高等学校教材

非线性固体力学基础

河海大学 卓家寿 编

前　　言

固体力学的非线性问题是当今力学界和工程应用界研究的热点之一。鉴于工程结构中的力学问题在本质上属于非线性范畴，因而开展非线性问题的研究势在必行。又由于该问题的复杂性和高难度，涉及到的理论比较深奥，需要的知识面相当宽广，研究的内容十分丰富，因而吸引和激发了众多科技工作者研究的兴趣和热情，不断推出新的研究成果，建立新的学科分支。面临这种形势，作为高等院校从事结构分析研究的工科研究生，必须具备研究非线性固体力学问题的基础知识和入门常识，以赶上时代的潮流，迎接新的挑战。

本书就是为适应从事结构分析研究的工科研究生的教学需要以及满足有关科研人员进修入门要求而编写的。书稿是在作者为本校研究生开设《非线性固体力学基础》学位课程的讲稿的基础上，经过8年来历届教学实践中的修改、更新和提炼而写成的。

考虑到从事结构分析研究的工科研究生业已修过线弹性理论和塑性力学课程，本书的内容就以此为起点，避免重复、力求精炼。全书共分四章，第一章是非线性固体力学所涉及的数学知识，重点介绍张量分析及有关数学公式；第二章是几何非线问题的分析理论——有限变形弹性理论和弹性稳定问题，介绍了两种坐标系（Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系）的数学描述及其基本方程的解法，在此基础上，以几何非线性问题解的非唯一性观点阐述了弹性体的稳定问题；第三章是粘弹塑性问题，该章是在弹塑性理论的基础上重点介绍了粘弹性问题和弹一粘塑性问题的本构关系及基本方程的解法，旨在使读者全面认识固体材料的三大特性（弹性、塑性和粘性），并掌握材料非线性问题分析的理论和方法；第四章是接触问题，这是近年来正在兴起的称之为接触非线性问题的热门研究课题，书中仅结合作者的科研实践以微分和变分的观点简单介绍了接触问题的非线性效应、微分方程的表达式及其等价的变分不等式和数值解法，目的仅在于提供入门知识、拓宽视野，引起读者的关注。

非线性固体力学的组成内容十分丰富，每一类非线性问题都可写成一本书。但考虑到研究生学习主要是打牢基础和培养自学能力，为此本书仅仅提供最必要的基础知识，故对各类非线性问题的内容作了精选，力求阐述严谨、重点突出、深入浅出、通俗易懂，易于掌握、便于自学。

承蒙主审人徐慰祖教授对本书提出了十分宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。我的博士生林鹏、邵国建和硕士生方义琳、王卫标参加了本书的抄写和校对工作，在此也一并致以谢意。由于作者水平有限，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

卓家寿

1994.12.31 于南京

目　　录

第一章　非线性固体力学问题的有关数学知识及张量分析

客观世界存在的固体力学问题，本质上均属于非线性范畴。无论是位移场与应力场的分析，或是温度场和渗流场的确定，其相应的支配方程的精确表示均带有或强或弱的非线性，其常规的数学表达式异常复杂而冗长，为了使其形式变得简单而明晰，并能突出其物理内涵，应用张量分析工具是势在必行。为此，本章将为非线性固体力学问题的分析提供最基本的有关张量分析的基础知识以及常用的数学公式。

第一节　指　标　符　号

对于一组 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n，若记作 x_i ($i=1$，2，…，n)，则称该下标符号 i 为指标，此处括号内标明 i 的取值范围。它表示了一组变量，若单写 x_i，后面未加括号说明，则只是表示它代表变量 x_1，x_2，…，x_n 中的某一个变量。指标 i 可以是下标（如 x_i）或上标（如 x^i），定义称这类符号系统为指标符号。对于笛卡尔直角坐标架表示的张量分量，则只用下标。

运用这种指标符号，十分容易写出固体力学中有关的几何、物理和力学量，如：

x_i　($i=1$，2，3) 表示一点的坐标分量 x，y，z；

u_i　($i=1$，2，3) 表示一点的位移分量 u，v，w；

e_{ij}　(i，$j=1\sim3$) 表示一点的应变分量 ε_x，$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，$\frac{1}{2}\gamma_{xz}$，$\frac{1}{2}\gamma_{yx}$，ε_y，$\frac{1}{2}\gamma_{yz}$，$\frac{1}{2}\gamma_{zx}$，$\frac{1}{2}\gamma_{zy}$，ε_z；

σ_{ij}　(i，$j=1\sim3$) 表示一点的应力分量 σ_x，τ_{xy}，τ_{xz}，τ_{yx}，σ_y，τ_{yz}，τ_{zx}，τ_{zy}，σ_z；

f_i，$\overline{P}_i$，$\overline{u}_i$　($i=1\sim3$) 分别表示考察体 Ω 内某一点的体力分量 f_x、f_y、f_z，给定面力边界 S_σ 上某一点的面力分量 $\overline{P}_x$、$\overline{P}_y$、$\overline{P}_z$，给定位移边界 S_u 上某一点的位移分量 $\overline{u}$、$\overline{v}$、$\overline{w}$。

……

一、若干约定　哑标和自由标

1. Einstein（爱因斯坦）求和约定

凡是在某一项内（含单项、乘积项、求导项等）具有重复一次且仅一次的指标，就表示对该指标在它的取值范围内求和，如：

a_ix_i ($i=1$，2，…，n) 就表示 n 项的和

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

从而可省去求和的符号 $\sum$，这就叫 Einstein 求和约定。同理，依照 Einstein 求和约定，如果下标 i 或 j 取值是从 $1\sim3$，则有：

$$\sigma_{ii}(\text{或 }\sigma_{jj}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}(\text{代表体积应力})$$

$$e_{ii}(\text{或 } e_{jj}) = e_{11} + e_{22} + e_{33}(\text{代表体积应变})$$

$$\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x_i}\left(\text{或}\frac{\partial\sigma_{1j}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\left(\text{代表}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)$$

