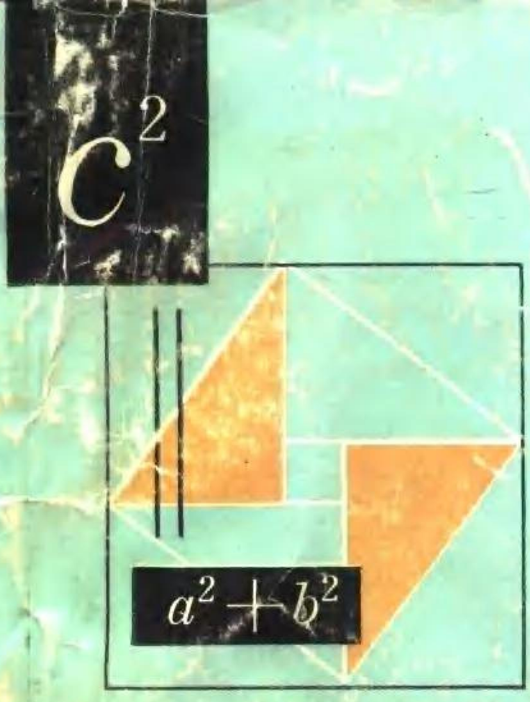

高等师范院校试用教材

初等数学研究

主编 查鼎盛 余鑫晖 黄培铣

广西师范大学出版社

高等师范院校试用教材

初等数学研究

查鼎盛　余鑫晖　黄培铁　主编

广西师范大学出版社

登字 04 号

初等数学研究

查鼎盛 余鑫晖 黄培铣 主编

☆

广西师范大学出版社出版

（广西桂林市育才路 3 号）

广西新华书店发行

湖南省地质测绘印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.625 字数 467 千字

1991 年 11 月第 1 版 1991 年 11 月第 1 次印刷

印数：0001—2000

ISBN7—5633—1202—1/G・988

定价：5.50 元

前　言

本书根据高等师范院校《初等数学复习研究》教学大纲的要求进行编写．力求用较高的数学观点、思想与方法，对初等数学作比较深入的研究，并对中学数学中的基本概念、基础理论和基本技能进行适当的加深与拓广．在各章的理论与解题研究中，注意结合典型实例进行分析，注意解题思路与方法的运用，并注意论述的严密与通俗，使教材具有较好的可读性与思考性．每章之后均精选有各类型和不同梯度的习题．为方便自学，书末附有各章习题答案与提示．

全书共十章，“数系”由徐树道执笔；“解析式”由宁明宗执笔；“函数”由查鼎盛执笔；“方程与方程组”由黄培铣执笔；“不等式”、“数列”由袁桂珍执笔；“排列与组合”由余鑫晖执笔；“几何变换”、“轨迹与作图”由何应达执笔；“平面几何解题研究”由祝炳宏执笔．

本书由查鼎盛、余鑫晖、黄培铣副教授统稿；由程福长、苏健基教授，蔡高火、蒋文蔚副教授审定．

本书可作为高等师范院校、函授大学、业余大学数学专业的教材，也可供中等学校数学教师参考．

本书在编写过程中，引用了某些数学专著和数学丛书的内容，在此谨向有关作者表示谢意．

由于编者水平有限，错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

1991年4月

内 容 提 要

本书用较高的数学观点、思想与方法，对初等数学作比较深入的研究，对中学数学中的"三基"内容进行加深和拓广，并注意结合典型实例研究解题思路与方法. 全书共十章，其内容分别是：数系，解析式，函数，方程与方程组，不等式，排列与组合，数列，几何变换，轨迹与作图，平面几何解题研究.

本书可作为高等师范院校、函授大学、业余大学数学专业教材，也可供中等学校数学教师参考.

目　录

第一章 数 系

§1 数的概念的扩展

客观世界的空间形式及数量关系是数学研究的基本对象，这一事实决定了数的概念是现代数学的基本概念之一.

数的概念的发展是一个历史的、渐进的过程. 从远古至今，由计数产生自然数，由分物产生分数，由刻划相反意义的量产生负数，由线段间的不可公度引进无理数. 数的概念的进一步扩展——虚数的引进，与以前不同，它不是首先由于量的度量需要，而是为了解决数学本身所提出的问题(例如求 $x^2+1=0$ 的根). 引进虚数后，数系扩展为复数集.

