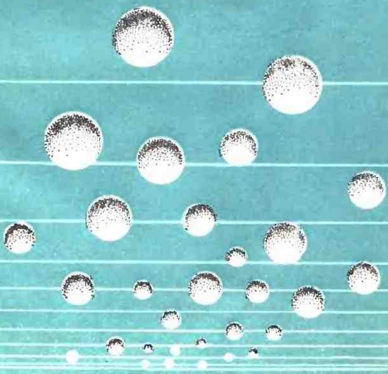
高等学校试用教材

偏微分方程差分方法

陆金甫　顾丽珍　陈景良



高等学校试用教材

偏微分方程差分方法

陆金甫　顾丽珍　陈景良

高等教育出版社

内容提要

本书共分五章．第一章为偏微分方程差分方法引论．第二章为线性差分格式的基本概念和理论．第三章为双曲型方程的差分方法，讨论了一阶线性双曲型方程(组)、波动方程、守恒形式和非守恒形式的拟线性双曲型方程组，第四章为抛物型方程的差分方法，讨论了扩散方程、对流扩散方程和非线性抛物型方程．第五章为椭圆型方程的差分方法，讨论了线性和非线性方程、数值求解差分方程组的方法及多重网格法．

本书兼顾了偏微分方程有限差分方法的理论和实际应用，同时也注意到新近的数值方法和技巧．

本书经高等工科学校应用数学教材委员会评审通过，可作为工科院校的计算数学、应用数学专业开设"偏微分方程的有限差分方法"课程的教材．本书也可供有关专业的学生、研究生、教师以及从事科学计算的科技工作者参考．

高等学校试用教材

偏微分方程差分方法

陆金甫　顾丽珍　陈景良

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张11.5　字数280 000

1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷

印数 0001—3 110

ISBN 7-04-000783-5/O·307　　定价 2.30元

前　言

半个多世纪以来，偏微分方程的差分方法在理论上和实践上都获得了巨大的发展，目前在科学研究和工程技术的领域内有着广泛的应用，偏微分方程差分方法已成为计算数学专业和应用数学专业的一门基础课程，本书可作为这门课程的教材.

本书兼顾了偏微分方程差分方法的基本理论及实际应用两个方面，同时也注意到了近年来的新发展. 对基本概念和基本理论的论述力求做到严格和容易接受，对实际问题和具体计算实例给予充分重视.

全书共分五章. 第一章是引论，初步介绍偏微分方程差分方法的基本概念，使读者对差分方法的概况有个了解. 第二章是线性差分格式理论，着重叙述了差分格式的概念，Lax 等价定理以及研究稳定性的 Fourier 方法和能量方法. 后三章是讨论三类方程的差分方法. 在第三章中讨论了线性双曲型方程(组)的各种差分格式及其性质，并对理论上和实用上有重要意义的拟线性双曲型方程组给予了特别的重视. 第四章详细地讨论了扩散方程的差分格式，并介绍了具有重要应用的对流扩散方程、非线性方程和二维问题的差分方法. 第五章讨论椭圆型方程，叙述了差分格式和性质，高精度格式以及非线性方程的解法，简单地讨论了差分格式的求解方法，对行之有效的多重网格方法作了介绍.

使用本书需要有数值分析，偏微分方程的基本知识及少量泛函分析的知识. 未学过泛函分析的读者，对一些概念及定理的证明可先跳过，并不影响对具体的计算方法的掌握.

本书的初稿得到了李德元教授、陈光南副研究员和滕振寰教授审查，提出了许多宝贵意见和建议，谨此向他们表示衷心的感

谢. 对高等工科学校应用数学专业教材委员会和高等教育出版社的支持和帮助,我们也表示衷心的感谢.