……

注意到上述下标用不同的指标 i 或 j 的重复均表示求和，并不影响其求和的结果，因此称其为哑标（或盲标）。

Einstein 求和约定只适用于字母指标，因为字母指标能表示它的取值范围，求和才有意义，而对于数字指标，则是确定的值，不存在求和运算，如 σ_{33}只代表 σ_z等。此外，对于不只重复一次的指标，求和的约定失效。此时，应根据具体的运算要求，另作规定或附加说明。最后，还有两点必须说明：①对于两个求和项的乘积，两个求和项的指标应当采用不同的字母，否则会出现指标重复超出一次而不符合约定，如（$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$）（$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$）应写成 $\sigma_{ii}\sigma_{jj}$，而不可记为 $\sigma_{ii}\sigma_{ii}$（这里规定 i，$j=1\sim3$）；②在给予专门说明或注释的情况下，指标的重复也可以不表示求和。

2. 求导记号的缩写约定

凡是在下标前面有逗号隔开者，表示逗号前的那个量对该指标相应的位置坐标变量求偏导数，其表示式如下：

$$(\quad)_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(\quad),\left(\text{如 } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right);$$

$$(\quad)_{,ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\quad),\left(\text{如 } u_{k,ij} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

3. 自由标

凡是同一项内不重复出现的指标，称做自由标。自由标号表示该组变量中的任何一项，如 σ_{ij}表示 9 个应力分量（当 i，$j=1\sim3$）中的任何一个。在同一方程中，各项的自由标号应当相同，而且还可理解为该方程的形式在该自由指标变化范围内均可适用，如被考察微元的平衡微分方程的指标符号表达式可写为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad (i,j = 1 \sim 3) \tag{*}$$

此方程各项的自由指标均为 i，（第一项中的下标 j 重复，表示对 j 求和，故 j 为哑标）。当 $i=1$ 时，上式（*）变为：

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0$$

表示被考察微元沿 x 方向的平衡微分式。同理，当 $i=2$ 和 3 时，指标符号表达式（*）也能适用，分别变为 y 向和 z 向的平衡微分式：

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0$$

和

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0$$

因此，式（*）代表被考察微元保持平衡所必需的主矢为零的条件（被考察微元主矩为零的条件可导出剪应力互等的结果，即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$（i，$j=1\sim3$））。

显然，同一方程中的各项的自由标必须相同，不能任意改变其中某一项或部分项的自

由标，但当所有各项中的自由标均改用另一字母表示时（注意满足自由标的规定），那是可以的，如式（*）中的自由标 i 亦可改用 k 表示。

二、Kronecker（克罗内克尔）记号 δ_{ij} 与排列（置换）符号 e_{ijk}

1. Kronecker 记号 δ_{ij}（简称克氏记号）

定义：δ_{ij}（i，j=1～3）表示 9 个量，且有

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad (i,j=1\sim 3) \tag{1-1}$$

即 $\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$

$\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=\delta_{31}=\delta_{13}=0$

由此定义出发，便可得到下列一组关系式：

单位矩阵 $\underset{\sim}{I}$ 表示为

$$\underset{\sim}{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=[\delta_{ij}]$$

$$\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}(\text{或 }\delta_{jj})=3$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}=\delta_{im}$$

$$a_{ij}\delta_{ij}=a_{ii}$$

$$a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}$$

$$a_i\delta_{ij}=a_j$$

$$a_{ij}\xi_j-\lambda\xi_i=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})\xi_j$$

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}}=\delta_{jk}\qquad (\text{因 } a_{ii}=a_{jj}=a_{jk}\delta_{jk})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=x_{i,j}=\delta_{ij}$$

若 $\vec{e}_i$ 为笛卡尔坐标系的基矢（单位矢量），$\vec{e}_{i'}$ 为该坐标系转动后的基矢，则有：

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$$

$$l_{ik'}l_{jk'}=\delta_{ij}\qquad (\text{其中 } l_{ij'}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_{j'}=\cos(\vec{e}_i,\vec{e}_{j'}))$$

$$l_{i'k}l_{j'k}=\delta_{i'j'}$$

2. 排列（置换）符号 e_{ijk}

定义：
$$e_{ijk}=\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\times\vec{e}_k) \tag{1-2}$$

其中 $\vec{e}_i$（i，j，k）为笛卡尔坐标系的基矢，设 $\vec{e}_i=\delta_{ir}\vec{e}_r$，$\vec{e}_j=\delta_{js}\vec{e}_s$，$\vec{e}_k=\delta_{kt}\vec{e}_t$（$r$，$s$，$t$=1～3），由矢量运算律中三重混合积的公式，上式可写为：

$$e_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

或

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当 } i,j,k \text{ 为顺钟向排列时}\\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 为逆钟向排列时}\\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 有重复时}\end{cases}$$

$$(i,j,k=1\sim 3)$$

e_{ijk}也称 Ricci（瑞西）符号，共有 27 个分量。下标不重复的排列组合有 3! =6 种，其中 i，j，k 成顺钟向排列的有三种，即（1，2，3），（2，3，1）和（3，1，2），i，j，k 成逆钟向排列的也有三种，即（1，3，2），（3，2，1）和（2，1，3）。下标重复排列有 21 种，如（1，1，1），（1，1，2），（1，1，3），…。

由定义有：

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1$$

$$e_{132}=e_{321}=e_{213}=-1$$

$$e_{111}=e_{112}=e_{113}=\cdots=0$$

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}=-e_{ikj}=-e_{kji}=-e_{jik}$$

$$e_{ijk}e_{ijk}=6$$

若引入 e_{ijk}记号表示某个三阶行列式 a，则可推得下列结果。先将 a 按列展开：

$$a=|a_{ij}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})$$

$$+(a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33})+(a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})$$

