[苏] А.Н.ТИХОНОВ А.Б.ВАСИЛЬЕВА А.Г.СВЕШНИКОВ 著
张德荣 译

微分方程

高等教育出版社

微 分 方 程

[苏] А.Н. Тихонов А.Б. Васильева
А.Г. Свешников 著
张 德 荣 译

高 等 教 育 出 版 社

内容提要

本书根据А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников《Дифференциальные Уравнения》(Москва《Наука》, 1980)译出。原书是莫斯科大学物理系教材《Курс высшей математики и математической физики》(高等数学与数学物理教程)丛书的第七卷，专讲常微分方程和一阶偏微分方程的理论.原书经苏联高等与中专教育部批准作为大学物理专业与应用数学专业学生的教科书.

本书可供高等学校数学系应用数学专业，物理系有关专业作为教材或教学参考书.

本书的原书获1980年苏联国家奖.

微分方程

[苏] А.Н. Тихонов А.Б.Васильева

А.Г. Свешников 著

张德荣 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防出版社印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张8.5 字数205 000

1990年7月第1版 1990年7月第1次印刷

印数 00 001—2 150

ISBN 7-04-000251-5/O·282

定价 2.10 元

丛书编者说明

本书是《高等数学与数学物理教程》丛书第七卷，专讲常微分方程和一阶偏微分方程理论。书的开头列举了导出各种类型微分方程的物理例子。以后讲述初值问题，同时还讲述边值问题和斯图姆-刘维尔问题，研究这些问题对于解决数学物理问题有重大意义。

对解微分方程的渐近方法和数值方法的基本概念，基本思想和基本定理都予以足够重视。

原　　序

本书系 А.Н.Тихонов,В.А.Ильин,А.Г.Свешников 所主编的《高等数学与数学物理教程》丛书中的一卷。

作者多年在国立莫斯科大学物理系讲课的讲义是本书的基础。本书的叙述与物理及应用数学未来专家所需要的微分方程理论的现状相适应，同时又是初等的内容。

对于使用数值方法和渐近方法研究微分方程并求出其近似解，书中相当重视。这些方法都是现在研究物理现象的数学模型的基础。读者将获得使用各种数值方法解初值问题和边值问题的知识，学到数值方法理论中差分格式的收敛性，逼近以及稳定性等基本概念。在专讲渐近方法的一章里，特别包含了奇异摄动理论方面的知识（边界函数方法，ВБК方法（第七章§2，第3小节），平均方法）。近数十年来，由于自动控制理论，流体动力学，量子力学，动力学以及非线性振动理论等物理和技术各分支的要求，奇异摄动理论有着飞速的发展。

（下略）

作　者

1979年

目　　录

第 一 章

引 论

§1. 微分方程*) 的概念

本书讨论的微分方程是未知函数及其导数以及自变量之间的关系式，如果方程中包含对多个自变量的偏导数，则称此方程为偏微分方程。仅包含对一个自变量的导数的方程，称为常微分方程。研究常微分方程的性质及其解法，是本书的基本内容，仅在最后一章涉及某些特殊类型的偏微分方程。

通常用字母 x（或字母 t，在大多数情况用 t 表示时间）表示常微分方程中的自变量，而用$y(x)$表示其未知函数。

常微分方程可用形如

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \tag{1.1}$$

的关系式来表示。

在常微分方程（1.1）中，除了自变量x，未知函数y，以及未知函数对自变量的各阶导数以外，还可以出现另外一些变量，如$\mu_1,\cdots,\mu_k$等。这时就说未知函数还依赖于参变量$\mu_1,\cdots,\mu_k$。

出现于方程（1.1）中最高阶导数的阶称为微分方程的阶。一阶方程具有形式

---

*)本书中所说的微分方程(或方程)，除第八章外，均指常微分方程。——译者注

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1.2}$$

它是联系着自变量，未知函数和未知函数的导数等三个变量的关系式。有时，此种关系可以改写为

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.3}$$

的形式。方程（1.3）称为已经解出导数的一阶方程。我们从方程（1.3）开始研究常微分方程的理论。

微分方程（1.1）—（1.3）中仅有一个未知函数，与此同时，在微分方程理论中，还研究微分方程组。已经解出导数的一阶方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_n)\quad(i=1,\cdots,n), \tag{1.4}$$

称为正规形方程组.

