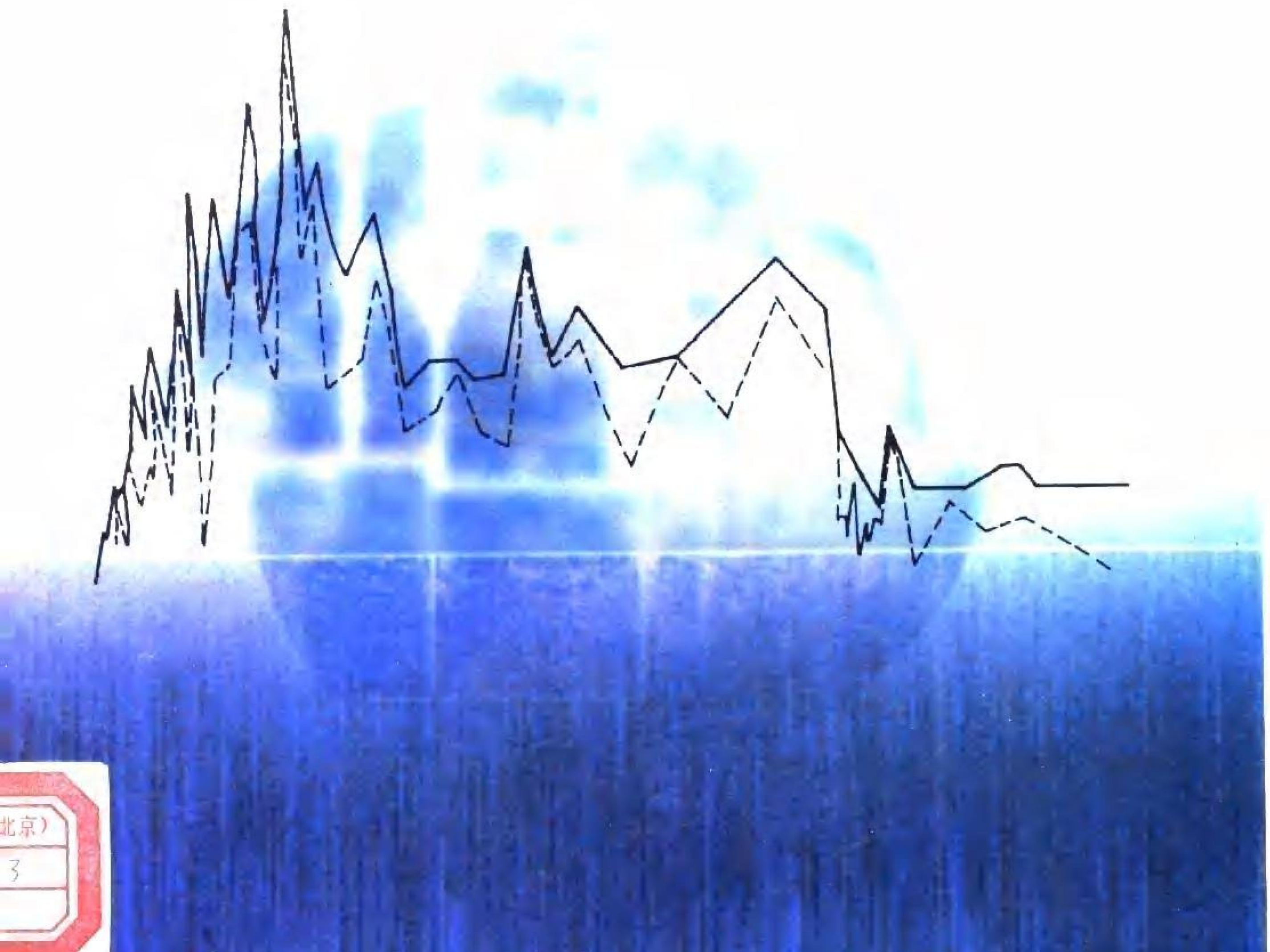
地震波理论

同济大学出版社



地震波理论

徐仲达 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书在系统介绍弹性波动力学基本理论的基础上，详细讨论了时谐平面波和平面脉冲波在界面处和分层介质中的反射和透射问题，叙述了平面波记录和点源合成记录的计算，介绍了线性粘弹性介质和各向异性介质中的基本理论。

本书可作为应用地球物理专业本科生和硕士研究生的教材，也可供从事地震勘探专业的研究人员和工程技术人员参考。

责任编辑　郁　峰

封面设计　陈益平

地 震 波 理 论

徐仲达　编著

同济大学出版社出版

（上海四平路 1239 号）

新华书店上海发行所发行

常熟市文化照相制版彩印厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：14.5　字数：370 千字

1997 年 7 月第 1 版　　1997 年 7 月第 1 次印刷

印数 1－800　　定价：28.00 元

ISBN7－5608－1838－2/0·158

前　言

地震波理论是地震学和地震勘探的理论基础。随着勘探技术的深入与发展，对地震波理论的深入理解变得更为迫切。本书既系统叙述了弹性波动力学的经典理论，又介绍了关于波在线性粘弹性介质和各向异性介质中传播的一些基本理论。