注意到上式共有六个乘积项，每个乘积项具有下述的组成规律：①组成每一乘积项的三个元素的列指标排序皆为（1，2，3），呈顺钟向排序，而其行指标顺序有顺钟向，也有逆钟向；②凡是行指标排序为顺钟向的乘积项，其前面符号皆为正号，而行标为反钟向排序的乘积项，其前面符号皆为负号。而 e_{ijk}正好可以表示这个规律，为此上式可记为：

$$a=e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

同样，行列式也可按行展开，导得：

$$a=e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

根据行列式换行或换列结果为异号的性质，可引入置换符号直接写出换列或换行后新的行列式值 a'的计算公式：

（1）换列公式（设 p，q，r 列指标为任意排序）

$$a'=\begin{vmatrix}a_{1p} & a_{1q} & a_{1r}\\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r}\\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r}\end{vmatrix}=e_{pqr}a \qquad (p,q,r=1\sim 3)$$

若直接展开可得：

$$a'=e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr}$$

（2）同理可求出换行公式（设 m，n，l 行指标为任意排序）

$$a''=\begin{vmatrix}a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3}\end{vmatrix}=e_{mnl}a$$

若直接展开可得：$a''=e_{ijk}a_{mi}a_{nj}a_{lk}$

以上各公式中，下标 i，j，k 是固有的哑标，而下标 p，q，r 和 m，n，l 为自由标。

(3) 若行与列都进行交换，则有

$$a''' = \begin{vmatrix} a_{mp} & a_{mq} & a_{mr} \\ a_{np} & a_{nq} & a_{nr} \\ a_{lp} & a_{lq} & a_{lr} \end{vmatrix} = e_{mnl}e_{pqr}a$$

若 a''' 视为 a' 的行交换，则有：

$$a''' = e_{mnl}a' = e_{mnl}(e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr})$$

则由 $a'''=e_{mnl}e_{pqr}a=e_{mnl}$ $(e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr})$ 可得到行与列取任意值时求解行列式的一般公式：

$$a = \frac{1}{6}e_{pqr}e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr} \tag{1-3}$$

$$(i,j,k = 1 \sim 3; p,q,r = 1 \sim 3)$$

若将矢量叉乘用 e_{ijk} 表示，则有：

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk}\vec{e}_k \tag{1-4}$$

3. 排列符号 e_{ijk} 与克氏记号 δ_{ij} 之间的恒等式

可以证明，下列恒等式成立：

$$e_{ijk}e_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq} \tag{1-5}$$

证明如下：

设 $$I = |\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

则其行号与列号变换后的新行列式：

$$\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} = e_{ijk}e_{pqr}I = e_{ijk}e_{pqr}$$

令 $r=k$，则有

$$e_{ijk}e_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{kp}\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jq} & \delta_{jk} \end{vmatrix} - \delta_{kq}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jk} \end{vmatrix} + \delta_{kk}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{jq} & \delta_{jp} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq}$$

上面推导的最后过程中利用了 $\delta_{kk}=3$ 和 $\delta_{kp}\delta_{ik}=\delta_{ip}$ 以及行列式任两列互换异号的性质。

第二节 笛卡尔张量

自然界的运动法则及其有关的几何、力学或物理量本质上是与坐标系无关的。例如考察物体的任一部分，不管有无坐标系，它总是处在（静的或动的）平衡状态，这是客观事

实。但在分析求解具体问题时，常常还须引用某种参考坐标架借以描述反映平衡事实的平衡微分方程，具体坐标系的引入，势必夹杂进与坐标架有关而与平衡事实完全无关的内容，这就导致了研究过程的复杂化，淡化了甚至混淆了客观事物的物理内涵。例如，同是反映平衡的微分方程，在不同的坐标系中就具有不同的形式，显然它就不具备与坐标系无关的不变性。

为了克服上述采用坐标系时出现的弊病，在只运用标量和矢量的某些力学分支中曾出现不采用坐标系的抽象记法，但遇到比矢量更为复杂的物理量（如固体力学中应力状态，其应力分量具有双重方向性，即同时与截面的法线方向和应力分解方向有关）时，单纯的抽象记法就显得不很方便了。于是一种新的工具——张量方法出现了。它是一种既采用坐标系而又摆脱具体坐标影响的不变性方法，其思路是建立一类量，使其在不同参考坐标架内的分量之间存在着共同的、特定的转换规律，这类量在 1916 年被 Einstein 定名为张量 Tensor（在法语中，Tensior 即是应力），故 Tensor 是由在坐标变换时象应力分量一样变换的变量系（即张量）而得名的，引进张量分析的工具后，不难采用指标符号把特定坐标架（如笛卡尔坐标系）表示的特定方程改写成为适用于任何另一个坐标系的张量方程的普遍形式，从而使运用张量表示的方程（称之为张量方程）具有与坐标架选择无关的重要特性，且可以更加突出物体的固有特性和普遍规律。

因此，张量可以视为是一个数学不变量，当坐标系变换时，它在各坐标系内各分量之间的变换服从统一的规律（张量变换规律），这就避免了在选用不同的坐标架时，反映物理定律的表达式需要重新进行冗长的推导，还可消除不同坐标系描述物理定律表达形式不同的弊病，从而保证了表达式方程与选择坐标架无关的不变性，使其结果对于充分广泛的一大类参考坐标系均可适用。