数系的扩展一般有两种方法：一种是把新的元素加入到已经建立的数系中而扩展. 另一种是用近代数学的观点，在原有数系的基础上理论性地构造一个集合，再对此集合通过定义关系、运算和划分等价类来建立新数系，然后证明新数系的一个真子集与原有数系同构，从而达到扩展原数系的目的. 无论用哪一种方法，数集的每一次扩展都应遵循以下的原则(设集合 A 扩展后得到集合 B)：

(i) $A\subset B$.

(ii) B 的元素间的关系和运算的定义，不破坏原来 A 的元素间的相应关系和相应运算.

(iii) A 中不是永远可施行的某种运算，在 B 中永远可施行.

(iv) 在同构的观点下，B 是在 A 的具有以上三个性质的一切扩展中唯一的最小的扩展.

中小学数学课程中关于数的扩展过程大体上采用第一种扩展

方法，即

自然数集$\xrightarrow{\text{添零}}$扩大的自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$算术数集$\xrightarrow{\text{添负数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集.

而由实数集到复数集的扩展则用第二种方法（以实数对定义复数）.

所以说，中小学数学课程中关于数的扩展过程和数系的历史发展很相近，易为学生所接受，但限于学生的接受能力，每一步的扩展均未作严格而详尽的论述.

科学数系理论的建立是数学发展必然提出的任务. 众所周知，在牛顿、莱布尼兹工作的基础上，18 世纪，分析数学取得了累累硕果. 但那时数学思维、理论论证都较薄弱，甚至连极限、无穷小量的概念都是含混不清的. 直到 19 世纪后半叶，维尔斯托拉斯、康托尔、戴德金分别建立了等价的、严格的实数的科学理论，才由有理数集 Q 严格地构造出实数集 R. 集合论的发展，为科学数系理论的建立提供了有力的工具. 从 Q 构造出 R，从整数集 Z 构造出 Q，从自然数集 N 构造出 Z，并作为起点，皮亚诺公理定义了 N. 通过虚数的引进，还把实数集扩展到了复数集，从而完备地建立了科学数系的理论.

可见，科学数系理论的建立是按数系扩展的第二种方法进行的，即

自然数集$\longrightarrow$整数集$\longrightarrow$有理数集$\longrightarrow$实数集$\longrightarrow$复数集.

下面将按这一进程介绍数系的科学理论.

§2　自然数集

自然数 1，2，3，…是人类最早认识的数系. 在自然数系的基础上，人类逐步认识了整数、有理数、实数和复数. 科学数系理论的建立应该从作为出发点的自然数系开始.

一、自然数的基数理论

1. 自然数的概念

我们用集合的比较来建立自然数的概念.

定义 1 如果在集合 A 与集合 B 的元素之间存在一个一一映射 f，那么就说集合 A **等价于**集合 B，记作 $A \sim B$.

显然，集合的等价满足自反性、对称性和传递性，即

(i) 对于任一集合 A，都有 $A \sim A$；

(ii) 如果 $A \sim B$，那么 $B \sim A$；

(iii) 如果 $A \sim B$，$B \sim C$，那么 $A \sim C$.

可见"$\sim$"是等价关系.

这样，我们可把所有集合按等价关系划分为等价类：凡等价的集合归为同一类，不等价的集合不归在同一类. 我们给每个等价类以一个识别的标记，这个标记叫做该等价类中每一个等价集合的**势**或**基数**. 因此，同一个等价类中的集合是等势的或说是等基数的.

定义 2 一个集合如果不能与其任一真子集建立一一映射，那么就把这个集合叫做**有限集合**. 非空有限集合的基数叫做**自然数**. 一切自然数组成的集合叫做**自然数集**，记作 N.

例如，只含一个元素的集合 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{x\}$，$\{y\}$，…，它们都是等价的，都属同一个等价类，因而是等势的，它们的共同基数叫做自然数 1；含有两个元素的集合 $\{a, b\}$，$\{x, y\}$，…，也都是等价的，都属同一个等价类，因而也是等势的，它们的共同基数叫做自然数 2. 依法类推，可见每一个自然数 1，2，3，…只是非空有限集合的基数的一种记法而已.

2. 自然数的顺序

定义 3 设有限集合 A，B 的基数分别为 a，b.

(i) 如果 $A \sim B$，就说 a **等于** b，记作 $a=b$；

(ii) 如果 $A \sim B'$ 而 $B' \subset B$（B' 是 B 的真子集），就说 a **小于** b，记

作 $a<b$；

(iii) 如果 $A'\sim B$ 而 $A'\subset A$，就说 a **大于** b，记作 $a>b$.

