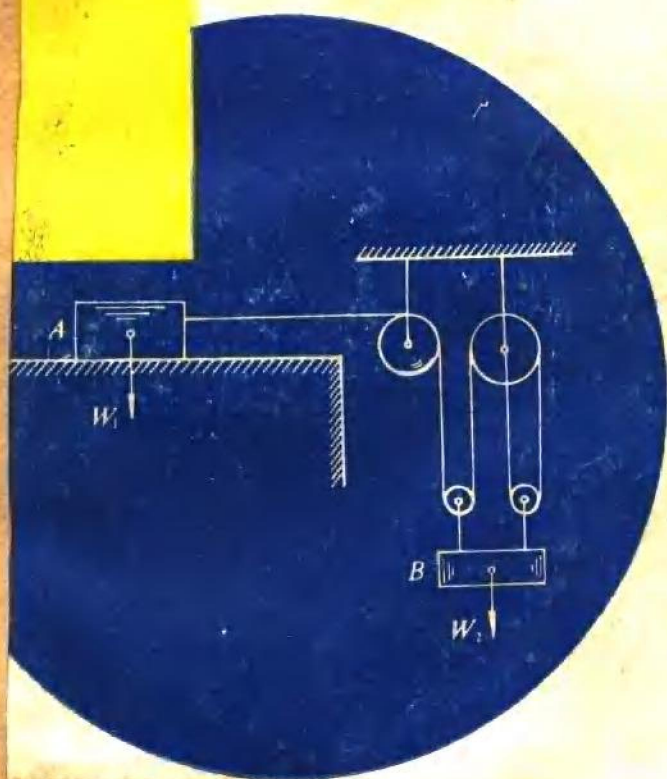


理论力学

徐妙新 主编
同济大学出版社
下册(全两册)



理论力学 例题及错解分析

(下册)

	徐妙新	主编
黄灼华	徐妙新	
李 岚	沈桂荣	编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书根据1980年5月审订的高等工业学校机械、土建、水利、航空等专业试用的《理论力学教学大纲》草案(120学时)的要求编写而成。

全书分为上、下两册:上册为静力学和运动学;下册为动力学。全册共二十三章,每章均包括内容提要、例题、错解分析、解题小结及思考题等五个部分,共选例题200题,错解分析100题,思考题210题。各章安排的错解分析是针对学生容易混淆的概念和常见错误进行归纳分析的,并力求使学生通过正误对比来理解概念。

本书可作为高等工科院校及电视大学、函授大学、职工大学等大专院校师生的教学参考书,并可供有关工程技术人员的参考,亦可用作自学参考读物。

责任编辑 解明芳

封面设计 褚志浩

理论力学例题及错解分析

(下 册)

徐妙新 主编

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

上海崇江外文印刷厂排版

同济大学印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 11 字数: 315 千字

1991年7月第1版 1991年7月第1次印刷

印数: 1-6000 定价: 4.25元

ISBN7-5608-0716-X/O.78

前 言

理论力学是高等工科院校许多专业的一门重要的技术基础课。通过这门课程的学习,既要掌握理论力学的基本理论和基本分析方法,又要培养分析和解决工程实际问题的能力。为了达到上述目的,我们编写了这本书,希望能对读者有所帮助。

本书根据1980年5月审订的高等工业学校机械、土建、水利、航空等专业试用的《理论力学教学大纲》草案(120学时)的要求编写而成。全书分为上、下两册:上册为静力学和运动学;下册为动力学。全册共二十三章,每章均包括内容提要、例题、错解分析、解题小结和思考题等五部分。共选例题200题,错解分析100题,思考题210题。书中涉及的内容及其安排,力求与国内现行的工科理论力学教材密切配合。

在本书的编写中,努力反映编者近三十年来的教学经验。尽量做到选材广泛、典型,内容充实,分析严谨,既有利于系统复习、掌握基本概念和基本理论,又富于启发性和思考性。为此,在各章内容提要中,除概括了本章的基本理论和概念外,一般将各章的公式表格化;在例题的编写中,注意解题思路和方法的分析,有的例题还用多种方法求解,以利于提高学生灵活应用和综合应用的能力;对各章选择的错解分析,尽量针对学生容易混淆的概念和解题中常见的错误,并采用正误对比的方式,以巩固和深化有关的基本概念和基本理论;解题小结一般包括本章理论的应用范围、解题步骤和注意事项等三方面;最后每章均附有适量的思考题,供学生思考。