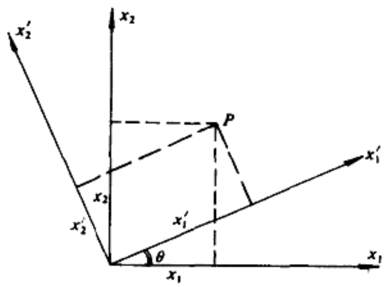

图 1-1

为了进一步阐明张量的定义和有关的运算规律，本节将从坐标变换的介绍开始，逐步引入张量的定义和表达方法，进而在下面两节中讨论有关张量的运算规则和公式。

一、坐标变换

1. 笛卡尔坐标轴旋转的变换

图 1-1 示一平面内两组笛卡尔坐标系，$x'_1ox'_2$ 是 x_1ox_2 顺时针旋转 θ 角后而得到的新坐标系。

两组坐标变量存在下列关系：

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} \\ a_{2'1} & a_{2'2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{或} \{x'\} = [a]\{x\} \tag{1-6}$$

设新老坐标系的基矢（单位矢量）分别为 $\vec{e}_{i'}$，$\vec{e}_i$（$i=1,2$），则 $a_{i'j}=\cos(\vec{e}_{i'},\vec{e}_j)$。

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} \\ a_{2'1} & a_{2'2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_{1'},\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_{1'},\vec{e}_2) \\ \cos(\vec{e}_{2'},\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_{2'},\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

同理也可有

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{2'1} \\ a_{1'2} & a_{2'2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_{1'},\vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_{2'},\vec{e}_1) \\ \cos(\vec{e}_{1'},\vec{e}_2) & \cos(\vec{e}_{2'},\vec{e}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix}$$

或
$$\{x\} = [a]^T\{x'\} \tag{1-7}$$

从式（1-6）的求逆也可导出

$$\{x\} = [a]^{-1}\{x'\} \tag{1-7'}$$

对照式（1-7）和式（1-7′）可知

$[a]^{-1} = [a]^T$（此关系也可以从 $[a]\,[a]^T = \underset{\sim}{I}$ 导得）

为此，称 $[a]$ 为正交矩阵。

倘若采用指标符号描述，式（1-6）和式（1-7）可记为：

$$x_i' = a_{i'j}x_j \qquad 和 \qquad x_j = a_{k'j}x_k' \tag{1-8}$$

$$(i', j, k' = 1 \sim 2)$$

从而有
$$x_i' = a_{i'j}a_{k'j}x_k' = \delta_{i'k'}x_k' \tag{1-9}$$

其中
$$a_{i'j}a_{k'j} = \delta_{i'k'} = \begin{cases} 1,(i' = k') \\ 0,(i' \neq k') \end{cases} \tag{1-10}$$

式(1-10)虽是在两个直角坐标系变换中得到的正交性条件，但对于两个一般正交坐标系的变换也是适用的，具有普遍性，这种变换称为正交变换。

以上讨论的是二维空间，不难将其推广到三维空间直角坐标轴旋转的变换，其变换公式为：

$$\{x'\} = [a]\{x\} \tag{1-11}$$

$$\{x\} = [a]^T\{x'\} \tag{1-12}$$

其中
$$a_{i'j} = \cos(\vec{e}_i',\vec{e}_j) \qquad (i', j = 1 \sim 3) \tag{1-13}$$

$$[a]^T = [a]^{-1} \tag{1-14}$$

或
$$x_i' = a_{i'j}x_j \tag{1-15}$$

$$x_j = a_{k'j}x_k' \tag{1-16}$$

$$a_{i'j}a_{k'j} = \delta_{i'k'} \tag{1-17}$$

利用式（1-13），可以进一步阐明式（1-17）的几何含义：

当 $i' = k'$ 时，式（1-17）左边项变为

$$a_{k'1}^2 + a_{k'2}^2 + a_{k'3}^2 = \cos^2(\vec{e}_k',\vec{e}_1) + \cos^2(\vec{e}_k',\vec{e}_2) + \cos^2(\vec{e}_k',\vec{e}_3) = 1 \tag{1-18}$$

表示基矢 $\vec{e}_k'$ 的长度为 1 的事实。

当 $i' \neq k'$ 时，式（1-17）左边项变为

$$\begin{aligned} a_{i'1}a_{k'1} + a_{i'2}a_{k'2} + a_{i'3}a_{k'3} &= \cos(\vec{e}_i',\vec{e}_1)\cdot\cos(\vec{e}_k',\vec{e}_1) \\ &+ \cos(\vec{e}_i',\vec{e}_2)\cos(\vec{e}_k',\vec{e}_2) + \cos(\vec{e}_i',\vec{e}_3)\cos(\vec{e}_k',\vec{e}_3) = 0 \end{aligned} \tag{1-19}$$

表示基矢 $\vec{e}_i'$ 与 $\vec{e}_k'$ 正交的事实。

由式(1-13)还可导出
$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \tag{1-20}$$

2. 一般坐标变换

设 x_1，x_2，x_3 为一点在某一参考坐标架中的坐标，通过方程

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1,2,3) \tag{1-21}$$

把变量 x_1，x_2，x_3 转为一组新变量 x_1'，x_2'，x_3'，其逆变换为

$$x_i = g_i(x_1', x_2', x_3') \qquad (i = 1,2,3) \tag{1-22}$$

为了保证式（1-21）和式（1-22）的变换是一一对应的，即在某个域 R 内的单个点的变量（x_1，x_2，x_3）能由对应的点变量（x_1'，x_2'，x_3'）唯一确定，反之也然，则其充分条件是：

（1）在域 R 内，f_i 是单值、连续函数，且具有连续的一阶导数。

（2）在域 R 内的任意点处，雅可比行列式 $J\neq 0$，即

$$J = \left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-23}$$

满足上述充分条件的坐标变换称之为容许变换。如果 $J>0$，意味着一组右手坐标系变换后仍为右手系（即旋转变换），称为正常容许变换；如果 $J<0$，则意味着右手坐标系变换成左手系（即反射变换），称为非正常容许变换。本书只讨论正常容许变换。