引入向量值函数

$$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n),\quad \boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n),$$

就可以把方程组（1.4）写成向量形式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}). \tag{1.5}$$

显而易见，已经解出最高阶导数的 n 阶方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{1.6}$$

可以化为正规形方程组。事实上，引入记号

$$y(x)=y_1(x),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}=y_2(x),\quad \cdots,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n(x), \tag{1.7}$$

并利用易于导出的等式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{dy_n}{dx},$$

就可以让方程（1.6）和正规形方程组

$$\begin{aligned}&\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\&\cdots\cdots\\&\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\&\frac{dy_n}{dx}=f(x,y_1,\cdots,y_n)\end{aligned}\tag{1.8}$$

相对应。

我们认为方程（1.1）—（1.5）中的自变量都是实的，至于未知函数，可以是实变量的实值函数也可以是实变量的复值函数。

若用$\bar{y}(x)$和$\bar{\bar{y}}(x)$分别表示函数$y(x)$的实部或虚部，即

$$y(x)=\bar{y}(x)+i\,\bar{\bar{y}}(x),\tag{1.9}$$

则方程（1.3）等价于关于实函数的常微分方程组

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{y}}{dx}=\mathrm{Re}f(x,\ \bar{y},\ \bar{\bar{y}}),\\&\frac{d\bar{\bar{y}}}{dx}=\mathrm{Im}f(x,\ \bar{y},\ \bar{\bar{y}}).\end{aligned}\tag{1.10}$$

如果把函数 $y_i(x)$（$i=1$，…，n）代入方程组（1.4）能使（1.4）变成恒等式，就把这些函数的整体称为方程组（1.4）的解。如果微分方程可解，一定有无穷多个解。这种规律也可通过

下面的例子（见§2）而看出。寻求微分方程的解的过程，称为积分微分方程。

当自变量x和未知函数 y_i 在某个区域D内变化时，如果方程组（1.4）的右端都是连续函数，显然，这时解本身是连续可微函数。通常我们研究的就是这样的方程组。但是在应用中，常常还需要研究右端函数有间断点的微分方程（例如，当求解集中载荷，瞬时作用力等问题时），所以解的导数也可能有间断点。于是自然把有分段连续导数的连续函数$y_i(x)$作为（1.4）的解。当把这些解代入微分方程时，除了在导数的间断点（可能没有间断点）外，它们是处处可微的。

使用几何学的观点，可以把方程（1.4）的每一组解 $y_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 看作由变量 $x,y_1,\cdots,y_n$ 所组成的$n+1$维空间的曲线，并把它称为积分曲线。由变量$y_1,\cdots,y_n$所组成的子空间，称为相空间，而积分曲线在相空间的射影，则称为相轨线。

方程组（1.4）在区域D的每一点，用向量$\tau=(1,f_1,\cdots,f_n)$决定了某一方向。在每一点给出了方向的空间区域，称为方向场。使用几何观点，就把求方程组（1.4）的解说成是找出一条曲线，使其每点的切线的方向和此方向场的方向τ重合。

如上所述，微分方程一般有无穷多个解。所以求方程组（1.4）的解，就在（1.4）右端有定义的区域内找出了无穷多条积分曲线.为了从所有解的总体中选出个别称为特解的积分曲线，还需要给出附加条件。多数情况下，此种附加条件是初值条件

$$y_i(x_0)=y_i^0 \quad (i=1,\cdots,n), \tag{1.11}$$

此条件决定了变量 $x,y_1,\cdots,y_n$的$n+1$维空间中的点，所求积分曲线恰好经过此点。

求微分方程（1.4）满足初值条件（1.11）的解的问题称为初值问题或柯西问题。

在一个方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1.12)$$

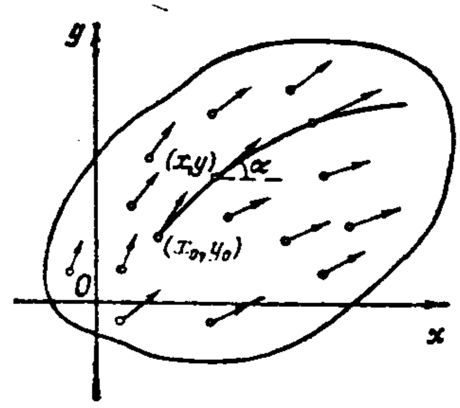

图 1.

这一最简单的情况，如果在平面(x,y)的区域D给出了方程(1.12)的右端，则$f(x,y)$在此区域确定了方向场. 在区域D的每一点以斜率为$f(x,y)$ ($\mathrm{tg}\alpha=f(x,y)$)的向量$\tau(x,y)$来给出此方向场（见图1）.