由于我们水平所限,时间也较匆忙,一定有疏漏、错误的地方,敬请读者批评指正。

编　者

一九八六年十月

目　　录

第一章　有限差分方法的基本知识 …… 1

§ 1　差分方程 …… 1

§ 2　截断误差 …… 8

§ 3　收敛性 …… 11

§ 4　稳定性 …… 17

§ 5　差分格式的构造方法 …… 21

第二章　线性差分格式的收敛性和稳定性 …… 29

§ 1　线性偏微分方程组的初值问题 …… 29

§ 2　线性差分格式 …… 36

§ 3　线性常系数差分格式 …… 45

§ 4　能量不等式方法 …… 58

§ 5　关于多维问题的附注 …… 67

第三章　双曲型方程 …… 71

§ 1　一阶线性常系数方程(I) …… 71

§ 2　一阶线性常系数方程(II) …… 82

§ 3　一阶线性常系数方程组 …… 93

§ 4　一阶线性变系数方程及方程组 …… 98

§ 5　二阶双曲型方程 …… 102

§ 6　拟线性方程组 …… 116

§ 7　特征线方法 …… 124

§ 8　守恒律与弱解 …… 128

§ 9　守恒型差分格式 …… 137

§ 10　气体动力学方程组 …… 151

§ 11　二维空间中的一阶双曲型方程组 …… 164

§ 12　混合初边值问题 …… 171

第四章　抛物型方程 …… 191

§ 1　常系数扩散方程 …… 191
§ 2　扩散方程的初边值问题 …… 203
§ 3　变系数扩散方程 …… 210
§ 4　具有间断系数的扩散方程 …… 225
§ 5　Richardson 外推方法 …… 228
§ 6　对流扩散方程 …… 233
§ 7　非线性方程 …… 249
§ 8　多维扩散方程 …… 263
第五章　椭圆型方程 …… 276
§ 1　Poisson 方程 …… 276
§ 2　边界条件处理 …… 285
§ 3　极值定理 …… 291
§ 4　差分格式的稳定性和收敛性 …… 295
§ 5　椭圆型差分方程解法 …… 300
§ 6　变系数方程和非线性方程 …… 312
§ 7　Navier-Stokes 方程 …… 316
§ 8　提高精度的方法 …… 326
§ 9　特征值问题 …… 337
§ 10　多重网格方法 …… 340
习题解答与提示 …… 356
主要参考资料 …… 359

第一章　有限差分方法的基本知识

对于求解的偏微分方程定解问题，有限差分方法的主要步骤如下：利用网格线将定解区域化为离散点集；在此基础上，通过适当的途径将微分方程离散化为差分方程，并将定解条件离散化，一般把这一过程叫做构造差分格式，不同的离散化途径得到不同的差分格式；建立差分格式后，就把原来的偏微分方程定解问题化为代数方程组，通过解代数方程组，得到由定解问题的解在离散点集上的近似值组成的离散解，应用插值方法便可从离散解得到定解问题在整个定解区域上的近似解.

可见，有限差分方法有大体固定的模式，它有较强的通用性. 但是，不能误认为不去了解这种逼近方法的基本知识，只是单纯模仿，便能轻易获得满意的结果. 因为在应用这种逼近方法时会发生许多重要的有时还是相当困难的数学问题，包括精度、稳定性与收敛性等.

本章的目的是介绍有限差分方法的一些基本概念和构造差分格式的基本方法.

§1　差 分 方 程

1.1　对流方程与扩散方程

我们将以简单的一维对流方程与扩散方程为例，引入用差分方法求偏微分方程数值解的一些概念，说明求解的基本过程和原理.

最简单的一维对流方程形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1.1}$$

其中 c 是常数. 这是双曲型方程,可以刻画流体运动等某些物理现象. 例如流体在粗细均匀的平直管道中以等速单向流动,并忽略管壁与流体的摩擦,便可从质量守恒原理导出方程(1.1),这时 u 是流体的密度,它是时间 t 和沿管道方向的坐标 x 的函数,常数 c 是流速.

在研究热的传导,粒子的扩散等问题时,常可用扩散方程来描述. 最简单的一维扩散方程形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1.2}$$

其中 $a>0$ 是常数. 这是简单的抛物型方程. 对于细长绝缘杆的热传导问题来说,在材料的密度、比热和导热系数均为常数的假设下,方程(1.2)中的 a 是由这些材料特性确定的常数,而 u 是温度,它是时间 t 和沿杆的方向的坐标 x 的函数.

现在我们考虑对流方程(1.1)的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & x\in \boldsymbol{R},\ t>0,\\ u(x,0)=f(x), & x\in \boldsymbol{R},\end{cases} \tag{1.3}$$

和扩散方程(1.2)的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in \boldsymbol{R},\ t>0,\\ u(x,0)=f(x), & x\in \boldsymbol{R},\end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$. 当初始函数 f 分别满足一定条件时,初值问题(1.3)和(1.4)都能得出精确解的表达式. 这样,将便于比较差分方法得出的计算结果.