二、笛卡尔张量的定义　并矢记号

张量被用来描述客观存在的物理量，作为整体，它是不依赖于坐标系的；有关的张量方程在任何坐标系中保持形式的不变性，可以更加清晰地突出了该方程的物理内涵。但另一方面，张量仍需要选定适用的参考坐标架，以便在数量上对其物理量进行运算，故常常引用张量分量的集合来表征张量；张量在不同坐标系中的分量固然不同，但两组不同坐标系中的分量之间必须服从统一的确定性的变换规律，这种随坐标变换的统一规律，正是张量总体不依赖坐标系的反映。

满足确定的任意曲线坐标系变换的张量，称为一般张量。只满足笛卡尔直角坐标系变换的张量，定义为笛卡尔张量，本书只介绍笛卡尔张量，故所用的指标均为下标。

张量分量中所含自由指标的数目，叫张量的阶，在三维欧几里德空间中，每一个指标变化从 1～3，故 n 阶张量将有 3^n 个分量。

对于标量，它是不随坐标系不同而变化的，故其只有一个分量，因而标量 Φ 是坐标变换下的不变量：

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi'(x_1', x_2', x_3') \tag{1-24}$$

若用张量表示，标量是零阶（$n=0$）张量，它是只有大小的量，即一个分量（$3^0=1$）。

对于矢量，它是同时具有大小和方向的量，在每个坐标方向均有一个分量，故在三维空间中共有 3 个分量。这些分量在坐标变换时要产生变化，但其变化服从如下所示特定的规律：

$$\begin{cases} \xi_i'(x_1', x_2', x_3') = \beta_{i'k}\xi_k(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_i(x_1, x_2, x_3) = \beta_{k'i}\xi_{k'}(x_1', x_2', x_3') \end{cases} \tag{1-25}$$

若 ξ_i 是空间某点坐标矢量的分量，则式（1-25）即退化为式（1-15）和式（1-16）的形式。由此可知，矢量场可视为是一阶（$n=1$）张量，具有 $3^1=3$ 个分量。

对于那些在每个坐标方向都有一个矢量的变量系（例如，沿某个坐标方向为外法线的截面均具有一个应力矢）它在三维空间中就具有 9 个分量 t_{ij}，坐标变换时，这些分量也在改变，但也服从特定的规律，如下式所示：

$$\begin{cases} t'_{ij}(x'_1,x'_2,x'_3) = \beta_{i'm}\beta_{j'n}t_{mn}(x_1,x_2,x_3) \\ t_{ij}(x_1,x_2,x_3) = \beta_{m'i}\beta_{n'j}t'_{mn}(x'_1,x'_2,x'_3) \end{cases} \tag{1-26}$$

若 t_{ij}是空间某点在坐标 $Ox_1x_2x_3$ 中的应力分量 σ_{ij}，考察其在以某一坐标 x_i 为外法线的截面上的应力矢量 $\vec{\sigma}_{(i)}$，可记为：

$$\vec{\sigma}_{(i)} = \sigma_{ij}\vec{e}_j \qquad (i,j=1\sim 3) \tag{1-27}$$

设变换后的坐标系为 $Ox'_1x'_2x'_3$，类似（1-27）关系，亦有：

$$\vec{\sigma}_{(m')} = \sigma_{m'n'}\vec{e}_{n'} \qquad (m',n'=1\sim 3) \tag{1-28}$$

若把 $x_{m'}$ 视为原坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 相应斜面上的外法线，其方向余弦记为 $\beta_{m'i}=\beta_{im'}=\cos(\vec{e}_{m'},\ \vec{e}_i)$，则由斜面应力公式，有：

$$\vec{\sigma}_{(m')} = \beta_{m'i}\vec{\sigma}_{(i)} = \beta_{m'i}\sigma_{ij}\vec{e}_j$$

将 $\vec{e}_j=\beta_{n'j}\vec{e}_{n'}$ 代入上式得：

$$\vec{\sigma}_{(m')} = \beta_{m'i}\sigma_{ij}\beta_{n'j}\vec{e}_{n'} \tag{1-29}$$

比较式（1-28）和式（1-29）可知：

$$\sigma_{m'n'} = \beta_{m'i}\beta_{n'j}\sigma_{ij} \tag{1-30}$$

类似地，还可导出：

$$\sigma_{ij} = \beta_{m'i}\beta_{n'j}\sigma_{m'n'} \tag{1-31}$$

象应力一类具有双重方向性的变量系，可用二阶张量表示，$n=2$，共有 $3^2=9$ 个分量，虽然它们随坐标变换而改变，但其转换规律相同，如式（1-30）和式（1-31）所示。

若以黑体字母 **T** 代表二阶张量，$\vec{T}_i$ 表示沿某个坐标方向（基矢为 $\vec{e}_i$）的矢量，T_{ij}表示张量的分量（i，$j=1\sim 3$），则可利用并矢记号（即把两个矢量按顺序并写在一起，它既不是矢的点积，也不是叉积，而是一种记号）将张量 **T** 表示为

$$\mathbf{T} = \vec{e}_1\vec{T}_1 + \vec{e}_2\vec{T}_2 + \vec{e}_3\vec{T}_3 = \vec{e}_i\vec{T}_i$$

若将矢量 $\vec{T}_i=T_{i1}\vec{e}_1+T_{i2}\vec{e}_2+T_{i3}\vec{e}_3=T_{ij}\vec{e}_j$ 关系代入上式，则有

$$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (i,j=1\sim 3) \tag{1-32}$$