作者长期为应用地球物理专业本科生讲授"弹性波场"课程，为硕士研究生讲授"地震波理论"课程。本书就是结合作者长期的科研成果在此两门授课讲义的基础上编写而成的。

本书第一章用直角坐标张量作为工具，系统地介绍了线性弹性动力学。第二章介绍了弹性波在无限均匀介质中传播时的一些基本理论。第三章叙述了时谐平面波在界面处的反射和折射，并介绍了当前地震勘探采用的 AVO 技术有关的理论基础。第四章讨论了弹性波在分层介质中的特点，并介绍了平面波合成记录的计算方法。第五章在介绍球面波反射和折射的严格数学理论和物理特征的基础上讨论了点源合成记录和点源平面波分解及其相互联系。前五章涉及的是弹性波传播的基本问题。第六章在介绍线性粘弹性模型的基础上讨论了线性粘弹性波在无限介质及遇到界面时的物理特征。第七章是根据当前多波地震勘探所遇到的问题着重介绍横向各向同性介质中波的传播特征，并简单介绍方位各向异性介质和正交各向异性介质中波的传播性质。

在编写本书的过程中，得到了中科院院士马在田教授和同济大学海洋地质与应用地球物理系地震教研组教师的鼓励和帮助，谨在此表示衷心感谢！

作者希望本书为应用地球物理专业的本科生和硕士研究生学习地震波理论提供一本较完整的入门教材，也对从事地震勘探生产实践和科研的人员有所帮助。由于作者水平有限，错误与不妥之处，恳请读者指正。

徐仲达

1996 年 9 月于同济大学

目　录

第一章　线性弹性动力学导论 …… 1

第一节　直角坐标张量 …… 1
第二节　应力分析 …… 5
第三节　应变分析 …… 15
第四节　应力和应变的关系 …… 21
第五节　运动方程及基本初值-边值问题 …… 26
第六节　线性弹性动力学中的几个原理 …… 27

第二章　弹性动力学的基本波 …… 30

第一节　基本体波 …… 30
第二节　体波类型 …… 33
第三节　时谐体波 …… 36
第四节　体力产生的波动 …… 37

第三章　时谐波在界面处的反射和折射 …… 49

第一节　P 波和 SV 波在弹性半空间界面的反射 …… 49
第二节　SH 波在弹性半空间界面上的反射 …… 65
第三节　P 波和 SV 波在界面处的反射和折射 …… 68
第四节　SH 波在界面处的反射和折射 …… 75
第五节　反射系数随入射角的变化 …… 78

第四章　弹性波导中的波 …… 82

第一节　无限平板中的波 …… 82
第二节　SH 波在层中的能流 …… 83
第三节　乐夫波 …… 86
第四节　分层介质中的波 …… 88
第五节　固体多层介质的平面波合成记录 …… 101

第五章　球面波的反射和折射 …… 106

第一节　球面波 …… 106
第二节　最速降落法 …… 110
第三节　反射波场的分析 …… 110
第四节　侧面波 …… 114
第五节　球面波的折射 …… 119
第六节　点源合成记录与平面波分解 …… 123

第六章　线性粘弹性介质中的波 …… 130

第一节　线性粘弹性模型 …… 130

第二节　线性粘弹性介质中的能量和平面波 …… 135

第三节　SH 波的反射和透射 …… 147

第四节　P 波和 SV 波的反射和透射 …… 158

第七章　各向异性介质中的波 …… 169

第一节　横向各向同性介质中波的特征 …… 169

第二节　细密分层介质的宏观横向各向同性 …… 175

第三节　弱 TI 介质和椭圆各向异性中波的特征 …… 185

第四节　TI 介质中波的反射和透射 …… 196

第五节　TI 介质的一些地震特性 …… 202

第六节　方位各向异性介质中的波 …… 208

第七节　正交各向异性介质中的波 …… 215

参考文献 …… 223

第一章　线性弹性动力学导论

第一节　直角坐标张量

一、张量场的引出

标量场是场值随位置而变、可有正、负值、但没有方向的数学场，它的基本性质是在坐标变换下场值保持不变，因此又称为不变量；向量场是一个相应于每点既有大小、又有方向的数学场，同一个向量，在不同坐标系中，有不同的分量。

梯度 $\Delta\varphi$ 是某点的标量 φ 沿任意方向的变化率(或称微分)；散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 是某点的向量的标量空间微分，它是向量沿各坐标轴微分之和；旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是某点的向量 $\boldsymbol{A}$ 的向量空间微分，它与向量沿各坐标轴的微分有确定的关系。但是 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 都不足以确定某点向量沿任意方向的微分(或变化率)。

现在我们来研究空间某点 P 处的向量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意方向的变化率，如图 1.1.1 所示，P′是在任意方向 $\boldsymbol{C}$ 上与 P 点邻近的任意点，其向量为 $\boldsymbol{A}'$ 。令 $\mathrm{PP}'=\Delta\boldsymbol{C}$ 则向量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意方向 $\boldsymbol{C}$ 的微分为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{C}}=\lim_{\mathrm{PP}'\to0}\frac{\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}}{\mathrm{PP}'}$$

