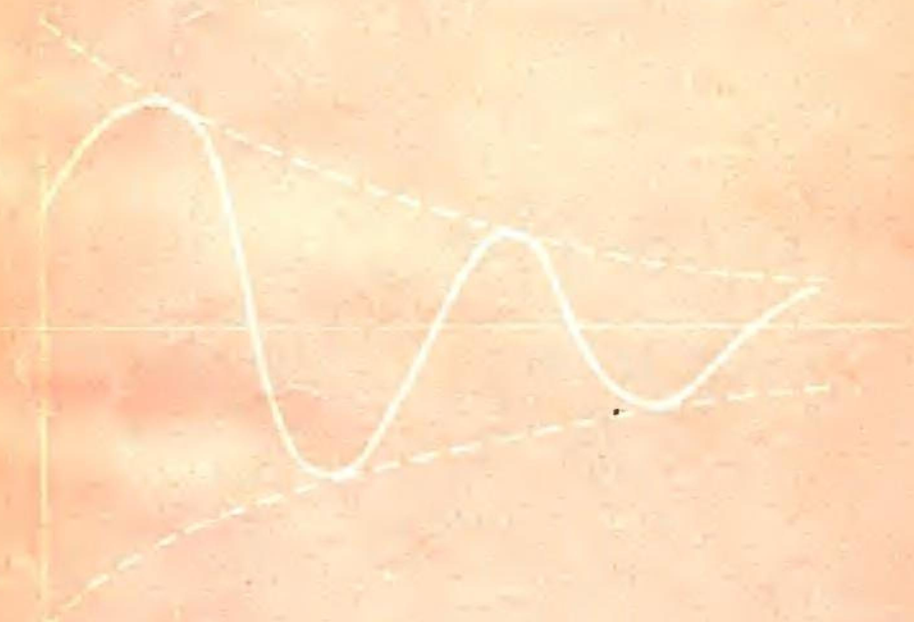
著　张鸿林 译

微分方程及其应用

下　册



人民教育出版社

高等学校教学参考书

微分方程及其应用

下 册

M.布朗 著 张鸿林 译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微分方程及其应用

下　册

M.布朗 著　张鸿林 译

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
兰州部队八一印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张10.375　字数240,000
1980年5月第1版　1982年1月第2次印刷
印数12,301—19,300
书号13012·0466　定价0.91元

下册目录

第三章 微分方程组

3.1 线性方程组之解的代数性质

在这一章中，我们将考虑多个变量的一阶联立微分方程，即下列形式的方程:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\\
\dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,\cdots,x_n),\\
\quad\vdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,\cdots,x_n).
\end{cases}
\tag{1}
$$

(1)的解是 n 个函数 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$，它们使得

$$\frac{dx_j(t)}{dt}=f_j(t,x_1(t),\cdots,x_n(t)),\ j=1,2,\cdots,n.$$

例如，$x_1(t)=t$ 和 $x_2(t)=t^2$ 是一阶联立微分方程

$$\frac{dx_1}{dt}=1 \quad 和 \quad \frac{dx_2}{dt}=2x_1$$

的解，因为

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=1 \quad 和 \quad \frac{dx_2(t)}{dt}=2t=2x_1(t).$$

除了方程(1)以外，我们还常常给函数 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 加上初始条件．初始条件具有下列形式:

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \cdots,\ x_n(t_0)=x_n^0. \tag{1'}$$

方程(1)和初始条件(1′)一起称为初值问题.这个初值问题的解是 n 个函数 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$,它们满足(1)和初始条件

$$x_1(t_0)=x_1^0, \cdots, x_n(t_0)=x_n^0.$$

例如,$x_1(t)=e^t$ 和 $x_2(t)=1+\frac{1}{2}e^{2t}$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1, & x_1(0)=1,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1^2, & x_2(0)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

的解,因为

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=e^t=x_1(t),\ \frac{dx_2(t)}{dt}=e^{2t}=x_1^2(t),$$

$$x_1(0)=1 \text{ 和 } x_2(0)=\frac{3}{2}.$$

方程(1) 通常称为 n 个一阶微分方程的方程组. 这种类型的方程在生物学和物理学的应用中经常会出现,并且往往描述非常复杂的系统,因为变量 x_j 的变化率不仅依赖于 t 和 x_j,而且还依赖于所有其他变量的值. 我们在 2.7 节中研究的血糖调节系统的数学模型,就是一个具体的实例. 在这个数学模型中,g 和 h(分别为血糖浓度和纯激素浓度同它们的最佳值的偏离)的变化率由下列方程给出:

$$\begin{cases}\dfrac{dg}{dt}=-m_1g-m_2h+J(t),\\ \dfrac{dh}{dt}=-m_3h+m_4g.\end{cases}$$

这是对于函数 $g(t)$和 $h(t)$的两个一阶方程的方程组.