式（1-32）对任何笛卡尔坐标系均可适用且不随坐标系变换而改变。而其张量分量 T_{ij} 则与坐标系的选择有关，但在坐标变换时遵循相同的规律。设张量 **T** 在新、老坐标系中分别记为：

$$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = T'_{mn}\vec{e}'_m\vec{e}'_n$$

将 $\vec{e}'_m=\beta_{m'i}\vec{e}_i$ 和 $\vec{e}'_n=\beta_{n'j}\vec{e}_j$ 代入上式

则有 $$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \beta_{m'i}\beta_{n'j}T'_{mn}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

进而有 $$T_{ij} = \beta_{m'i}\beta_{n'j}T'_{mn} \tag{1-33}$$

类似地可导得 $$T'_{mn} = \beta_{m'i}\beta_{n'j}T_{ij} \tag{1-34}$$

以上分量转换规律可推广到高阶张量，在三维空间中 n 阶张量将有 3^n 个分量，它们的

变换式可表示为：

$$T'_{\underbrace{ijkl\cdots}_{n\text{个下标}}} = \underbrace{\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}\beta_{l's}\cdots}_{n\text{个系数连乘}} T_{\underbrace{pqrs\cdots}_{n\text{个下标}}} \tag{1-35}$$

和
$$T_{\underbrace{ijkl\cdots}_{n\text{个下标}}} = \underbrace{\beta_{ip'}\beta_{jq'}\beta_{kr'}\beta_{ls'}\cdots}_{n\text{个系数连乘}} T'_{\underbrace{pqrs\cdots}_{n\text{个下标}}} \tag{1-36}$$

若引入下标本身也带附加下标的记号和连乘符号 Π，则记为

$$T_{ijkl\cdots} = T_{i_1 i_2 \cdots i_n} = T_{i_n}$$

和
$$\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}\beta_{l's}\cdots = \beta_{i'_1 j_1}\beta_{i'_2 j_2}\beta_{i'_3 j_3}\beta_{i'_4 j_4}\cdots = \Pi\beta_{i'_n j_n}$$

式(1-35) 可记为
$$T'_{i_n} = \Pi\beta_{i'_n j_n} T_{j_n} \tag{1-37}$$

类似地，式(1-36) 记为
$$T_{i_n} = \Pi\beta_{i_n j'_n} T'_{j_n} \tag{1-38}$$

通过上述讨论，便可对张量给出如下定义：

张量是其分量在坐标变换时满足式（1-37）和式（1-38）所示变换关系的量。张量分量的自由指标的数目 n 等于张量的阶数，在三维空间中，每个自由指标的取值范围为 1～3，故其分量个数将有 3^n 个（在 k 维空间中则有 k^n 个分量），变换关系式也有 3^n 个，在每个关系式的右端将有 3^n 项相叠加。

张量也可用并矢表示，它的阶数等于并写在一起的矢量的数目。如三阶张量可写为：

$$\mathbf{T} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = (a_i\vec{e}_i)(b_j\vec{e}_j)(c_k\vec{e}_k) = a_ib_jc_k\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k = T_{ijk}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k$$

其中 T_{ijk}是张量分量，$\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k$ 是基矢量的并矢。

每项均由张量组成的方程称之为张量方程。它具有与坐标架选择无关的特性。显然，该方程的每一项必须具有相同的张量特征，否则，改变参考坐标架将破坏原有方程的形式。

第三节　张量代数　商法则

一、张量代数

1. 相等

若两个张量相等，如 $\mathbf{T}=\mathbf{S}$，其中

$$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j, \qquad \mathbf{S} = S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

则其对应分量也相等，即 $T_{ij}=S_{ij}$

若两个张量在某个特定的坐标系中的对应分量相等，则它们在任何容许变换中得到的在新坐标系中的对应分量也一一相等。这是由于它们遵守相同的变换规律的缘故。

如
$$T'_{ij} = \beta_{i'm}\beta_{j'n}T_{mn} = \beta_{i'm}\beta_{j'n}S_{mn} = S'_{ij}$$

此处的 $\beta_{i'm}$和 $\beta_{j'n}$仅和新、老坐标系有关，而与被转换的张量无关。

2. 加、减

有限个同维同阶的张量可以相加（或相减），得到的是一个新的同维同阶的张量，新张量的分量是各张量相应分量求和（或差）。即

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \pm \mathbf{C} \pm \cdots = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \\ T_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij} + C_{ij} \pm \cdots \end{cases} \tag{1-39}$$

张量加减满足交换律和结合律，即

$$\mathbf{T}+\mathbf{S}=\mathbf{S}+\mathbf{T} \tag{1-40}$$

$$\mathbf{T}+(\mathbf{S}+\mathbf{R})=(\mathbf{T}+\mathbf{S})+\mathbf{R} \tag{1-41}$$

任何张量均存在一个原张量的负张量，两者之和为同维同阶零张量，即

$$\mathbf{T}+(-\mathbf{T})=\mathbf{0} \tag{1-42}$$

3. 数积

张量 **A** 和一个标量 λ 相乘，得到一个新的张量 **T**，即

$$\mathbf{T}=\lambda\mathbf{A}, \text{且 } T_{ij}=\lambda A_{ij} \tag{1-43}$$

若 α、β 代表标量，它们与张量的数乘规则类同数乘矩阵的规则，如：

$$\alpha(\beta\mathbf{T})=(\alpha\beta)\mathbf{T}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{T}=\alpha\mathbf{T}+\beta\mathbf{T}$$

$$\alpha(\mathbf{T}+\mathbf{S})=\alpha\mathbf{T}+\alpha\mathbf{S}$$

$$\alpha\mathbf{T}=\mathbf{T}\alpha$$

………

4. 矢量与二阶张量的乘积

矢量与二阶张量的乘积有点积和叉积之分，每种乘积又有左乘和右乘之别。点积或叉积的运算符号定义在其相邻的矢量间进行运算。

(1) 矢量左点乘二阶张量。

设 $\vec{a}$ 为矢量，**T** 为二阶张量，则其点乘

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\mathbf{T}&=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1\vec{T}_1+\vec{e}_2\vec{T}_2+\vec{e}_3\vec{T}_3)\\&=a_1\vec{T}_1+a_2\vec{T}_2+a_3\vec{T}_3\\&=a_i\vec{T}_i=a_iT_{ij}\vec{e}_j\end{aligned}$$