1.2 定解区域的离散化

利用网格线将定解区域化为离散的节点集，这是将微分方程定解问题离散化为差分方程的基础.

问题(1.3)和(1.4)的定解区域是 $x—t$ 平面的上半平面. 分别引入平行于 x 轴和平行于 t 轴的两族直线，将区域划分为矩形网格. 这两族直线称为**网格线**，它们的交点称为**节点**或**网格点**. 通常，平行于 t 轴的网格线取成等距的，间距 $h>0$ 称为**空间步长**；平行于 x 轴的网格线则可取成不等距，间距大小视具体问题而定. 为了简单起见，这里取平行于 x 轴的网格线也是等距的，间距 $\tau>0$ 称为**时间步长**. 所取两族网格线如下(见图 1.1)：

$$x=x_j,\quad j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$
$$t=t_n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

其中 $x_j=jh, t_n=n\tau$. 节点 (x_j,t_n) 常简记为 (j,n).

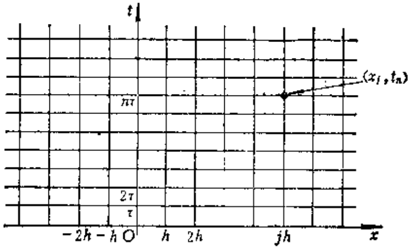


图 1.1

初值问题(1.3)或(1.4)的解 u 都是依赖连续变化的变量 x 与 t 的函数. 为了进行数值求解，按上述方式将定解区域离散化后，我们考虑求解 u 在各个节点上的近似值. 也就是说，把依赖连续变化变量 x 与 t 的问题归结为依赖离散变化变量 x_j 与 t_n（或者 j 与 n）的问题.

1.3 差分格式

我们先考虑对流方程初值问题(1.3)的一种差分解法. 设 u 是(1.3)的解,对于任何节点(j,n),u 的微商与向前差商之间成立关系式

$$\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau}=\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_n)+O(\tau), \tag{1.5}$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_n)-u(x_j,t_n)}{h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n)+O(h). \tag{1.6}$$

这两个明显的关系式提供了用代数方程逼近微分方程的一种方式. 由于 u 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_n)+c\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n)=0,$$

因此从(1.5)和(1.6)得到

$$\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau}+c\frac{u(x_{j+1},t_n)-u(x_j,t_n)}{h}=O(\tau+h). \tag{1.7}$$

为了保证逼近的精度要求,实际上总取步长 h 与 τ 是较小的量,特别,在进行理论分析的极限过程中它们都趋向于零. 这样,(1.7)式可以用方程

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+c\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0 \tag{1.8}$$

来近似地代替,其中 u_j^n 表示 $u(x_j,t_n)$的近似值. 方程(1.8)是问题(1.3)中的微分方程在任一节点(j,n)的近似方程. 将它改写成便于计算的形式,我们得到

$$u_j^{n+1}=u_j^n-c\lambda(u_{j+1}^n-u_j^n),$$
$$j=0,\pm1,\pm2,\cdots,\qquad n=0,1,2,\cdots, \tag{1.9}$$

这里 $\lambda=\tau/h$ 称为**网格比**. (1.8) 称为 (1.3) 中的微分方程的**(有限)差分方程**.

问题(1.3)中的初始条件的离散形式是

$$u_j^0=f_j, j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{1.10}$$

其中 $f_j=f(x_j)$.

通常,把定解问题中的微分方程的差分方程和定解条件的离散形式统称为定解问题的一个**差分格式**. 于是,(1.8)和(1.10)构成初值问题(1.3)的一个差分格式,简记为

$$\begin{cases}\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-c\dfrac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0\\ u_j^0=f_j.\end{cases}$$

然而,有时定解条件的离散形式是很明显的,主要是构造差分方程. 在这种情况下,常把得到的差分方程直接称为一个差分格式. 例如,对于问题(1.3),可称

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+c\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0 \tag{1.11}$$

是一个差分格式.

建立差分格式(1.11)后,因为在初始时间层(即直线 $t=0$ 上的节点全体),解 u 的值 u_j^0 已知,所以可按时间层(第 n 层是直线 $t=t_n$ 上的节点全体,$n=1,2,\cdots$)逐层推进,算出解 u 在 $n=1,2,\cdots$ 各层的近似值 u_j^n.