这时，求满足条件$y(x_0)=y_0$的初值问题的解，就是经过初始点(x_0, y_0)，在区域D内作积分曲线，且在每一点都使此积分曲线和以$f(x,y)$为斜率的向量τ相切。

这种几何直观给出下列明显的结论。

引理（卡普雷金引理） 如果在平面(x, y)的区域D，关于微分方程

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y), \quad \frac{dy_2}{dx}=f_2(x,y)$$

的初值问题都唯一地可解，且微分方程的右端及其初始条件满足不等式

$$f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y), \qquad (1.13)$$

$$y_1(x_0)\leqslant y_2(x_0), \qquad (1.14)$$

则对应柯西问题的解$y_1(x)$和$y_2(x)$在区域D处处满足条件

$$y_1(x)\leqslant y_2(x). \qquad (1.15)$$

还可使用其他方式提供附加条件，以便选出方程组（1.4）的某些特解，它们是：边值问题，要求在解有定义的区域内某些不同的点都满足附加条件以选出特解；特征值问题，确定方程中某些参数的值，使得方程满足附加要求的特解存在；还有寻找周

期解的问题，以及一系列其它问题，只要问题的提法能够唯一地选出方程满足要求的特解。

§2. 导出微分方程的物理问题

本节引入一系列典型的物理和力学问题，使用数学模型的方法讨论这些问题，就导致对微分方程的研究。

1. 放射衰变

放射衰变过程的物理规律说明：衰变的速度为负数且和此刻尚未衰变物质的量成比例，比例系数 a 为不依赖于时间的常量，由特定的物质所确定，称为衰变系数，放射衰变定律的数学表达式为

$$\frac{dm}{dt} = -am(t), \tag{1.16}$$

其中 $m(t)$ 为时刻 t 尚未衰变物质的量．此关系式是已解出导数的一阶微分方程。

直接检验易于证实（1.16）的解形如

$$m(t) = Ce^{-at}, \tag{1.17}$$

其中 C 为任意常数，它能用附加条件来决定，例如已给初始时刻 t_0 时，原有物质的量 m_0，则初值条件 $m(t_0) = m_0$ 就能决定常数 C。对应的初值问题的解为

$$m(t) = m_0 e^{-a(t-t_0)}. \tag{1.18}$$

放射衰变过程的重要物理特征之一是它的半衰期，即经过一段时间间隔 T 以后，有一半数量的物质已经衰变．由(1.18)导出

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-aT},$$

故得半衰期

$$T=\frac{1}{a}\ln 2. \tag{1.19}$$

注意，方程（1.16）不仅是放射衰变过程的数学模型，只要分裂（繁殖）速度和此瞬间物质数量成比例，且比例系数为刻画所讨论过程的常数，则方程(1.16）也是研究具有此种特征的各种分裂（繁殖）过程的数学模型．如上所述，对此类方程所提出的典型问题是初值问题（柯西问题）。

2. 质点系的运动

理论力学中讨论过质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$的N个质点系的运动，它的数学模型是由牛顿第二定律导出的运动方程

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i\left(t,\ \boldsymbol{r}_j,\ \frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt}\right)\quad(i,j=1,\cdots,N). \tag{1.20}$$

此处$\boldsymbol{r}_i$为质点的向径，$\boldsymbol{F}_i$为作用于第i个质点的力向量，一般来说，它依赖于时间，第 i 个质点的坐标，系统各质点相互位置以及它们的速度．方程组（1.20）是N个二阶向量方程构成的方程组．如果质点的质量在运动过程不变，则用 x_i, y_i, z_i 表示向径$\boldsymbol{r}_i$的坐标，并引入新的变量 $v_{ix}=\frac{dx_i}{dt}$, $v_{iy}=\frac{dy_i}{dt}$, $v_{iz}=\frac{dz_i}{dt}$（第i个质点速度向量的分量），就可以把（1.20）写成$6N$个一阶方程组成的正规形方程组。

$$\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=v_{ix},\quad \frac{dy_i}{dt}=v_{iy},\quad \frac{dz_i}{dt}=v_{iz},\\ &\frac{dv_{ix}}{dt}=\frac{1}{m_i}F_{ix},\ \frac{dv_{iy}}{dt}=\frac{1}{m_i}F_{iy},\ \frac{dv_{iz}}{dt}=\frac{1}{m_i}F_{iz}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

求解方程组(1.21)的复杂程度，主要由其右端，即力向量的分量对变量 $t,x_i,y_i,z_i,v_{ix},v_{iy},v_{iz}$的函数依赖关系而决定．大多

数情况，只能使用数值方法，通过电子数字计算机才能按预定精确度求出方程组的特解在若干点的值。

关于方程组（1.21）的典型问题是初值问题，即已知上列方程组的右端（已给作用于系统的外力，以及各点之间相互的作用力），根据在初始时刻 t_0时，已给系统所有质点的位置和速度

$$\boldsymbol{r}_i(t_0)=\boldsymbol{r}_i^0,\quad \boldsymbol{v}_i(t_0)=\boldsymbol{v}_i^0 \tag{1.22}$$