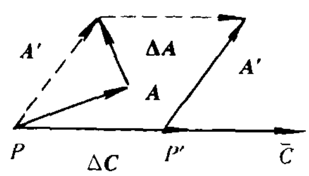


图 1.1.1

设 PP′在直角坐标各轴的投影为 $\Delta x,\Delta y$ 与 Δz，则在略去高阶微量后，有

$$\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\Delta z$$

此式代入上式，且考虑 $\Delta x/\Delta C=\cos(x,\boldsymbol{C})=l,\Delta y/\Delta\boldsymbol{C}=\cos(y,\boldsymbol{C})=m,\Delta z/\Delta\boldsymbol{C}=\cos(z,\boldsymbol{C})=n$，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{C}}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}l+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}m+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}n$$

令向量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标上的投影为 A_x,A_y 和 A_z，得

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial C}=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)l+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

因此，要确定某点向量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意方向的微商，必须有九个分量。

我们先不加证明地引出张量的概念。直角坐标有三个轴，标量仅有一个值(3^0)，称为零阶张量，向量有三个分量(3^1)，称为一阶张量，而研究向量沿某一方向的变化率，必须有九个分量(3^2)，称为二阶张量。推而广之，令 r 表示维数，n 表示张量的阶数，则要用 r^n 个分量才能确定的量称为 n 阶 r 维张量。

从所用的坐标来说，在直角坐标系中的张量，称为直角坐标张量，在斜坐标系中的张量，称为斜坐标张量，在正交坐标系中的张量，称为正交曲线坐标张量，在一般坐标曲线坐标系中的张量，称为普通张量。下面仅讨论直角坐标张量的基本知识。

二、直角坐标张量(笛卡尔张量)

1. 符号与求和习惯

高阶张量是具有许多分量的复杂整体。为使张量的表示和运算简便，有必要引入相应的符号和习惯。现在用 x_1, x_2, x_3 代替直角坐标系中常用的 x, y, z，或简写为 $x_i(i=1,2,3)$。用 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 代替直角坐标系中常用的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，或简写为 $\boldsymbol{i}_i(i=1,2,3)$。这样，空间坐标为 x_i 的某位置向量可表示为

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{i}_i \tag{1-1-1}$$

如果两个不同的直角坐标系有共同的原点(以下均认为此假定成立)，且采用如下表所示的符号：

	$x = x_1$	$y = x_2$	$z = x_3$
$x^* = x_1^*$	$l_1 = \alpha_{11}$	$m_1 = \alpha_{12}$	$n_1 = \alpha_{13}$
$y^* = x_2^*$	$l_2 = \alpha_{21}$	$m_2 = \alpha_{22}$	$n_2 = \alpha_{23}$
$z^* = x_3^*$	$l_3 = \alpha_{31}$	$m_3 = \alpha_{32}$	$n_3 = \alpha_{33}$

则从一个直角坐标系 x_i 向另一个直角坐标系 x_i^* 的变换是

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \tag{1-1-2}$$

我们采用爱因斯坦(Eistain)求和习惯，规定某一项中如有重复的指标，则该项必须对该指标所有可能的指标值求和。在直角坐标系中，三维空间可能的指标值总是 1,2,3，因而可以省略求和符号 Σ，把(1-1-1)式和(1-1-2)式分别写为

$$\boldsymbol{R} = x_i \boldsymbol{i}_i$$

与

$$x_i^* = \alpha_{ij} x_j \tag{1-1-3}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 中的 i 与(1-1-3)式中的 j 均称为哑指标，因为它们可以用任意其他的字母来代替，不会改变该表达式的值；x_i^* 中的 i 称为自由标。

2. 向量变换定律

这里，我们从坐标变换的角度引出笛卡尔张量的定义。首先研究向量的分量在直角坐标变换下是如何变化的。在直角坐标系中，各坐标轴互相正交，所以有

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij} \tag{1-1-4}$$

且有
$$\alpha_{ij} = \boldsymbol{i}_i^* \cdot \boldsymbol{i}_j \tag{1-1-5}$$
而 $\boldsymbol{i}_j$ 和 $\boldsymbol{i}_i^*$ 分别是直角坐标系 x_i 和 x_i^* 中的基向量，δ_{ij}是克朗尼科(Kronecker)函数。

我们知道，变换(1-1-3)的逆是
$$x_i = \alpha_{ji} x_j^* \tag{1-1-6}$$

现在，假定向量 $\boldsymbol{A}$ 在坐标系 x_i 和 x_i^* 中的分量分别为 a_i 和 a_i^*，据向量本身在各坐标系中保持不变的性质，有
$$\boldsymbol{A} = a_i^* \boldsymbol{i}_i^* = a_j \boldsymbol{i}_j$$
取向量 $\boldsymbol{A}$ 与单位向量 $\boldsymbol{i}_i^*$ 的标积，据(1-1-5)式得
$$a_i^* = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}_i^* = (a_j \boldsymbol{i}_j) \cdot \boldsymbol{i}_i^* = \alpha_{ij} a_j \tag{1-1-7}$$
同样，取向量 $\boldsymbol{A}$ 与单位向量 $\boldsymbol{i}_i$ 的标积，得
$$a_i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}_i = (a_j^* \boldsymbol{i}_j^*) \cdot \boldsymbol{i}_i = \alpha_{ji} a_j^* \tag{1-1-8}$$
(1-1-7)式和(1-1-8)式表示向量的分量在坐标变换下的变换关系式，称为向量变换定律。显然，它与坐标变换定律(1-1-3)式和(1-1-6)式的形式是相同的。这样，我们得到了向量的代数定义为：向量是由三个分量 $a_i(i = 1,2,3)$组成的量，它在坐标变换下按(1-1-7)式和(1-1-8)式的规律进行变换。实际上，此定义也是一阶笛卡尔张量的精确定义。标量是在任意坐标变换下保持数值不变的量，这也是零阶张量的定义。

