text{-}\alpha_{n-1})m_{n-2}+2m_{n-1}+\alpha_{n-1}m_n & =\beta_{n-1}\end{cases} \tag{1-22}$$

式(1-22)中有未知量一阶导数 $m_0,m_1,m_2,\cdots,m_n$ 共 $n+1$ 个，而线性方程组中只有 $n-1$ 个方程，其解为无穷多组，即适合上述样条函数三个条件的 $s(x)$ 有无穷多个。要得到唯一的解答，必须再补充条件，常见的两个边界条件为：

1. 两个端点 x_o,x_n 的切线斜率是已知，即 $s'(x_o)=m_o,s'(x_n)=m_n$。与式(1-22)联合求解。

2. 给定的函数 $y=f(x)$ 在两个端点 x_o 及 x_n 处的二阶导数为零，即：$s''(x_o)=s''(x_n)=0$。由前面的 $s''(s_j),s''(x_{j+1})$ 式知：

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3}{h_0}(y_1-y_0)=\beta_0 \\ m_{n-1}+2m_n=\dfrac{3}{h_{n-1}}(y_n-y_{n-1})=\beta_n \end{cases} \tag{1-23}$$

将式(1-22)与式(1-23)合并求解，可得 $m_0,m_1,\cdots,m_n$。

3. 若给定函数 $y=f(x)$ 是周期函数，其基本周期为 $b-a=x_n-x_0$ 时 $y_0=y_n$，相应地要求样条函数 $s(x)$ 也是周期函数，在端点上满足条件 $s'(x_0)=s'(x_n),s''x_0)=s''(x_n)$。计算 $s''(x_0),s''(x_n)$ 则等价于：

$$m_0=m_n$$

$$\frac{3}{h_0{}^2}(y_1-y_2)-\frac{1}{h_0}(2m_0+m_1)=\frac{3}{h_{n-1}^2}(y_{n-1}-y_n)+\frac{1}{h_{n-1}}(m_{n-1}+2m_n)$$

将这两式与式(1-22)合并便可求得 $m_0,m_1,\cdots,m_n$。

下面我们以第二种边界为例，编制成计算程序。

二、标识符说明

N——已知节点的个数；

M——需要插值点的个数；

X(N+1),y(N+1)——存放已知节点值和相应函数值的一维数组；

Z(M)—欲求插值点的节点值一维数组；

W(M)—存放插值结果的一维数组；

A(N+1),B(N+1),H(N+1),C(N+1),D(N+1)——均为工作数组，存放公式中的部分结果，分别为 $\alpha_j,\beta_j,h_j,1-\alpha_j,2$。

三、源 程 序

```
100 READ N,M
110 DIM X(N+1),Y(N+1),Z(M+
    1),A(N+1),B(N+1)
120 DIM H(N+1),C(N+1),D(N+1),
    W(M+1)
130 FOR I=O TO N:READ X(I),Y
    (I):NEXT I
140 FOR I=1 TO N:H(I-1)=(XI)-
    X(I-1):NEXT I
150 K=N-1
160 FOR I=1 TO K
170 A(I)=H(I-1)/(H(I-1)+H(I))
180 B(I)=3*((1-A(I))*(Y(I)-Y
    (I-1))/H(I-1)+A(I)*(Y(I+
    1)-Y(I))/H(I))
190 NEXT I
```

```
200 A(0)=1:A(N)=0
210 B(0)=3*(Y(1)-Y(0))/H(0)
220 B(N)=3*(Y(N)-y(N-1))/H(N
    -1)
230 FOR I=1 TO N:D(I)=2:NEXT I
240 FOR I=1 TO N:C(I)=1-A(I):
    NEXT I
250 P=N
260 FOR I=1 TO P
270 IF ABS (D(I))<=.00001 THEN
    570
280 A(I-1)=A(I-1)/D(I-1)
290 B(I-1)=B(I-1)/D(I-1)
300 D(I)=A(I-1)*(-C(I))+D(I)
310 B(I)=-C(I)*B(I-1)+B(I)
320 NEXT I
330 B(P)=B(P)/D(P)
340 FOR I=1 TO P
350 B(P-I)=B(P-I)-A(P-I)-A
    (P-I)*B(P-I+1)
360 NEXT I
370 FOR I=1 TO M :READ Z(I):
    NEXT I
380 FOR I=1 TO M
390 IF Z(I)<x(0) THEN 430
400 FOR J=1 TO N:IF Z(I)<=x(J)
    THEN 440:NEXT J
410 J=N-1
420 GOTO 450
430 J=0
440 J=J-1
450 E=x(J+1)-Z(I):E1=E*E
460 F+Z(I)-x(J):F1=F*F
470 H1=H(J)*H(J)
480 W(I)=(3*E1-2*E1/H(J))*y
    (J)+3*F1-2*F1*F/H(J))*y
    (J+1)
490 W(I)=W(I)+(H(J)*E1-E1*
    E)*B(J)-(H(J)*F1*F1*F)*
    B(J+1)
500 W(I)=W(I)/H1
510 NEXT I
520 FOR I=1 TO M
530 PRINT "Y(";Z(I);")=";W(I)
540 PRINT
550 NEXT I
560 END
570 PRINT "FAIL "
580 END
590 REM N--M
600 DATA 4,3
610 REM X(N)--Y(N)
620 DATA 0,0,1,1,2,4,3,9,4,16
630 REM Z(M)
640 DATA 2.5,5,3.3
```

四、算　例

已知 4 个点的函数值：$y(0)=0, y(1)=1, y(2)=4, y(3)=9, y(4)=16$，欲求 $x_j=2.5, 5, 3.3$ 处的函数插值。按读入语句的顺离填写 590-640 句的置数语句，执行后得：

Y(2.5)=6.365385

Y(5)=23

Y(3.3)=10.93523

OK

显然，我们给定的函数为 $y=x^2$，其精确值为 $y(2.5)=6.25$，$y(5)=25$，$y(3.3)=10.89$。由插值结果可见，定点外的点插值误差大。

A(O)=1:A(N)=0
B(0)=3*(Y(1)-Y(0))/H
B(N)=3*(Y(N)-y(N-1
-1)

章　线性方程组求解

很多工程实际问题，常常归纳为力学模式，到最后成为一个求解线性方程组的问题。尤其是采用有限元法分析工程结构，最终就是求线性方程组的解。因而，掌握本章内容很必要，它往往是一个实用程序的主要组成部分。

例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2-1}$$

写成矩阵形式：

$$[A]\{X\}=\{B\} \tag{2-2}$$

其中：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n*n}$$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \{B\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Bmatrix}$$

求解这个线性方程组的方法有两种，即直接法（又称精确法）与迭代法。

所谓直接法，就是通过有限步骤去求出问题的精确解。在实际求解中，受计算工具的限制，不可能无限精确，而只能做到有限位的精确。

迭代法是用一种极限过程去逐步逼近于真实解。即用有限步算出具有人为要求精度的解值，精度越高，则求解的步骤就越多。