根据集合等价与等势的定义知，自然数的相等关系具有自反性、对称性和传递性. 即

(i) 如果 $a\in N$，那么 $a=a$；

(ii) 如果 a，$b\in N$ 且 $a=b$，那么 $b=a$；

(iii) 如果 a，b，$c\in N$ 且 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

自然数集是有序集，因为自然数的顺序关系具有顺序律，即三歧律、对逆律和传递律：

(i) 如果 a，$b\in N$，那么 $a=b$，$a<b$，$a>b$ 三种关系有且仅有一个成立；

(ii) 如果 a，$b\in N$，那么当且仅当 $a<b$ 时 $b>a$；

(iii) 如果 a，b，$c\in N$ 且 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$.

以上说明自然数集可以建立大小顺序关系，将自然数按从小到大的顺序排列出来，就得到自然数列 1，2，3，….

3. 自然数的运算和性质

(1)自然数的加法

定义 4 设有限集 A，B，C 的基数分别是 a，b，c，$A\cap B=\varnothing$，如果 $C=A\cup B$，那么 c 叫做 a 与 b 的**和**，记作 $c=a+b$，a 叫做**被加数**，b 叫做**加数**，求和的运算叫做**加法**.

由集合运算的性质易证自然数的加法满足：

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$.

(2)自然数的减法

定义 5 设 a，b，c 为自然数，如果 $a=b+c$，那么 c 叫做 a 与 b 的**差**，记作 $c=a-b$；a 叫做**被减数**，b 叫做**减数**，求差的运算叫做**减法**.

从定义可知，减法是加法的逆运算. 显然，在自然数集里减

法不是总能实施的.

(3)自然数的乘法

定义 6 设 b 个等价集合 $A_1, A_2, \cdots, A_b$(其中任何两个集合的交集都是空集)的基数都是 a，如果 $C=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b$，那么集合 C 的基数 c 叫做 a 与 b 的**积**，记作 $c=a\cdot b$(或 $c=a\times b$ 或 $c=ab$)，a 叫做**被乘数**，b 叫做**乘数**，求积的运算叫做**乘法**.

由集合运算的性质易证自然数的乘法满足:

乘法交换律：$ab=ba$;

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$;

乘法对加法的分配律：$(a+b)c=ac+bc$;

乘法对减法的分配律：$(a-b)c=ac-bc(a>b)$;

去括号：$a-(b+c)=a-b-c(a>b+c)$.

(4) 自然数的除法

定义 7 设 a, b, c 为自然数，如果 $a=bc$，那么 c 叫做 a 与 b 的**商**，记作 $c=a\div b$(或 $c=\frac{a}{b}$)，a 叫做**被除数**，b 叫做**除数**，求商的运算叫做**除法**.

从定义可知，除法运算是乘法运算的逆运算. 显然，在自然数集里，除法不是永远可以施行的.

二、自然数的序数理论

1. 自然数的概念

基数理论实质是从比较集合中元素个数的角度定义自然数及其运算. 由于自然数可依序排列，因此也可从“序”的角度定义自然数及其运算. 1889 年，意大利数学家皮亚诺利用“集合”，“后继”及“1 是自然数”这三个原始概念，用公理化的方法定义自然数.

皮亚诺公理 集合 N 如果满足下述一组公理，那么 N 叫做**自然数集**，N 的元素叫做**自然数**.

(i) $1\in N$；

(ii) 对 N 中每个元素 n，在 N 中有且仅有一个确定的后继元素 n^+；

(iii) 对 N 中任何元素 n，$n^+\neq 1$；

(iv) 对 N 中任何两个元素 m，n，如果 $m^+=n^+$，那么 $m=n$；

(v) 如果 N 的子集 M 满足①$1\in M$，②当 $n\in M$ 时，$n^+\in M$，那么 $M=N$.

公理(i)，(iii) 说明 1 而且只有 1 是最前面的一个自然数；公理(ii)，(iv)说明 N 中每个数有且只有一个后继数，且不同数的后继数也不同. 同样，如果给出的两个数的后继数不同，那么这两个数也不同. 因此，从 1 开始，如果记 $1^+=2$，$(1^+)^+=2^+=3$，$3^+=4$，…那么可得全体自然数. 公理(V)叫做**归纳公理**，由它可得下列**第一数学归纳法**.

定理 1 设 $T(n)$是一个与自然数 n 有关的命题，如果(i)$T(1)$是成立的；(ii)假设 $T(k)$成立能推出 $T(k^+)$成立，那么 $T(n)$对任何自然数都成立.