3. 笛卡尔张量

下面，我们主要研究二阶张量的一些性质。首先，给出二阶张量的定义：二阶张量是由九个(3^2)分量 $a_{ij}(i,j = 1,2,3)$组成的一个量，它在坐标变换下按下式变换：
$$a_{ij}^* = \alpha_{ip}\alpha_{jq} a_{pq} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1-1-9}$$
其中，a_{ij}和 a_{ij}^* 分别是该张量在坐标系 x_i 和 x_i^* 中相应的分量。如果在(1-1-9)式的两边乘以 $\alpha_{ir}\alpha_{js}$，再对 i,j 求和，可以得到(1-1-9)式的逆变换：
$$\alpha_{ir}\alpha_{js}a_{ij}^* = \alpha_{ir}\alpha_{js}\alpha_{ip}\alpha_{jq}a_{pq} = \delta_{rp}\delta_{sq}a_{pq} = a_{rs} \tag{1-1-10}$$
二阶张量可以用矩阵形式表示，因而，包含向量和二阶张量的某些代数运算可以通过矩阵代数实现。若令矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\boldsymbol{A}^* = (a_{ij}^*)$和 $\boldsymbol{\Lambda} = (\alpha_{ij})$，则乘积 $b_{iq} = \alpha_{ip}a_{pq}$表示矩阵乘积 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Lambda A}$ 的第 i 行第 q 列的元素，而 $b_{iq}\alpha_{jq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}a_{pq}$表示矩阵乘积 $\boldsymbol{B\Lambda}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda A \Lambda}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列的元素。因此，二阶张量变换定律可以写为如下矩阵形式：
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{\Lambda A \Lambda}^{\mathrm{T}} \tag{1-1-11}$$
坐标变换矩阵是正交矩阵，有 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}$，则逆变换定律 $a_{rs} = \alpha_{ir}\alpha_{js}a_{ij}^*$ 可以写为
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{\Lambda} \tag{1-1-12}$$

4. 笛卡尔张量代数

(1) 和：两个 r 阶张量之和是同阶张量，其分量由相应两个张量之和组成。

(2) 外积：两个 r 阶和 s 阶张量的外积是 $r+s$ 阶张量，其分量由这些张量的各分量乘积组成。

(3) 缩并：在 $r(\geqslant 2)$阶张量的分量中，令两个指标相同，再对重复指标求和的运算称为

缩并,且得到 $r-2$ 阶张量。

(4) 内积:两张量在外积后对其中两个指标的缩并称为两个张量的内积。

两个向量的外积的分量是 $a_i b_j (i,j=1,2,3)$。缩并后得内积 $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$。它是两个向量的点积或标积。

两个二阶张量 a_{ij}与 b_{km}的内积有四个二阶张量:

$$d_{ijim} = a_{ij} b_{im} \qquad (\text{对 } i \text{ 求和})$$

$$d_{ijki} = a_{ij} b_{ki} \qquad (\text{对 } i \text{ 求和})$$

$$d_{ijjm} = a_{ij} b_{jm} \qquad (\text{对 } j \text{ 求和})$$

$$d_{ijkj} = a_{ij} b_{kj} \qquad (\text{对 } j \text{ 求和})$$

(5) 商定律:如果一组量 $X_{i_1 i_2 \cdots i_r}$与一个任意的 S 阶张量的外积或内积产生一个相应阶的张量,则 $X_{i_1 i_2 \cdots i_r}$就是 r 阶张量的分量。

对于在任意直角坐标系中由九个分量组成的量 T 来说,若对任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a} \cdot T$ 是一个向量,则 T 是一个二阶张量。

假定在坐标系 x_i 中有 $a_{ij} = a_{ji}$,则在坐标系 $x_i^* (= \alpha_{ij} x_j)$中可得

$$a_{ij}^* = \alpha_{ip} \alpha_{jq} a_{pq} = \alpha_{jq} \alpha_{ip} a_{pq} = a_{ji}^*$$

因而可以得出结论:如果某张量在一个坐标系中是对称的或反对称的,则这种性质在所有其他坐标系中也保持不变,其对应的矩阵即为对称矩阵和反对称矩阵。

5. 二阶张量的主轴

设 t_{ij}是二阶张量 T 的分量,a_j 是向量 $\boldsymbol{A}$ 的分量,则 T 与 $\boldsymbol{A}$ 的内积是一个向量,其分量是 $b_i = t_{ij} a_j$。由于二阶张量的分量是随坐标变换而变的,对应于二阶张量的分量 $t_{ij} (i \neq j)$为零的坐标轴称为该张量的主轴,它必由下式给出:

$$b_i = t_{ij} a_j = \lambda a_i \qquad (i=1,2,3)$$

其中,λ 是标量,其值称为该张量的特征值,a_i 称为张量的特征向量。其非零解仅在下式成立时存在:

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

这是 λ 的三次方程,称为张量的特征方程。因此,特征值就是特征方程的根。

对于实对称张量($t_{ij} = t_{ji}$),张量的特征值均为实数。

张量对称性的另一个重要结论是,根据相应的三个实特征值,总能确定三个相互正交的特征向量。

6. 笛卡尔张量的微分

如果在定义域内的每点处有一个确定的张量,则该定义域内有一个张量场。

零阶张量场就是标量场。令 $\phi(x_i)$表示标量场,则在坐标变换 $x_i^* = \alpha_{ij} x_j$ 或 $x_i = \alpha_{ji} x_j^*$ 下有

$$\phi^*(x_k^*) = \phi(\alpha_{ji} x_j^*)$$

一阶张量场是向量场。令 $a_i(x_p)$表示向量场的分量,则在坐标变换下,有

$$a_i^*(x_k^*)=\alpha_{ij}a_j(x_p)$$

其中,$x_p=\alpha_{qp}x_q^*$。

假定所有张量场连续可导,令某定义域内的标量场 $\phi(x_i)$的偏导为 $\partial\phi/\partial x_i$,在坐标变换下,据链式微分法则,有

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial x_k^*}=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}$$

据反变换 $x_i=\alpha_{ki}x_k^*$ 得 $\partial x_i/\partial x_k^*=\alpha_{ki}$,再令 $a_k^*=\partial\phi^*/\partial k^*$,则上式变为

$$a_k^*=\alpha_{ki}a_i$$

这正是向量变换定律。因此,偏导 $\partial\phi/\partial x_i$ 是向量场的分量。换句话说,$\nabla\phi$ 是一阶张量场。同样,向量 a_i 的偏导 $\partial a_i/\partial x_k$ 形成二阶张量场的分量。

由上述讨论可推得如下定律:r 阶笛卡尔张量场对于坐标 x_i 的偏导是 $r+1$ 阶张量场。应当注意,此定理仅对笛卡尔张量成立,因为在直角坐标系下的坐标变换才是线性变换。

任意阶张量的导数称为张量梯度。我们把张量场对其任一指标的散度定义为相应张量梯度对该指标的缩并。因而,r 阶张量的散度是 $r-1$ 阶张量。例如,向量场的张量梯度 $\partial a_i/\partial x_j$ 的缩并为 $\partial a_i/\partial x_i=\partial a_1/\partial x_1+\partial a_2/\partial x_2+\partial a_3/\partial x_3$。它是向量场的散度。又如,二阶张量的张量梯度的分量是 $\partial a_{ij}/\partial x_k$,如果对指标 i 和 k 进行缩并,得

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}=b_j\qquad(j=1,2,3)$$

而

$$b_j^*=\frac{\partial a_{ij}^*}{\partial x_i^*}=\alpha_{ip}\alpha_{jq}\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_i^*}=\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{ir}\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_r}=a_{jq}b_q$$

所以,b_j 是一阶张量场分量,它称为二阶张量场对指标 i 的散度的分量,如果对指标 j 和 k 进行缩并,得 $\partial a_{ij}/\partial x_j=b_i$,它也是一阶张量的分量,称为二阶张量场对指标 j 的散度分量。因此,张量场对任一指标的散度可定义为相应张量梯度对指标的缩并。

第二节　应力分析

弹性波理论的基础是经典弹性理论,它定义了弹性波场中的基本物理量,建立了控制方程,提出各种求解问题,讨论了解的唯一性等理论问题。

在线性弹性理论中,有几个物理及几何方面的基本假设。

(1) 假设物体是连续的,即物体内部由连续的介质组成,物体中不存在空隙,因而,物体中的应力、应变、位移等物理量是连续的,它们可以用坐标的连续函数表示。

(2) 假设物质是均匀各向同性的。所谓均匀,是指物体内部各点的弹性性质是相同的;所谓各向同性,是指物体某点的弹性性质在各个方向上是相同的。

(3) 假设物体是完全弹性的。物体在外加因素的作用下引起形变,外加因素消除后,物体完全恢复其原来形状而不产生任何剩余形变;此外,物体在形变时服从应力与应变成正比的虎克定律。

(4) 假设物体的形变是小的。由于物体形变产生的位移与物体的尺寸相比是很小的,

所以在研究物体受外力后的平衡状态时，可以不考虑物体尺寸的变化，在研究物体的变形时，可以忽略形变的乘积这些高阶微量，因而在微小形变情况下，弹性理论中所导出的方程将是线性的。

(5) 假设物体内无初应力。弹性理论中所研究的应力仅考虑由于外加因素所引起的应力。

如果物体的变形不是很小，即不能略去形变的乘积，这就形成了几何上的非线性，在弹性理论中将得到非线性微分方程。研究这种问题的弹性理论称为非线性弹性理论。

如果物体中的应力超过弹性极限，物体将处于塑性状态，应力与应变不是线性关系，这是物理上的非线性。研究物体处于塑性状态时的应力与应变的学科称为塑性理论。

研究弹性理论有它的独特方法。在弹性理论研究中，常假想物体内部为无数个无限小单元平行六面体或物体表面由无数个无限小单元四面体组成。通过研究这些单元体的平衡，可以写出一系列平衡微分方程。但是未知的应力数目总是超过微分方程的数目，因此不能解出。然而，由于物体在变形后仍保持连续，所以各单元之间的变形必须相互协调，由此可以得到一组表示形变连续性的方程。同时，通过广义虎克定律，可以表示出应力与应变之间的关系。在物体表面还必须考虑物体内部应力与外力之间的平衡，这就是边界条件。这样，我们就有足够的微分方程来求解未知的应力、应变和位移。