构造同一差分格式存在不同的途径,这将在本章§5 中讨论. 而且对同一微分方程和定解条件可以建立种种不同形式的差分格式.

在(1.6)中 u 对 x 采用了向前差商,如果改为分别采用向后差商和中心差商,即利用关系式

$$\frac{u(x_j,t_n)-u(x_{j-1},t_n)}{h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n)+O(h) \tag{1.12}$$

和

$$\frac{u(x_{j+1},t_n)-u(x_{j-1},t_n)}{2h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n)+O(h^2), \tag{1.13}$$

而 u 对 t 仍利用关系式(1.5),那么我们立即得出初值问题(1.3)

的另外两个差分格式，它们是

$$u_j^{n+1}=u_j^n-c\lambda(u_j^n-u_{j-1}^n) \tag{1.14}$$

和

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{c\lambda}{2}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n). \tag{1.15}$$

基于用差商逼近微商的方式不同，我们称(1.15)为**中心格式**，统称(1.11)和(1.14)为**偏心格式**.

对于扩散方程初值问题(1.4)，设 u 是它的解，则由关系式(1.5)及关系式

$$\frac{u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)}{h^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j,t_n)+O(h^2) \tag{1.16}$$

推出

$$\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau}-a\frac{u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)}{h^2}=O(\tau+h^2). \tag{1.17}$$

由此可建立一种差分格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n+a\mu(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n), \tag{1.18}$$

其中 $\mu=\tau/h^2$ 也称为**网格比**，它和对流方程的差分格式中的网格比 λ 不同，是属于不同类型方程的差分格式的，因而两者并不会混淆，故一般我们也用字母 λ 来代替字母 μ. 问题(1.4)的初始条件的离散形式仍形如(1.10)，从它出发，利用(1.18)可依 $n=1,2,\cdots$算出解 u 在各时间层上的近似值 u_j^n.

1.4 显式格式与隐式格式

至此已经建立的差分格式有两个共同的特征：一是格式仅涉及两个时间层，如此格式称为**二层格式**，采用这种格式来计算第 $n+1$ 层的 u_j^{n+1} 时均只用第 n 层的信息，二是从第 n 层推进到第 $n+1$ 层时，格式提供了逐点计算 u_j^{n+1} 的直接表达式，具有这种特征的格式称之为**显式格式**. 因此前面的差分格式都是二层显式格

式.

并非所有差分格式都是显式的. 在(1.16)中将 n 改为 $n+1$，而且用向后差商逼近 u 对 t 的微商,即利用关系式

$$\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau}=\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_{n+1})+O(h), \tag{1.19}$$

我们得到扩散方程初值问题(1.4)的又一种差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}=0,$$

或者改写成

$$-a\lambda u_{j+1}^{n+1}+(1+2a\lambda)u_j^{n+1}-a\lambda u_{j-1}^{n+1}=u_j^n, \tag{1.20}$$

其中 $\lambda=\tau/h^2$. 这样,我们得到的是解 u 在第 $n+1$ 层的各个节点上的近似值 u_j^{n+1} 满足的一列方程,而不是计算 u_j^{n+1} 的直接公式. 此类差分格式一般运用于初边值混合问题或解 u 具有周期性的初值问题. 下面考虑解 u 具有周期性的情形.

设 $h=1/N$, N 是自然数,且有

$$u(x_{j+N},t_n)=u(x_j,t_n),\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

这时只须计算 u_j^{n+1}, $j=0,1,2,\cdots,N-1$. 令

$$\boldsymbol{u}^n=(u_0^n,u_1^n,\cdots,u_{N-1}^n)^T.$$

由差分格式(1.20)得到

$$A\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}^n, \tag{1.21}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1+2a\lambda & -a\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a\lambda\\ -a\lambda & 1+2a\lambda & -a\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a\lambda & 1+2a\lambda & -a\lambda\\ -a\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a\lambda & 1+2a\lambda\end{bmatrix} \tag{1.22}$$

是对称的对角占优的 N 阶矩阵,因此线性代数方程组(1.21)有唯一解. 针对矩阵 A 的特征,容易推导出求解方程组(1.21)的固定

算法,它与通常的追赶法只是稍有不同.