一阶微分方程组也可由单个变量 $y(t)$ 的高阶方程产生. 对于单个变量 y 的每一个 n 阶微分方程,都能够转化为对于变量

$$x_1(t)=y,\ x_2(t)=\frac{dy}{dt}, \cdots, x_n(t)=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

的 n 个一阶方程的方程组．下面的例 1 和例 2 说明怎样实现这一点．

例 1 试把微分方程

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=0$$

化为 n 个一阶方程的方程组．

解 设 $x_1(t)=y, x_2(t)=\frac{dy}{dt}, \cdots$ 和 $x_n=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$. 于是，我们得到

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \cdots,\quad \frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$

和

$$\frac{dx_n}{dt}=-\frac{a_{n-1}(t)x_n+a_{n-2}(t)x_{n-1}+\cdots+a_0x_1}{a_n(t)}.$$

例 2 试把初值问题

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+3y=e^t;\quad y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0$$

化为对于变量 y, $\frac{dy}{dt}$ 和 $\frac{d^2y}{dt^2}$的初值问题．

解 设 $x_1(t)=y, x_2(t)=\frac{dy}{dt}$ 和 $x_3(t)=\frac{d^2y}{dt^2}$. 于是，我们得到

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=e^t-x_2^2-3x_1.$$

而且，函数 x_1，x_2 和 x_3 满足初始条件 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$ 和 $x_3(0)=0$.

如果(1)中的每一个函数 $f_1, \cdots, f_n$ 都是因变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性函数，则微分方程组称为线性的．最一般的 n 个一阶线性方程的方程组具有下列形式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+\cdots+a_{1n}(t)x_n+g_1(t),\\
\vdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+\cdots+a_{nn}(t)x_n+g_n(t).
\end{cases}
\tag{2}
$$

如果函数 $g_1, \cdots, g_n$ 每一个都恒等于零，则方程组(2)称为齐次的；否则，称为非齐次的．在这一章中，我们仅考虑系数 a_{ij} 不依赖于 t 的情况．

即使是常系数齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,\\
\vdots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n,
\end{cases}
\tag{3}
$$

处理起来也是很麻烦的．特别是当 n 很大时，更是如此．所以，我们力图用尽可能简洁的方式写出这些方程．为此，我们引入向量和矩阵的概念．

定义　向量

$$
\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}
$$

是数列 $x_1, \cdots, x_n$ 的简洁表示法．数 $x_1, \cdots, x_n$ 称为 $\mathbf{x}$ 的分量，如果 $x_1=x_1(t), \cdots, x_n=x_n(t)$，则

$$
\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{bmatrix}
$$

称为向量值函数．它的导数$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$是向量值函数

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

定义 矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

是排列成m行n列的数组a_{ij}的简洁表示法．处于第i行第j列的元素记作a_{ij}，第一个下标表示它所在的行数，第二个下标表示它所在的列数．如果$m=n$，则$\mathbf{A}$称为方阵．

下面我们来定义矩阵$\mathbf{A}$同向量$\mathbf{x}$之积．

定义 设$\mathbf{A}$是元素为a_{ij}的$n\times n$矩阵，$\mathbf{x}$是分量为$x_1,\cdots,x_n$的向量．我们把$\mathbf{A}$同$\mathbf{x}$之积(记作$\mathbf{Ax}$)定义为一个向量，它的第i个分量是

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

换句话说，$\mathbf{Ax}$的第i个分量是$\mathbf{A}$的第i行元素同向量$\mathbf{x}$的相应分量之积的和．因此，

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

例如，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+4+4 \\ -3+0+6 \\ 3+2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