一、体力、面力和应力

连续介质力学讨论两类力：体力和面力。令 ΔV 表示物体内某点 P 处体元的体积，$\tilde{x}_i$ 表示外力(如重力等)对 ΔV 的作用力，假定极限 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\tilde{x}_i/\Delta V = X_i$ 存在，X_i 表示单位体积的体力。作用于整个物体 V 的体力为

$$B_i = \int_V X_i \mathrm{d}V \tag{1-2-1}$$

作用于 ΔV 的体力绕原点 O 的力矩为 $C_{ijk}x_jX_k$，作用于整个物体 V 上的体力的力矩为

$$M_i = \int_V C_{ijk}x_jX_k \mathrm{d}V \tag{1-2-2}$$

面力是作用在物体的任意表面上的力，它是由于相邻质点之间的相互作用而引起的。如图1.2.1所示，我们设想物体 B 内有一个闭合面 S，通过讨论此闭合面 S 的内部物质和外部物质的相互作用来引出连续介质力学中的一个基本概念即应力。为此，考虑闭合面 S 上的一个小面元 ΔS，我们把与 ΔS 的外法线单位向量 l_i 一致的称为正面，反之称为负面。正面受到负面的作用力 ΔF_i，既是该面位置的函数，又是该面法线方向的函数。假定 ΔS 趋于零时，比值 $\Delta F_i/\Delta S$ 趋于极限值 T_i：

$$T_i = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F_i}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}S} \tag{1-2-3}$$

T_i 表示单位面积受到的面力，称为应力向量或牵引力。

现在来考虑一种特殊情况。令面元 ΔS_k 分别与直角坐标面平行，则 x_k 轴正方向即是 ΔS_k 的法线方向。设作用于 ΔS_k 上的应力向量为 T_i^k，它沿着 x_1, x_2, x_3 轴的分量 T_1^k, T_2^k, T_3^k 记为 $\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{k3}$。如图 1.2.2 所示，我们可以把作用在 $k = 1,2,3$ 这三个面上的应力分量用

方阵形式写出：

	应力分量		
	x_1	x_2	x_3
与 x_1 轴垂直的面	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
与 x_2 轴垂直的面	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}
与 x_3 轴垂直的面	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}

分量 $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$称为法向应力或正应力，其余如 σ_{12},σ_{23}等称为切应力。

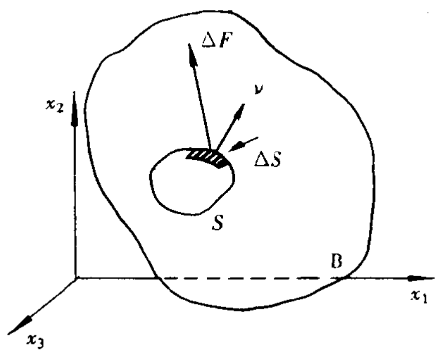


图 1.2.1

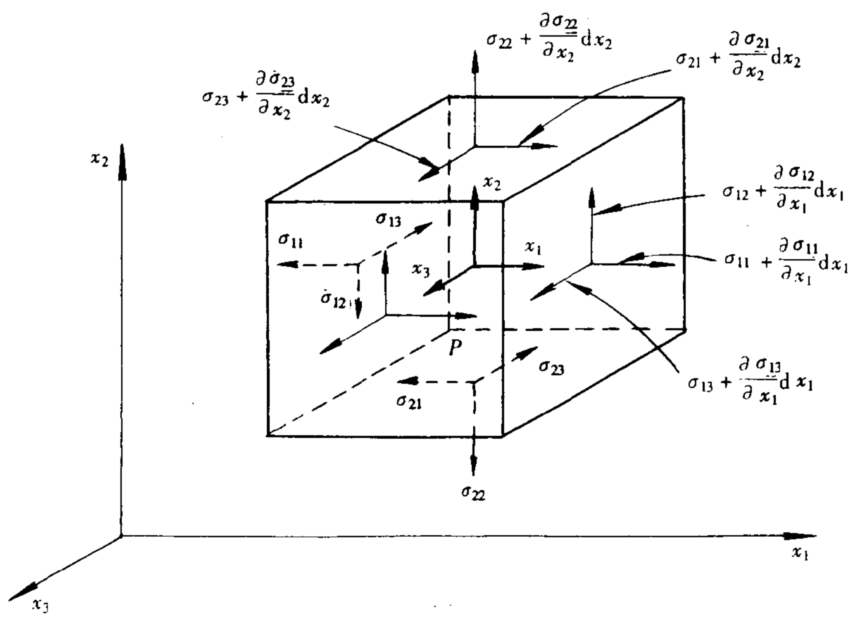


图 1.2.2　六面体上应力分量表示

二、一点的应力状态

为了讨论物体内一点的应力状态，我们考虑一个包围 S 面上某小段的薄圆柱壳形的闭合面，其上、下面均为 ΔS，厚为 δ(见图 1.2.3)。假定当 $\delta \to 0$ 时，ΔS 保持有限值，但此时体力和力矩及它们随时间的变化率均为零，故仅有面力的贡献。据牛顿运动定律可得

$$T_i^{(+)}\Delta S + T_i^{(-)}\Delta S = 0 \quad \text{或} \quad T_i^{(+)} = -T_i^{(-)} \tag{1-2-4}$$