说明其结果是一个矢量，如用 $\vec{b}$ 表示，则有

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\mathbf{T}=\vec{b}\\ \vec{b}=b_j\vec{e}_j \qquad b_j=a_iT_{ij} \qquad (i,j=1\sim3)\end{cases} \tag{1-44}$$

(2) 矢量右点乘二阶张量

$$\mathbf{T}\cdot\vec{a}=(\vec{e}_1\vec{T}_1+\vec{e}_2\vec{T}_2+\vec{e}_3\vec{T}_3)\cdot(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)$$

利用 $\vec{T}_i\cdot\vec{e}_j=T_{ik}\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j=T_{ik}\delta_{kj}=T_{ij}$ 关系上式可变为：

$$\mathbf{T}\cdot\vec{a}=\vec{e}_iT_{ij}a_j=T_{ij}a_j\vec{e}_i$$

其结果仍是一个矢量，但其分量与式 (1-44) 不同，若用 $\vec{c}$ 表示，则有：

$$\begin{cases}\mathbf{T}\cdot\vec{a}=\vec{c}\\ \vec{c}=C_i\vec{e}_i, C_i=T_{ij}a_j \qquad (i,j=1\sim3)\end{cases} \tag{1-45}$$

由此可知，在一般情形中

$$\vec{a}\cdot\mathbf{T}\neq\mathbf{T}\cdot\vec{a}$$

但存在有

$$\mathbf{T}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\mathbf{T}^T \tag{1-46}$$

式 (1-46) 中 $\mathbf{T}^T$ 是 **T** 的转置张量（只有二阶张量才有转置张量）。它的转置方法类同方阵，只需改变其分量的下标顺序即可，若原张量记为 $\mathbf{T}=T_{pq}\vec{e}_p\vec{e}_q$，则其转置张量为 $\mathbf{T}^T=$

$T_{qp}\vec{e}_p\vec{e}_q$。从而有

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\mathbf{T}^T&=(a_k\vec{e}_k)\cdot(T_{qp}\vec{e}_p\vec{e}_q)\\&=a_kT_{qp}\delta_{kp}\vec{e}_q\\&=a_kT_{qk}\vec{e}_q\\&=T_{ij}a_j\vec{e}_i=\mathbf{T}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

这就证明了式（1-46）成立。

结论：矢量与二阶张量的点乘结果是另一个新的矢量。因此，二阶张量可作为一种变换算子，将一个矢量变换成为另一个矢量。

（3）矢量左叉乘二阶张量

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\mathbf{T}&=a_i\vec{e}_i\times T_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\\&=a_iT_{jk}(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\vec{e}_k\\&=a_iT_{jk}(e_{ijl}\vec{e}_l)\vec{e}_k\\&=a_iT_{jk}e_{ijl}\vec{e}_l\vec{e}_k\end{aligned}\tag{1-47}$$

其结果是另一个二阶张量。

（4）矢量右叉乘二阶张量

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\times\vec{a}&=T_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\times a_i\vec{e}_i\\&=a_iT_{jk}\vec{e}_je_{kil}\vec{e}_l\\&=a_iT_{jk}e_{kil}\vec{e}_j\vec{e}_l\end{aligned}\tag{1-48}$$

其结果也是一个新的二阶张量。

综上所述，矢量与张量点乘或叉乘时，均先将张量写成并矢式，而后将点积或叉积符号限于对其相邻的两矢量间进行运算。

5. 张量的外积（并积）　张量的增阶

两个同维不同阶（或同阶）的张量 **A** 和 **B** 的并积 **T** 是一个阶数等于 **A** 与 **B** 阶数总和的高阶张量。

设
$$\mathbf{A}=A_{ijk}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k,\qquad \mathbf{B}=B_{lm}\vec{e}_l\vec{e}_m$$
则
$$\begin{cases}\mathbf{T}=\mathbf{AB}=T_{ijklm}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l\vec{e}_m\\ T_{ijklm}=A_{ijk}B_{lm}\end{cases}\tag{1-49}$$

应当指出，式（1-49）中的指标和并写基矢量的顺序不能任意调换。

鉴于 **A**，**B** 是张量，则可由式（1-35）的变换规律得到

$$\begin{aligned}A'_{ijk}B'_{lm}&=(\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}A_{pqr})(\beta_{l's}\beta_{m't}B'_{st})\\&=(\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}\beta_{l's}\beta_{m't})A_{pqr}B_{st}\\&=\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}\beta_{l's}\beta_{m't}T_{pqrst}\end{aligned}$$

从而有：
$$T'_{ijklm}=A'_{ijk}B'_{lm}=\beta_{i'p}\beta_{j'q}\beta_{k'r}\beta_{l's}\beta_{m't}T_{pqrst}$$

这就证实了 **T** 是 5 阶张量。

推广到一般情况，在同维空间中，一个 m 阶张量与一个 n 阶张量的外积（并积）是一个具有（$m+n$）阶张量，这种现象叫做张量增阶。

对张量求偏导数时，如果自由指标增加也会出现增阶。如标量 ϕ 是零阶张量，其偏导数 $\phi_{,i}$ 则是一阶张量；矢量 $\vec{v}$ 是一阶张量，其分量为 v_i（$i=1\sim3$），其偏导数 $v_{i,j}$ 则是二阶张量；二阶张量 T_{ij} 的偏导数 $T_{ij,k}$ 是三阶张量，$T_{ij,kl}$ 是四阶张量；设 T_{i_n} 是 n 阶张量分量，它的三阶偏导数 $T_{i_n,jkl}$ 则是（$n+3$）阶张量。