最后，我们注意到：(3)的左端是向量$\frac{d\mathbf{x}}{dt}$的分量，而(3)的右端是向量$\mathbf{Ax}$的分量. 因此，我们能够把(3)写成下列简洁的形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{Ax}, \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

此外，如果 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$满足初始条件

$$x_1(t_0)=x_1^0, \cdots, x_n(t_0)=x_n^0,$$

则 $x(t)$满足初值问题

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0, \quad 其中 \quad \mathbf{x}^0=\begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

例如，方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=3x_1-7x_2+9x_3, \\ \frac{dx_2}{dt}=15x_1+x_2-x_3, \\ \frac{dx_3}{dt}=7x_1+ \qquad 6x_3 \end{cases}$$

能够写成下列简洁的形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}3&-7&9\\15&1&-1\\7&0&6\end{bmatrix}\mathbf{x},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix};$$

初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3, & x_1(0)=1,\\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}=\quad\ +3x_2-x_3, & x_2(0)=0,\\[2ex] \dfrac{dx_3}{dt}=x_1\qquad\ +7x_3, & x_3(0)=-1\end{cases}$$

能够写成下列简洁的形式:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3&-1\\1&0&7\end{bmatrix}\mathbf{x},\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

既然我们已经把(3)写成了比较容易处理的形式(4)，现在就可以来着手解决求它的所有解的问题.因为这些方程是线性的,所以我们试图按照在讨论二阶线性齐次方程时已成功地使用过的那种方法来进行处理.也就是说,我们将证明,(4)的解的常数倍，以及两个解之和,仍然是它的解. 然后,我们将试图证明：通过构成有限个解的所有线性组合，我们就能够求得 (4)的每一个解. 当然,我们必须首先定义：如果 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 都是具有 n 个分量的向量, $\mathbf{x}$ 的常数倍,以及 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之和,指的是什么.

定义 设 c 是一个数, $\mathbf{x}$ 是具有 n 个分量 $x_1,\cdots,x_n$ 的向量.我们把 $c\mathbf{x}$ 定义为一个向量,它的分量是 $cx_1,\cdots,cx_n$, 即

$$c\mathbf{x}=c\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cx_1\\cx_2\\\vdots\\cx_n\end{bmatrix}.$$

例如，如果

$$c=2,\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix},$$

则

$$2\mathbf{x}=2\begin{bmatrix}3\\1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\\14\end{bmatrix}.$$

把向量 $\mathbf{x}$ 乘以数 c 的这个过程，称为纯量乘法.

定义 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别是具有分量 x_1，⋯，x_n 和 y_1，⋯，y_n 的向量，我们把 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 定义为一个向量，它的分量是 x_1+y_1，⋯，x_n+y_n，即

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}.$$

例如，如果

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\6\\3\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\-6\\7\\9\end{bmatrix}.$$

则

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1\\6\\3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-6\\7\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\10\\11\end{bmatrix}.$$

把两个向量相加的这个过程，称为向量加法.

因为已经定义了纯量乘法和向量加法这两个过程，现在我们

就能够叙述下列定理.

定理 1 设 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 是(4)的两个解,则(a) $c\mathbf{x}(t)$ 是(4)的解,其中 c 是任何常数,(b) $\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)$ 也是(4)的解.

借助于下述引理,定理 1 很容易得到证明.

引理 设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵. 对于任何向量 $\mathbf{x},\mathbf{y}$, 和常数 c, 有 (a) $\mathbf{A}(c\mathbf{x})=c\mathbf{A}\mathbf{x}$, (b) $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{y}$.

引理的证明.

(a) 我们通过证明两个向量具有相同的分量,来证明它们是相等的. 为此,注意到:向量 $c\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的第 i 个分量是

$$ca_{i1}x_1+ca_{i2}x_2+\cdots+ca_{in}x_n=c(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n),$$

而向量 $\mathbf{A}(c\mathbf{x})$ 的第 i 个分量是

$$a_{i1}(cx_1)+a_{i2}(cx_2)+\cdots+a_{in}(cx_n)=c(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n).$$

因此, $\mathbf{A}(c\mathbf{x})=c\mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) 向量 $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ 的第 i 个分量是

$$a_{i1}(x_1+y_1)+\cdots+a_{in}(x_n+y_n)$$
$$=(a_{i1}x+\cdots+a_{in}x)+(a_{i1}y_1+\cdots+a_{in}y_n).$$

但是,这也是向量 $\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{y}$ 的第 i 个分量,因为 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的第 i 个分量是 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n$, $\mathbf{A}\mathbf{y}$ 的第 i 个分量是 $a_{i1}y_1+\cdots+a_{in}y_n$. 因此 $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}\mathbf{y}$. 证毕

定理 1 的证明.