来决定质点的运动轨线。关于方程组（1.21）的另一典型问题是边值问题，即在相空间内决定经过已给始点和终点的轨线问题。特别，当计算自地球至月球或其他星球的宇宙飞船的轨道时，就要解决此类问题。

在一系列情况下，还需要研究决定方程组（1.21）特解的其他一些提法。

方程组（1.20）的一个重要特殊情况是物理摆的振动方程。如果某一刚体能在地心引力作用下，绕不通过重心 C 且保持不动的水平轴线而旋转，则称它为**物理摆**（图 2）。

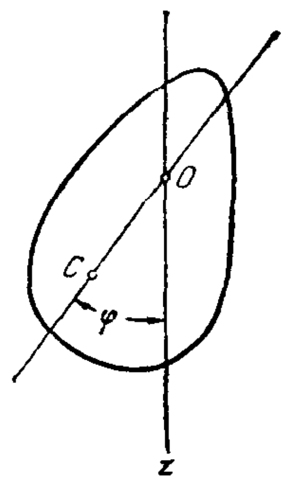

图 2.

用垂直于转动轴线且经过重心的平面和此物体相截，并在截面上讨论. 设转动轴线和此截面的交点为O，经过点O的垂直轴线 Oz 和直线OC之间的夹角为φ。显然，物理摆的位置由角 φ 而决定。为了导出它的运动方程，把牛顿第二运动定律用于旋转运动（角加速度和外力的主矩成正比例），并忽略阻力，即得

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mgd\sin\varphi, \tag{1.23}$$

其中 I 为物体关于旋转轴的转动惯量，而 d 为由点O至重心C的距离。

物理摆的振动方程（1.23）一般为非线性方程。在小振动情况，仅限于用$\sin\varphi$展开式中的首项φ，则得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0, \tag{1.24}$$

其中ω^2表示比值 $\omega^2=mgd/I$。显然，量纲 $[\omega]=1/C$，这证明上面引入的记号是正确的。注意，在方程（1.24）的情况，恢复力正比于偏离平衡位置的位移。

直接验证易于判明方程（1.24）有频率为ω的周期解

$$\varphi(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t, \tag{1.25}$$

其中A,B为任意常数，决定周期振动的振幅。

考虑到和角速度成比例的阻力，方程（1.24）变成形如

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\alpha\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0 \tag{1.26}$$

的方程。

下面（见第三章）将指出，方程（1.26）决定阻尼振动。

3. 迁移方程

设管道的轴线和x轴相重合，其横截面固定，且沿此管道有气体流动，在管道轴线上的点x，于时刻t的速度为已知函数$v(x,t)$。若气流传送某种物质，在坐标为x的截面，于时刻t此物质的线浓度用$u(x,t)$表示。在传送过程，物质向管壁沉淀。认为沉淀物质的浓度由表达式$f(x,t)u(x,t)$（$f(x,t)$为已知函数）给出，即正比于物质的浓度（可以把这看作当u足够小时，某种更为复杂的规律的线性近似）。这表示在时间区间$[t,t+\Delta t]$沉淀于由坐标为x和$x+\Delta x$的截面之间的物质量由

$$\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}f(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

给出.

为了导出关于u的微分方程，讨论在坐标为x和$x+\Delta x$两截面所围区域物质的平衡. 当速度v足够大时，自然不考虑扩散过程.

在时间Δt内，上述讨论范围物质的改变量等于

$$\int_x^{x+\Delta x}[u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)]d\xi.$$

此改变量首先由经过截面x而流入的物质

$$\int_t^{t+\Delta t}v(x,\tau)u(x,\tau)d\tau$$

和经过截面 $x+\Delta x$ 所流出的物质

$$\int_t^{t+\Delta t}v(x+\Delta x,\tau)u(x+\Delta x,\tau)d\tau$$

的差，其次，还由沉淀于管壁的物质减少的量

$$-\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}f(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

来决定. 于是由质量守恒定律可得

$$\int_x^{x+\Delta x}[u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)]d\xi=$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}[v(x,\tau)u(x,\tau)-v(x+\Delta x,\tau)u(x+\Delta x,\tau)]\,d\tau-$$

$$-\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}f(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{1.27}$$

假定所讨论的函数都有连续的偏导数，对于积分号下的表达式使用有限增量定理和积分中值定理，就导出

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x^*,t)\Big|_{t=t^*}\Delta x\Delta t=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}(v(x,t^{**})u(x,t^{**}))\Big|_{x=x^{**}}\Delta x\Delta t-$$

$$-f(x^{***},t^{***})u(x^{***},t^{***})\Delta x\Delta t, \tag{1.28}$$