本书由徐妙新主编,静力学部分和动力学第二十二章由黄灼华编写,运动学部分及动力学第二十三章由徐妙新编写,动力学第十三~十七章和第二十二章由李岚编写,动力学第十八~二十章由沈桂荣编写。

本书蒙伍云青副教授审阅,并提出了许多宝贵意见,全书的描图工作由李志云同志完成,在此一并表示感谢。

限于编者水平,书中错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编者

一九八九年七月

目 录

第三篇 动 力 学

第十三章	动力学基本定律与质点运动微分方程	1
(一)	内容提要	1
(二)	例题	3
(三)	错解分析	19
(四)	解题小结	29
(五)	思考题	30
第十四章	动量定理	33
(一)	内容提要	33
(二)	例题	35
(三)	错解分析	48
(四)	解题小结	54
(五)	思考题	55
第十五章	动量矩定理	57
(一)	内容提要	57
(二)	例题	59
(三)	错解分析	74
(四)	解题小结	81
(五)	思考题	82
第十六章	动能定理	85
(一)	内容提要	85
(二)	例题	88

(三) 错解分析	103
(四) 解题小结	111
(五) 思考题	112
第十七章 动力学普遍定理的综合应用	115
(一) 内容提要	115
(二) 例题	116
(三) 解题小结	135
(四) 思考题	135
第十八章 碰撞	139
(一) 内容提要	139
(二) 例题	141
(三) 错解分析	161
(四) 解题小结	175
(五) 思考题	177
第十九章 达朗伯原理	180
(一) 内容提要	180
(二) 例题	182
(三) 错解分析	205
(四) 解题小结	219
(五) 思考题	220
第二十章 虚位移原理	222
(一) 内容提要	222
(二) 例题	224
(三) 错解分析	245
(四) 解题小结	256
(五) 思考题	257
第二十一章 第二类拉格朗日方程	260
(一) 内容提要	260

(二) 例题	261
(三) 错解分析	273
(四) 解题小结	283
(五) 思考题	284
* 第二十二章 质点的相对运动	286
(一) 内容提要	286
(二) 例题	287
(三) 错解分析	300
(四) 解题小结	301
(五) 思考题	302
第二十三章 单自由度系统的振动	304
(一) 内容提要	304
(二) 例题	308
(三) 错解分析	328
(四) 解题小结	340
(五) 思考题	342

第三篇 动 力 学

第十三章 动力学基本定律 与质点运动微分方程

(一) 内容提要

由于动力学基本定律是研究动力学的理论基础，因此在本章中对这些定律和有关概念进行复习，然后在此基础上着重讲述质点运动微分方程并应用这些方程求解质点动力学的两类问题。

1. 本章概念

质点——具有一定质量而大小忽略不计的物体。

惯性——质点具有保持原有运动状态不变的属性。

质量——物体平动时惯性的度量。

2. 动力学基本定律(牛顿定律)

第一定律——惯性定律

任何质点都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体对质点所作用的力迫使它改变运动状态为止。

第二定律——力与加速度的关系定律。

质点受一力 F 作用时所获得的加速度 a 的大小与力 F 的大小成正比，而与质点的质量 m 成反比；加速度的方向与力的方向相同，即

$$ma = F \quad (1)$$

如质点同时受有几个力的作用，则上式中的 F 应理解为这些力

的合力,而 a 应理解为这些力共同作用下的质点加速度,这样式 (1) 亦可写为

$$ma=\Sigma F_i \tag{2}$$

式(1)或式(2)称为质点的动力学基本方程。

第三定律——作用与反作用定律

两质点相互作用的力总是大小相等,方向相反,沿同一直线,并分别作用在两质点上。

3、质点的运动微分方程

根据质点动力学基本方程 $ma=\Sigma F_i$ 可得表 13-1 所述的四种形式的质点运动微分方程。

表13-1

矢量形式	直角坐标形式	自然坐标形式	极坐标形式
$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$	$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X_i$ $m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y_i$ $m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z_i$	$m\frac{d^2s}{dt^2}=\Sigma F_{\tau}$ $m\frac{v^2}{\rho}=\Sigma F_{in}$ $0=\Sigma F_{ib}$	$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=\Sigma F_{\tau}$ $m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=\Sigma F_{\theta}$