这里，应力 $T_i^{(+)}$ 表示 S 面内部物体对外部物体的作用力，$T_i^{(-)}$ 表示 S 面外部物体对内部物体的作用力。此式表明：S 面内部物体和外部物体的相互作用力大小相等、方向相反。

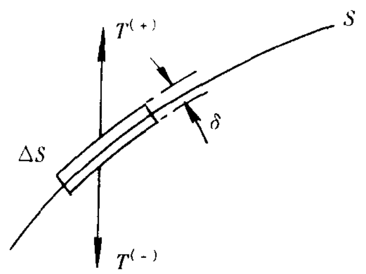


图 1.2.3　横截 S 面薄圆柱的平衡

为了导出应力向量与其相应的应力分量的关系，我们考虑一个无限小四面体，其三个面 dS_1, dS_2, dS_3 分别与坐标面平行，另一个面的单位法向量为 l_i(见图 1.2.4)，则有关系式：

$$dS_1 = dS\cos(l_i, x_1) = l_1 dS$$
$$dS_2 = dS\cos(l_i, x_2) = l_2 dS$$
$$dS_3 = dS\cos(l_i, x_3) = l_3 dS$$

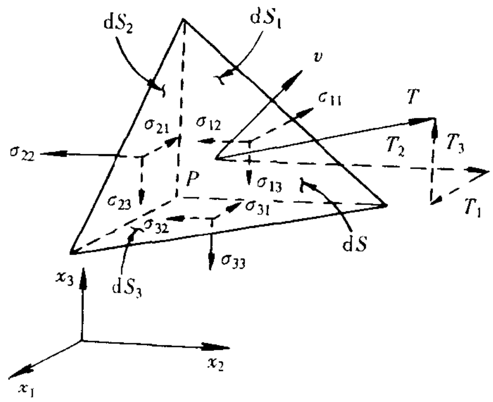


图 1.2.4　四面体上的应力

四面体的体积为 $dV = h dS/3$。这里，h 是以 dS 为底面的四面体的高。作用在三个坐标面上沿着 x_1 轴方向的力有 $(-\sigma_{11} + \in_1)dS_1$，$(-\sigma_{21} + \in_2)dS_2$ 和 $(-\sigma_{31} + \in_3)dS_3$。这里，$\sigma_{11}$，$\sigma_{21}$，$\sigma_{31}$ 均为 P 点处的应力，负号表示这些面的外法向与坐标面方向相反，$\in$ 表示作用点处的

应力与 P 点处应力之差。我们首先考虑沿 x_1 方向的各个力,此时,有面力$(T_1+\in)\mathrm{d}S$,体力$(X_1+\in')\mathrm{d}V$ 及与力矩变化有关的力 $\rho V_1 \mathrm{d}x$。据牛顿定律,得

$$(-\sigma_{11}+\in_1)l_1\mathrm{d}S+(-\sigma_{21}+\in_2)l_2\mathrm{d}S+(-\sigma_{31}+\in_3)l_3\mathrm{d}S$$

$$+(T_1+\in)\mathrm{d}S-(X_1+\in')\cdot\frac{1}{3}h\mathrm{d}S=\rho V_1\cdot\frac{1}{3}h\mathrm{d}S$$

考虑到$\in_1,\in_2,\in_3,\in$和$\in'$均为微量,故当 $h\to 0$ 时,得

$$T_1=\sigma_{11}l_1+\sigma_{21}l_2+\sigma_{31}l_3$$

同样,分别考虑 x_2 和 x_3 方向的各个力,可以得到 T_2 和 T_3 的表达式。这三个表达式可以用张量符号写为

$$T_i=\sigma_{ji}l_j \tag{1-2-5}$$

这就是表示应力与应力分量关系的柯西(Cauchy)公式。它表明,要得到物体内部任意面元上的应力,必须用九个应力分量 σ_{ij}。换句话说,物体的应力状态必须用九个量才能完整地表述。由于 T_i 是一个向量,而方程(1-2-5)对任意向量 l_i 都成立,根据商定律可知,σ_{ij}是一个二阶张量,故称为应力张量。

如果把 T_i 投影到斜微分面的法线 l_i 上,就得到该微分面上的正应力:

$$\sigma_{l_i}=\sigma_{ji}l_jl_i \tag{1-2-6}$$

若在物体表面割取一个四面微分体,且令斜微分面位于物体表面,此时,方程(1-2-5)表示物体表面上的外力与内部应力的关系,在这种情况下,(1-2-5)式称为边界条件。

三、平衡方程

现在来考虑动力学平衡。如图 1.2.5 所示,设空间 x_i 中的物体 B 具有任意闭域,其表面为 S。令物体中某点 P 在时刻 t 的位移为 $u_i(\boldsymbol{x},t)$,速度为 $\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t$,加速度为 $\mathrm{d}^2u_i/\mathrm{d}t^2$。由于 x_i 是空间中的固定点,它与时间无关,故有

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_i}{\partial t}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}$$