由差分格式(1.20)看到,它在 $t=(n+1)\tau$ 的时间层上包含了三个网格点。如果一个差分格式在 $t=(n+1)\tau$ 时间层上包含了多于一个的网格点,则称它是**隐式格式**. 一般来说,求解隐式格式必须解一个代数方程组,如同格式(1.20). 直观地看,显式格式比隐式格式简单. 但是,有些情况使用隐式格式更为有利,这种情况以后将会多次碰到.

关于对流方程初值问题(1.3)和扩散方程初值问题(1.4),已经给出的差分格式都是易导出的格式,还有其它差分格式,以后将逐步给出.

§2 截断误差

2.1 截断误差的概念

对于一个微分方程建立的各种差分格式,为了有实用意义,一个共同的基本要求是它们能够任意逼近原来的微分方程. 在网格确定的条件下,不同差分格式逼近同一微分方程的程度往往是不同的,这种逼近程度一般用截断误差来描述. 下面以对流方程(1.1)的差分格式(1.11)即(1.8)为例,引出截断误差的概念.

对于齐次微分方程问题,可以将所讨论的微分方程和差分格式写成

$$Lu=0$$

和

$$L_h u_j^n=0,$$

其中 L 是微分算子,L_h 是相应的差分算子. 对于方程(1.1)和格式(1.11),微分算子 L 的定义是

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x},$$

相应的差分算子 L_h 应当由下式定义：

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}.$$

然后，设 u 是所讨论的微分方程的充分光滑的解，将算子 L 和 L_h 分别作用于 u，记两者在任意的节点 (x_j, t_n) 处的差为 E，即

$$E = L_h u(x_j, t_n) - Lu(x_j, t_n). \tag{2.1}$$

通常，差分格式的截断误差是指对 E 的估计．因为 u 是微分方程的解，有 $Lu(x_j, t_n) = 0$，故

$$E = L_h u(x_j, t_n). \tag{2.2}$$

由于算子 L_h 是算子 L 的近似，$L_h u(x_j, t_n)$ 一般不为零，因此截断误差实际上就是对 $L_h u(x_j, t_n)$ 的大小的估计．截断误差越小，说明算子 L_h 越近似算子 L，从而差分方程越近似微分方程．

回到方程(1.1)和格式(1.11)的具体情形，

$$Lu(x_j, t_n) = \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial x} = 0,$$

$$L_h u(x_j, t_n)$$
$$= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + c\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h}.$$

由此及(1.7)，差分格式(1.11)的截断误差

$$E = L_h u(x_j, t_n) = O(\tau + h).$$

类似地，对§1中的其它几个差分格式，容易从它们的建立过程得出相应的截断误差．

我们也用“精度”一词来说明截断误差．一般，如果一个差分格式的截断误差 $E = O(\tau^q + h^p)$，就说差分格式对时间 t 是 q 阶精度的，对空间 x 是 p 阶精度的．特别，当 $p = q$ 时，说差分格式是 p 阶精度的．例如，上面所引用的差分格式(1.11)是一阶精度的．

2.2 推导截断误差的方法

在§1中的差分格式都是通过某种微商与差商的关系而建立的，这些关系式本身可利用带余项的 Taylor 级数展开等方法推出，由这些关系式中包含的用差商近似微商时的余项，可得到所建立的差分格式的截断误差.

现在，对于一个给定的差分格式，我们可以从它出发，利用 Taylor 级数展开推导其截断误差. 我们以扩散方程(1.2)的差分格式(1.18)为例来说明.

将方程(1.2)和(1.18)分别写成 $Lu=0$ 和 $L_h u_j^n=0$，算子 L 和 L_h 定义如下：

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$L_h u_j^n=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}.$$

设 u 是(1.2)的充分光滑的解，E 是差分格式(1.18)的截断误差，依截断误差的概念，

$$\begin{aligned}E=&\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau}\\&-a\frac{u(x_{j+1},t_n)-2u(x_j,t_n)+u(x_{j-1},t_n)}{h^2}\\&-\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_n)-a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j,t_n)\right\}.\end{aligned}$$

在此式中，带花括号部分为零，其余部分代入下列在节点(x_j,t_n)的带余项的 Taylor 级数展开式：

$$u(x_j,t_{n+1})=u(x_j,t_n)+\tau\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_n)+O(\tau^2),$$

$$\begin{aligned}u(x_{j+1},t_n)=&u(x_j,t_n)+h\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j,t_n)\\&+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x_j,t_n)+O(h^4),\end{aligned}$$