上表式中, r 为质点的矢径, x, y, z 和 r, θ 分别为质点的直角坐标和极坐标, X_i, Y_i, Z_i 为力 $\boldsymbol{F}$ 在相应直角坐标轴上的投影。

其中, 直角坐标形式与自然坐标形式为两种常用的投影形式。而受中心力作用的问题一般采用极坐标形式较方便。根据问题的需要, 还可以有其他坐标形式的运动微分方程, 如柱坐标形式, 球坐标形式。

必须注意: 这些方程只适用于惯性坐标系, 其中各项加速度必须是绝对加速度。

质点的运动微分方程, 可用来解决质点动力学的两类问题。

第一类问题: 已知质点的运动, 求作用于质点上的力。

第二类问题: 已知作用于质点上的力, 求质点的运动。

在工程实际中所遇到的动力学问题中, 有时并不把这两类问题

截然分开,而是这两类问题的综合问题。

(二) 例 题

例 13-1 套管 A 重 P , 它由绕过定滑轮 B 的绳索牵引而沿导轨上升, 滑轮中心到导轨的距离为 d 。设绳索以等速 v_0 绕到转动的鼓轮上, 如图 13-1a 所示。如忽略摩擦及滑轮 B 的尺寸, 求作用于套管上的绳索拉力 T 与距离 OA 之间的关系。

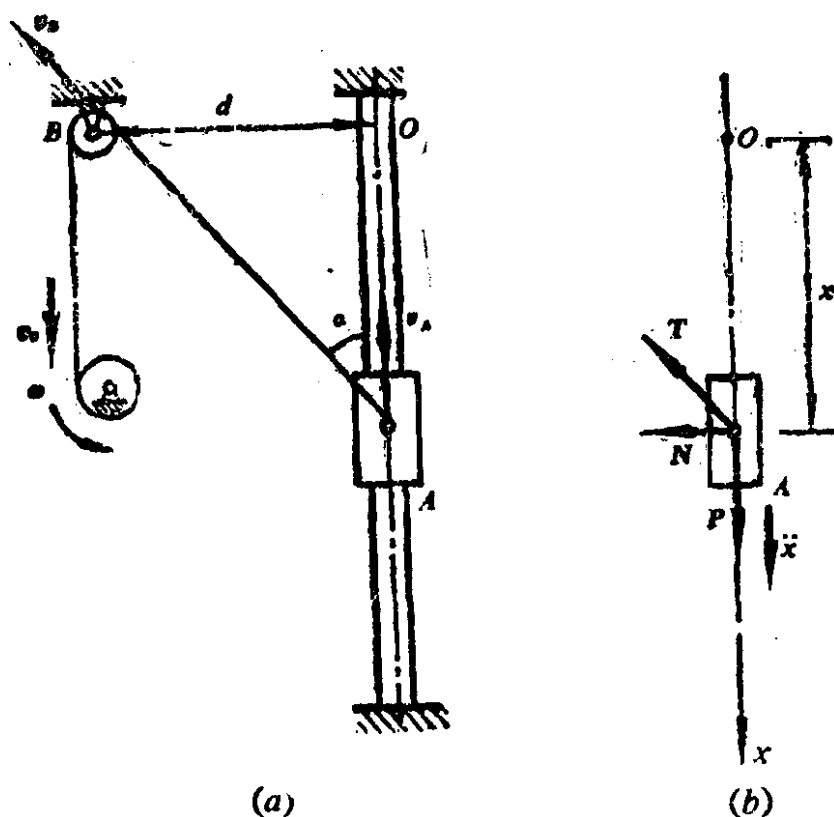


图 13-1

解: 根据题意, 套管 A 的加速度可由运动学知识求得, 故本题是属于质点动力学第一类问题。

- (1) 对象 选取套管 A 为研究对象, 并将其视为质点。
- (2) 受力分析 套管 A 受有重力 P 、绳索的张力 T 和导轨的约束反力 N 的作用, 如图 13-1b 所示。
- (3) 运动分析 套管 A 在绳索拉动下沿导轨直线上升。
- (4) 选坐标系 取 O 为原点, 建立 x 轴如图示。
- (5) 求套管 A 的加速度。一般可有两种方法。一种是建立套