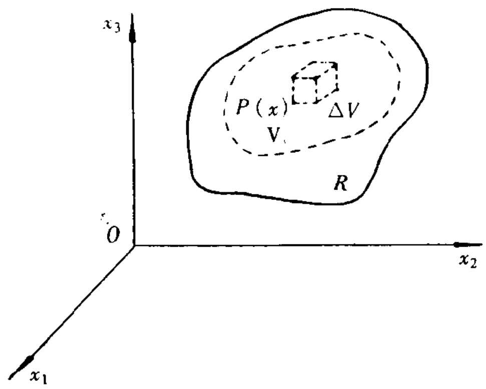


图 1.2.5 x_i 空间中的 P 点

令 ρ 为物体密度，则作用在体元 ΔV 上的惯性力为 $-\rho\Delta V(\partial^2 u_i/\partial t^2)$，作用在物体 V 上的惯性力为 $J_i = -\int_V \rho(\partial^2 u_i/\partial t^2)\mathrm{d}V$。根据力的达朗贝尔(D'Alemberl)作用原理，体力、面力、惯性力决定了每个坐标方向上的动力学平衡，则得

$$\int_S \sigma_{ji} l_j \mathrm{d}S + \int_V X_i \mathrm{d}V - \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\mathrm{d}V = 0$$

利用散度定理 $\int_V F_{j,j}\mathrm{d}V = \int_S F_j l_j \mathrm{d}S$，上式可化为

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V = 0$$

这个方程对 V 域内任意选择的范围均成立。假定积分在物体 R 上连续，则上式成立的条件是，在物体 B 内的每个空间及时间 (x_i, t) 处积分均为零，因而有

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1-2-7}$$

这是物体内每个点处均应成立的应力运动方程。

现在再来考虑物体绕坐标原点作旋转运动时的动力学平衡。此时，物体所受的面力、体力及惯性力绕坐标原点的力矩总和为零，因而有

$$\int_S C_{ijk} x_j l_m \sigma_{mk}\mathrm{d}S + \int_V C_{ijk} x_j\left(X_k - \rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V = 0$$

上式第一个积分用散度定理后与第二个积分合并，得

$$\int_V C_{ijk}\delta_{jm}\sigma_{mk} + x_j\left(\sigma_{mk,m} + X_k - \rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}V = 0$$

据(1-2-7)式可知，上式圆括号内为零。再把留下的项中的 m 加起来简化后得

$$\int_V C_{ijk}\sigma_{jk}\mathrm{d}V = 0$$

假定积分是连续的，且物体的体积是任意的，则在物体中的每个空间、时间点 (x_i, t)，都有

$$C_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \tag{1-2-8}$$

或

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1-2-9}$$

此式表明应力张量是对称的。

四、坐标变换

前面已经证明，应力是二阶张量，因而根据二阶张量的变换定律，马上就可以得到用已知的直角坐标系 x_i 中的应力求出新坐标系 x_i' 中应力的公式：

$$\sigma_{km}' = \alpha_{kj}\alpha_{mi}\sigma_{ji} \tag{1-2-10}$$

五、主应力、应力张量的不变量

在一般应力状态下，作用在一个外法线为 l_i 的面上的应力向量取决于 l_i 的方向。现在我们要问：在什么方向上，应力向量成为最大或切应力为零？

我们把应力方向与面法线方向一致的面称为主平面,其法线称为主轴,相应的应力称为主应力。假定 l_i 为主轴,σ 为相应的主应力,则作用在垂直于法线为 l_i 的面上的应力向量的分量为σl_i。另一方面,这同一个应力向量又可以用 $\sigma_{ji} l_i$ 表示,则得

$$(\sigma_{ji} - \sigma\delta_{ji}) l_j = 0 \tag{1-2-11}$$

它表示三个方程($i = 1,2,3$)组成的方程组,可以解出 l_1, l_2, l_3。由于 l_i 是单位向量,我们用(1-2-11)式求出的非零解还必须满足

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{1-2-12}$$

方程(1-2-11)具有一组非零解的充要条件是其系数行列式为零,即

$$|\sigma_{ji} - \sigma\delta_{ji}| = 0 \tag{1-2-13}$$

这是 σ 的三次方程,方程的三个根就是主应力。对于每个主应力值,可以确定相应的单位法向量 l_i。把(1-2-13)式展开,得

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \tag{1-2-14}$$

其中

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \tag{1-2-15}$$

另一方面,如果 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是方程(1-2-14)的根,则可写出

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

可以看出,方程根与系数具有下列关系:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{1-2-16}$$

由于主应力表示一个点的应力状态,而且与坐标选择无关,因此,(1-2-14)式与 I_1, I_2, I_3 都与坐标变换无关,所以我们把 I_1, I_2, I_3 称为应力张量的不变量。(1-2-15)式和(1-2-16)式分别是用应力和主应力表示应力张量不变量的公式。

应力对称张量的三个主应力都是实值,三个主平面相互正交。如果把坐标轴 x_1, x_2, x_3 选得与主轴一致,则应力分量组成的矩阵可写为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1-2-17}$$

六、拉梅应力椭球体

在任意一个单位外法线向量为 l_i 的面元上作用着的应力 $T_i = \sigma_{ji} l_j$。我们把直角坐标轴选得与应力张量的主轴一致,则有