读者可利用张量定义自行证明张量的偏导数是一个高阶张量，即出现增阶。

须要指出的是对上述张量求导的下标是自由标时才出现增阶。

6. 张量的内积　张量降阶（缩并）

张量的内积，可用矢量的点乘符号表示，如 **A**、**B** 为两个二阶张量，

$$\mathbf{A} = A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j, \qquad \mathbf{B} = B_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l$$

则其单点积

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)\cdot(B_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l)\\ &= A_{ij}B_{kl}\vec{e}_i\delta_{jk}\vec{e}_l\\ &= A_{ij}B_{jl}\vec{e}_i\vec{e}_l\end{aligned}$$

其结果为另一张量，若用 **C** 记之，则

$$\begin{cases}\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_{ij}B_{jl}\vec{e}_i\vec{e}_l = C_{il}\vec{e}_i\vec{e}_l\\ C_{il} = A_{ij}B_{jl}\end{cases} \tag{1-50}$$

可见 **A** 与 **B** 单点积的结果仍是一个张量，从上式看，其阶数（=2）比起它们的外积阶数（=4）要低二阶，显然这是在求单点积过程中，出现了一对哑标，导致了阶数的减少，这种现象称为张量的降阶或缩并。

张量的点积还有双点积或多点积的运算，双点积又可分为串双点积和并双点积，分别定义如下（仍以上述 **A** 与 **B** 两张量为例）：

串双点积的两次点积以其最相近两个矢量开始按"内内，外外"顺序进行，如：

②

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{B} &= (A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)\cdot\cdot(B_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l)\\ &= A_{ij}B_{kl}\delta_{kj}(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_l)\\ &= A_{ij}B_{kl}\delta_{kj}\delta_{il}\\ &= A_{ij}B_{ji}\end{aligned} \tag{1-51}$$

①

并双点积的两次点积以其相乘的两个并矢中矢量位置的先后按"前前，后后"顺序进行，如

①

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:\mathbf{B} &= (A_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j):(B_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l)\\ &= A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}(\vec{e}_j\cdot\vec{e}_l)\\ &= A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\\ &= A_{ij}B_{ij}\end{aligned} \tag{1-52}$$

②

式（1-51）或式（1-52）的运算过程中均出现两对哑标，故缩并两次，比外积 **AB** 的阶数低 4 阶，故双点积 **A**・・**B** 或 **A**：**B** 结果为标量。

由此可见，点积运算过程，每出现一对哑标，就缩并一次，且比其外积的阶数降二阶。

在古典弹性理论中，应变能密度 W（标量）可用应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的两次并双点积表示。如：

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

其中 $\mathbf{E}=E_{ijkl}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l$ 为弹性张量。

二、商法则

利用内积运算可以引出另一个颇为方便地判别一个变量系是否为张量的准则——商法则，这比按张量定义用式（1-37）和式（1-38）要简单得多。

设 A_{i_m} 是 m 阶张量的分量，B_{j_n} 是 n 阶张量的分量，若下列关系式成立：

$$A_{i_m} = T_{i_m j_n}B_{j_n} \tag{1-53}$$

则可以肯定 $T_{i_m j_n}$ 是一个张量的分量，且是具有（$m+n$）阶张量的分量，这种判定张量的准则叫商法则，证明如下：

因为 A_{i_m} 和 B_{j_n} 是张量

所以

$$A'_{i_m} = T'_{i_m j_n}B'_{j_n} \tag{a}$$

和

$$\begin{aligned} A'_{i_m} &= \Pi\beta_{i'_m k_m}A_{k_m} = \Pi\beta_{i'_m k_m}(T_{k_m l_n}B_{l_n}) \\ &= \Pi[\beta_{i'_m k_m}T_{k_m l_n}(\Pi\beta_{j'_n l_n}B'_{j_n})] \\ &= \Pi\beta_{i'_m k_m}\beta_{j'_n l_n}T_{k_m l_n}B'_{j_n} \end{aligned} \tag{b}$$

式（b）中，B'_{j_n} 是 B_{l_n} 在某种坐标变换后得到的，因而它是任意的，则从式（a）和（b）相等的关系可得到：

$$T'_{i_m j_n} = \Pi\beta_{i'_m k_m}\beta_{j'_n l_n}T_{k_m l_n}$$

因而证得 $T_{i_m j_n}$ 是（$m+n$）阶张量。

例：已知 σ_{ij} 是二阶应力张量，ε_{ij} 是二阶应变张量，且存在有关系式 $\sigma_{ij}=d_{ijkl}\varepsilon_{kl}$，则由商法则可知，$d_{ijkl}$ 是具有四阶的弹性（系数）张量分量。

第四节　常用的特殊张量

1. 零张量

全部分量为零的张量，记为 **O**，零张量在任何坐标系中的分量皆为零，以二阶张量为例，若

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}，则\ T_{ij} = 0，且\ T'_{ij} = 0 \tag{1-54}$$

2. 单位张量

分量为 δ_{ij} 的二阶张量，记为 **I**，即

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_3 = \vec{e}_i\vec{e}_i$$

若记 $\mathbf{I}=I_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$，$I_{ij}=\delta_{ij}$，则可证明在坐标变换后的分量 I'_{ij} 仍等于 δ_{ij}，说明单位张量是不随坐标变换而改变的张量。证明如下：

$$I'_{ij} = \beta_{i'k}\beta_{j'l}I_{kl} = \beta_{i'k}\beta_{j'l}\delta_{kl}$$