管的运动方程,并将此对时间求两阶导数即可得加速度 a_A , 具体计算可参考题 8-3。这里介绍另一种求解方法。

设在套管 A 运动的每一瞬时, 将绳索 AB 段刚化, 并将这段绳索的运动看成刚体的平面运动, 如图 13-1a 所示。这样, 由速度投影定理, 得

$$v_A \cos \alpha = v_B$$

因
$$\dot{x} = -v_A; \quad v_B = v_0; \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

代入上式, 解得套管 A 的速度 v_A 在 x 轴上的投影为

$$\dot{x} = -\frac{v_0 \sqrt{x^2 + d^2}}{x}$$

上式对时间求一阶导数, 得套管的加速度为

$$\begin{aligned} a_A = \ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{v_0 \sqrt{x^2 + d^2}}{x} \right) \\ &= -\frac{v_0^2 d^2}{x^3} \end{aligned}$$

负号表示套管 A 的加速度实际指向是沿着 x 轴负向。故在上升运动过程中, 套管 A 作加速直线运动。

(6) 建立运动微分方程, 并求解。因

$$m\ddot{x} = P - T \cos \alpha$$

其中 $m = \frac{P}{g}$, 而 $\ddot{x}$ 和 $\cos \alpha$ 已表示成 x 的函数, 将这些表达式代入上式, 并经整理可得拉力 T 与距离 OA 即 x 之间的关系为

$$T = P \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{x} \left(1 + \frac{v_0^2 d^2}{x^3 g} \right)$$

应当注意, 在列写质点的运动微分方程时, 因两阶导数 $\ddot{x}$ 表示质点的加速度在 x 轴上的投影, 其本身是一个代数量, 故不论 x 轴正向如何选择, 都不需要在 $\ddot{x}$ 前另加正、负号。而力矢的投影和静力学中一样计算。

例 13-2 三棱体以水平加速度 a_0 向右运动, 其粗糙斜面的倾

角为 θ 。如果一物块放在此斜面上要保持相对静止，试问物块与斜面之间的摩擦系数至少应为多少？

解：本题要求物块相对于斜面保持静止。即要求物块与斜面具有相同的速度与加速度。因此物块的加速度为已知。根据静力学知，物块与斜面无相对滑动的条件是 $F \leq \mu N$ 。即 $\mu \geq \frac{F}{N}$ ，其中 F 为滑动摩擦力， N 为法向反力。因此，求摩擦系数的最小值，即是求 $\frac{F}{N}$ 的值。可见此题是属于动力学的第一类问题，即已知运动求力的问题。

取物块为研究对象，并将它视为质点。物块在重力 mg 、摩擦力 F 和法向反力 N 的作用下运动；物块的加速度为已知的。

选取坐标轴 x 、 y 如图 13-2 所示。由直角坐标形式的质点运动微分方程可得

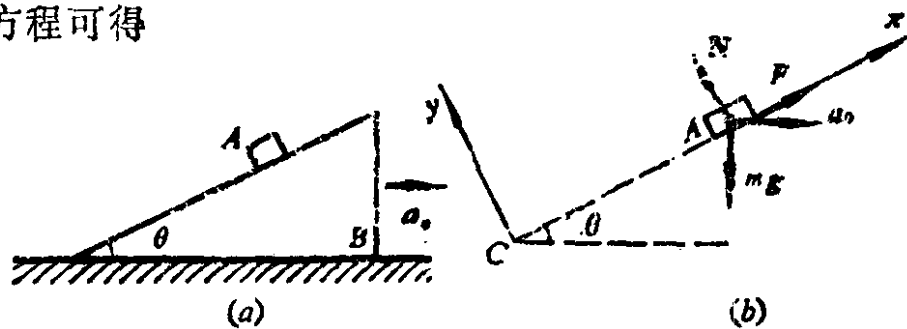


图 13-2

$$ma_x = F - mg \sin \theta \quad (1)$$

$$ma_y = N - mg \cos \theta \quad (2)$$

其中 $a_x = a_0 \cos \theta$, $a_y = -a_0 \sin \theta$

解式(1)、(2)得

$$F = m(a_0 \cos \theta + g \sin \theta)$$

$$N = m(g \cos \theta - a_0 \sin \theta)$$

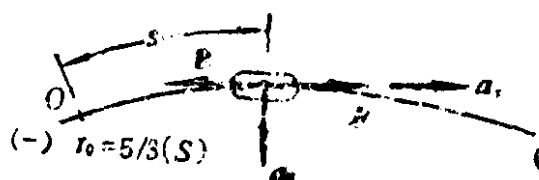
要使物块相对于斜面不滑动，则必须满足

$$\mu \geq \frac{F}{N} = \frac{a_0 \cos \theta + g \sin \theta}{g \cos \theta - a_0 \sin \theta}$$