证 设 M 是使命题 $T(n)$成立的自然数的集合，由(i)知 $1\in M$，由(ii)知从 $k\in M$ 可导出 $k^+\in M$，则集合 M 满足公理(V)，从而 $M=N$. 所以命题对一切自然数 n 成立. 证毕

2. 自然数的运算和性质

由于减法、除法分别是加法、乘法运算的逆运算，定义自然数的四则运算，归结为定义自然数的加法和乘法这两种运算. 而且运用皮亚诺公理，只需规定：(i)自然数加 1 与乘以 1 的意义；(ii)自然数加 n^+与乘以 n^+的意义.

定义 8 **自然数加法**是指这样一种对应，对每一对自然数 m，n，有且仅有一个记作 $m+n$ 的自然数与之对应，这种对应满足以下条件：

(i) 对于任意的自然数 m，有 $m+1=m^+$；

(ii) 对于任意两个自然数 m, n, 有 $m+n^{+}=(m+n)^{+}$.

定义 9 **自然数乘法**是指这样一种对应，对每一对自然数 m, n,有且仅有一个记作 $m\cdot n$ 的自然数与之对应,这种对应满足以下条件：

(i) 对于任意的自然数 m, 有 $m\cdot 1=m$;

(ii) 对于任意两个自然数 m, n, 有 $m\cdot n^{+}=m\cdot n+m$.

可以证明自然数的和与积是唯一存在的且加法与乘法运算满足以下运算律：

定理 2 自然数加法满足结合律：

$$(m+n)+l=m+(n+l)$$

证 对于每一对取定的自然数 m、n, 以上等式可视为关于自然数 l 的一个命题 $T(l)$.

(i) 证明 $T(1)$成立.

$\because\quad (m+n)+1=(m+n)^{+}=m+n^{+}=m+(n+1)$,

$\therefore\quad T(1)$成立.

(ii)假设对自然数 k, $T(k)$成立，即

$$(m+n)+k=m+(n+k)$$

$$\because\quad (m+n)+k^{+}=[(m+n)+k]^{+}=[m+(n+k)]^{+}$$
$$=m+(n+k)^{+}=m+(n+k^{+}).$$

$\therefore\quad T(k^{+})$成立.

由第一数学归纳法(定理 1)知，对于任何自然数 l, $T(l)$ 成立，即$(m+n)+l=m+(n+l)$成立. 由于对每一对自然数 m, n 上面的等式皆成立，因此对一切自然数 m, n, l 等式$(m+n)+l=m+(n+l)$也成立. 证毕

推论 加法结合律可以推广到任意有限多个自然数的情况(在加法式子中可任意添括号).

定理 3 自然数的加法满足交换律：$m+n=n+m$.

对 n 用数学归纳法即可证明.

推论 加法交换律可以推广到任意有限多个自然数的情况(在加法式子中可任意交换加数).

定理4 自然数的乘法对加法满足分配律:

$$(m+n)\cdot l=m\cdot l+n\cdot l$$

证 当 $l=1$ 时,$(m+n)\cdot 1=m+n=m\cdot 1+n\cdot 1$.

设 $l=k$ 时,$(m+n)\cdot k=m\cdot k+n\cdot k$,则

$(m+n)\cdot k^{+}=(m+n)k+(m+n)=m\cdot k+n\cdot k+m+n$

$=m\cdot k+m+n\cdot k+n=(m\cdot k+m)+(n\cdot k+n)$

$=m\cdot k^{+}+n\cdot k^{+}$

由第一数学归纳法,命题对一切自然数 l 成立,从而对一切自然数 m, n, l 成立. 证毕

定理5 自然数乘法满足交换律:$m\cdot n=n\cdot m$.

定理6 自然数乘法满足结合律:$(m\cdot n)\cdot l=m\cdot(n\cdot l)$.

读者可以自己证明.

至于自然数的减法和除法定义与自然数基数理论中的定义相同. 相应的运算律也相同.

例 证明 $2\cdot 3=6$.

证 $2\cdot 3=2\cdot 2^{+}=2\cdot 2+2=2\cdot 1^{+}+1^{+}$

$=(2\cdot 1+2)+1^{+}=(2+1^{+})+1^{+}$

$=(2+1)^{+}+1^{+}=(2^{+})^{+}+1^{+}=3^{+}+1^{+}$

$=4+1^{+}=(4+1)^{+}=5^{+}=6$

3. 自然数的顺序

定义10 设 m, n 是任意两个自然数,如果存在一个自然数 k,使得 $n=m+k$,就说 n 大于 m,记作 $n>m$;或者说 m 小于 n,记作 $m<n$.