(a) 如果 $\mathbf{x}(t)$ 是(4)的解,则

$$\frac{d}{dt}c\mathbf{x}(t)=c\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=c\mathbf{A}\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}(c\mathbf{x}(t)).$$

因此, $c\mathbf{x}(t)$ 也是(4)的解.

(b) 如果 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 都是(4)的解,则

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t))=\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}+\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}$$

$$=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{A}\mathbf{y}(t)=\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)).$$

因此，$\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)$也是(4)的解. 证毕

定理 1 的直接推论是：(4)的解的任何线性组合仍然是(4)的解. 这就是说，如果 $\mathbf{x}^1(t), \cdots, \mathbf{x}^j(t)$是(4)的 j 个解，则 $c_1\mathbf{x}^1(t)+\cdots+c_j\mathbf{x}^j(t)$仍然是(4)的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_j$ 是任意选取的常数. 例如，考虑方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-4x_1$$

或者

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \tag{6}$$

这个方程组是由二阶纯量方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$$

令 $x_1=y$, $x_2=\dfrac{dy}{dt}$ 而导出的. 因为 $y_1(t)=\cos 2t$ 和 $y_2(t)=\sin 2t$ 是这个纯量方程的两个解，所以我们可知

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -2\sin 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_1\cos 2t+c_2\sin 2t\\ -2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t\end{pmatrix}$$

是(6)的解，其中 c_1 和 c_2 是任意选取的常数.

下一步我们要来证明(4) 的每一个解都能表示成有限个解的线性组合. 也就是说，我们要确定：为了能够构成(4)的所有的解，事前我们必须求出多少个解. 有一个称为线性代数的数学分支，它研究的正是这个问题，因此，现在我们来学习一下线性代数.

习　　题

试把给定的对于单个变量 y 的微分方程化为一阶方程组(1—3)。

1. $\dfrac{d^3y}{dt^3}+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=0$,

2. $\dfrac{d^3y}{dt^3}+\cos y=e^t$,

3. $\dfrac{d^4y}{dt^4}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=1$.

4. 试把两个二阶方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dz}{dt}+2y=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2z=0$$

化为对于变量

$$x_1=y,\ x_2=y',\ x_3=z \text{ 和 } x_4=z'$$

的四个一阶方程的方程组.

5. (a) 设 $y(t)$是方程 $y''+y'+y=0$ 的解. 试证明:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

是方程组

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

的解.

(b) 设

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

是方程组

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

的解. 试证明 $y=x_1(t)$是方程 $y''+y'+y=0$ 的解.

试把给定的微分方程组和初始条件写成 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ 的形式(6—9).

6. $\begin{cases}\dot{x}_1=3x_1-7x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=4x_1, & x_2(0)=1.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dot{x}_1=5x_1+5x_2, & x_1(3)=0,\\ \dot{x}_2=-x_1+7x_2, & x_2(3)=6.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2-x_3, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=3x_1-x_2+4x_3, & x_2(0)=1,\\ \dot{x}_3=-x_1-x_2, & x_3(0)=-1.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_3, & x_1(-1)=2,\\ \dot{x}_2=x_1, & x_2(-1)=3,\\ \dot{x}_3=-x_2, & x_3(-1)=4.\end{cases}$

10. 设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}.$$

试计算 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 和 $3\mathbf{x}-2\mathbf{y}$.

11. 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

试计算 $\mathbf{Ax}$, 如果

(a) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

(c) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

12. 设 $\mathbf{A}$ 是任何 $n\times n$ 矩阵, $\mathbf{e}^j$ 是一个向量, 它的第 j 个分量是 1, 其余的分量都是零. 试验证向量 $\mathbf{Ae}^j$ 是 $\mathbf{A}$ 的第 j 列.

13. 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$