即摩擦系数 μ 的最小值为

$$\mu_{\min} = \frac{a_0 \cos \theta + g \sin \theta}{g \cos \theta - a_0 \sin \theta}$$

例 13-3 电车司机逐渐开启变阻器来增加发动机的动力, 使电车的引力 F 的大小由零起而与时间成正比地增加, 且每秒内增加



1200N, 试根据下列数据求出电车的运动规律。电车的质量为 10000kg, 阻力 $R = 2\text{kN}$, 初速度 $v_0 = 0$, 运动轨迹如图 13-3 所示。

图 13-3

解: 本题属于动力学第二类问题。阻力为一常力, 牵引力是时间的函数。因电车运动的轨迹已知, 列出自然坐标形式的运动微分方程, 进行积分运算即可求解。

(1) 对象 选电车为研究对象, 并将它视为质点。

(2) 受力分析 电车受引力 F , 阻力 R 及重力 W 作用, 见图 13-3。

(3) 运动分析 电车沿图示轨迹运动。

(4) 选坐标系 因运动轨迹已知, 选用自然坐标系, 其弧坐标 s 及原点如图所示。

(5) 建立运动微分方程 将电车置于距离弧坐标原点为 s 处任一位置上, 写出电车的运动微分方程:

$$m \frac{ds}{dt} = F - R = 1200t - 2000 = 1200 \left(t - \frac{5}{3} \right) \quad (1)$$

上式可改写成

$$m ds = 1200 \left(t - \frac{5}{3} \right) dt \quad (2)$$

(6) 解方程 用不定积分, 将上式两端积分。得

$$m s = \int 1200 \left(t - \frac{5}{3} \right) dt = 600t^2 - 2000t + C_1$$

积分常数 C_1 可根据运动初始条件确定。因式 (1) 只在 $t \geq \frac{5}{3}$

秒时才有意义，故运动初始条件为： $t_0 = \frac{5}{3}$ 秒， $v_0 = 0$ ，将其代入式 (1)，求出 $C_1 = 5000/3$ ，所以有

$$m\dot{s} = 600t^2 - 2000t + 5000/3 \quad (3)$$

将式 (3) 改写为

$$m ds = (600t^2 - 2000t + 5000/3) dt$$

用不定积分将上式进行积分，得

$$\begin{aligned} ms &= \int \left(600t^2 - 2000t + \frac{5000}{3} \right) dt \\ &= 200t^3 - 1000t^2 + \frac{5000}{3}t + C_2 \end{aligned}$$

若以电车开始运动的位置为计算 s 的起点，即弧坐标的原点 O ，则当 $t_0 = \frac{5}{3}$ 秒时， $s = 0$ ，将 t_0 与 s 的值代入上式，得 $C_2 = -200\left(\frac{5}{3}\right)^3$ 。所以有

$$ms = 200 \left[t^3 - 5t^2 + \frac{25}{3}t - \left(\frac{5}{3}\right)^3 \right] = 200 \left(t - \frac{5}{3} \right)^3 \quad (4)$$

将 $m = 10000 \text{ kg}$ 代入式 (4)，得

$$s = 0.02 \left(t - \frac{5}{3} \right)^3 \text{ m} \quad (5)$$

式 (5) 即为电车沿已知轨迹的运动方程。

例 13-4 弹性线系于 A 点，并穿过一固定光滑小环 O ，线的自由端系一质量为 m 克的小球 M ，线未被拉长时其长度 $l = AO$ ，将线拉长 1 cm ，需要加力 $k^2 m \text{ N}$ ，其中 k 为常数，今沿 AB 方向将线拉长，使其长度增加一倍，且尚有一与 AB 垂直的速度 v_0 ，如图 13-4 所示。设线的张力与其伸长成正比，并略去重力作用。求小球的运动规律。

解：这是已知力求运动的问题，即为动力学第二类问题。因运

动轨迹不知,故采用直角坐标形式的质点运动微分方程求解。

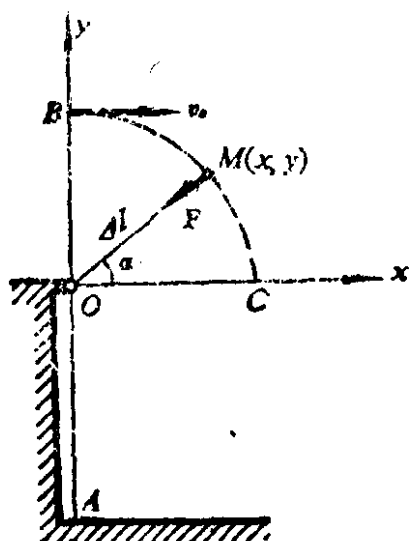


图 13-4

选取小球 M 为研究对象, 小球 M 作平面曲线运动, 在运动过程中, 只受弹性线拉力 $F = k^2 m \Delta l$ (Δl 是弹性线的变形) 的作用。

建立坐标系 Oxy , 由于力 F 沿着直线 OM , 且指向点 O , 其大小又与变形 $\Delta l = OM$ 成正比, 因而坐标原点选在 O 点。

将小球 M 放在坐标系中的任意位置, 如图 13-4 所示。小球 M 的直角坐

标形式的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -F \cos \alpha = -k^2 m \Delta l \cos \alpha \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F \sin \alpha = -k^2 m \Delta l \sin \alpha \quad (2)$$

由图 13-4 可知: $\cos \alpha = \frac{x}{\Delta l}$, $\sin \alpha = \frac{y}{\Delta l}$ 代入式(1)、(2)得

$$m\ddot{x} = -k^2 m x \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = -k^2 m y \quad (4)$$

消去式中 m , 并移项得

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \quad (6)$$

式(5)、(6)为二阶常系数齐次线性微分方程, 其通解为

$$x = A_1 \sin(kt + \alpha_1) \quad (7)$$

$$y = A_2 \sin(kt + \alpha_2) \quad (8)$$

其中积分常数 A_1 、 α_1 、 A_2 、 α_2 可由运动初始条件确定。

运动开始时小球 M 位于 $B(0, l)$ 点, 即 $t=0$ 时, 有

$$x_0 = 0, \quad \dot{x} = v_0$$

$$y_0 = l, \quad \dot{y} = 0$$

将式(7)、(8)对时间取导数,得,

$$\dot{x} = A_1 k \cos(kt + \alpha_1) \quad (9)$$

$$\dot{y} = A_2 k \cos(kt + \alpha_2) \quad (10)$$

将初始条件代入式(7)、(8)、(9)和(10),得

$$A_1 \sin \alpha_1 = 0 \quad (11)$$

$$A_2 \sin \alpha_2 = l \quad (12)$$

$$A_1 k \cos \alpha_1 = v_0 \quad (13)$$

$$A_2 k \cos \alpha_2 = 0 \quad (14)$$

联列上述四式,解得

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A_1 = \frac{v_0}{k}, \quad A_2 = l$$

将这些积分常数代入式(7)、(8)可得小球 M 的运动方程为

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt$$

$$y = l \cos kt$$

注意:

(1) 因为力和运动都在变化,在分析力与分析运动时一定要将研究对象置于任意位置。如本题将小球 M 放在特殊位置 B 或 C 上,则得不出式(1)、(2),而只得到这个位置的特殊关系,因而求不出小球 M 的运动规律。

(2) 解质点动力学第二类问题时,必须从题意中确定运动的初始条件,以便确定积分常数。

例 13-5 物体自地球表面以速度 v_0 铅直上抛。试求该物体返回地面时的速度 v_1 。假定空气阻力 $R = mkv^2$, 其中 k 是比例常数, m 是物体的质量, v 是物体的速度。

解: 此题已知物体的受力,求物体的运动,属于动力学第二类问题。其中空气阻力是速度的函数,重力始终是铅垂向下的,而空气阻力始终与运动方向相反。在上升和下降两个阶段,阻力的影响不能