这样定义的顺序关系满足顺序律,即三歧律、对逆律和传递律(证明略). 下面证明自然数的顺序关系还满足如下性质.

定理7 如果 m, n, l, p, $q\in N$,且 $n>m$, $p>q$,那么

(i) $n+l>m+l$；(ii)$n\cdot l>m\cdot l$；(iii)$n+p>m+q$；

(iv)$n\cdot p>m\cdot q$.

证 (i)因为 $n>m$，所以，存在 $k\in N$，使 $n=m+k$. 于是 $n+l=(m+k)+l=m+(k+l)=m+(l+k)=(m+l)+k$. 故 $n+l>m+l$.

(ii) $\because\quad n\cdot l=(m+k)\cdot l=m\cdot l+k\cdot l$,

$\therefore\quad n\cdot l>m\cdot l$.

(iii) 与(iv)的证明留给读者. 证毕

除 1 以外，任一个自然数 m 是某自然数 n 的后继数，从而 $m=n^+=n+1$，故 $m>1$，即 1 是最小的自然数. 对任一个自然数 n，有 $n\geqslant 1$.

自然数集满足**阿基米德原理**：对任意两个自然数 m，n，必存在自然数 l，使 $l\cdot m>n$.

证 因为 $m\geqslant 1$，取 $l>n$(如取 $l=n+1$)，则

$$l\cdot m>n\cdot m\geqslant n\cdot 1=n$$ 证毕

三、最小数原理与数学归纳法

已证自然数集有最小数 1，还可证明自然数集的任一个非空子集必有最小数.

定理 8(最小数原理) 自然数集 N 的任何非空子集必有最小数.

须证：如果 $S\subset N$，且 $S\neq\varnothing$，那么存在 $m_0\in S$，对任何 $n\in S$ 有 $m_0\leqslant n$.

证 如果 $1\in S$，由于 1 是 N 中最小数，当然也是 S 中最小数.

如果 $1\overline{\in} S$，我们用反证法. 假设 S 没有最小数. 构造集合 M，它是比 S 中每个数都小的所有自然数的集合. 因为 $1\overline{\in} S$，所以 $1\in M$，即 $M\neq\varnothing$. 下面证明对于任意 $m\in M$，必有 $m+1\in M$. 事实上，对于任意 $n\in S$，由 M 的构造知 $m<n$，从而存在自然数 k 使 $m+k=n$. 这里 $k>1$(否则 $n=m+1$，而 $m\in M$，可断定 n 为 S 中最

小数，与假设矛盾)，故存在自然数 l，使 $k=l+1$. 所以 $n=m+l+1=(m+1)+l$，从而导出 $m+1<n$. 由 n 的任意性可知 $m+1\in M$. 由归纳公理得 $M=N$. 因而 $S=\varnothing$ 与 $S\neq\varnothing$ 矛盾. 所以 S 中必有最小数.

证毕

自然数的最小数原理又叫做**自然数的良序性**，所以说自然数集是一个良序集.

定理 9(第二数学归纳法) 设 $T(n)$ 是一个与自然数 n 有关的命题，如果(i) $T(1)$ 是成立的，(ii)假设 $T(n)$ 对一切小于 $k(k>1)$ 的自然数成立能推出 $T(k)$ 成立，那么 $T(n)$ 对任何自然数都成立.

证 用反证法.

假设 $T(n)$ 对某些自然数不成立，令 S 是使 $T(n)$ 不成立的那些自然数组成的集合. 由假设知，$S\neq\varnothing$. 根据定理 8，S 中有最小数 m_0，即 $T(m_0)$ 不成立，且 m_0 是使 $T(n)$ 不成立的最小数. 由(i)知 $T(1)$ 成立，又因对一切小于 m_0 的自然数 n，$T(n)$ 成立. 由(ii)导出 $T(m_0)$ 成立，与 $T(m_0)$ 不成立矛盾. 所以 $T(n)$ 对一切自然数成立.

证毕

下面我们证明第一数学归纳法(定理 1)与第二数学归纳法(定理 9)是等价的.

实际上两定理中条件(i)是相同的，只须证明两定理中的条件(ii)等价即可. 如果定理 1 的条件(ii)被满足，即从 $T(k-1)$ 为真可推得 $T(k)$ 为真，由于 $1\leqslant n<k$ 时 $T(n)$ 为真，已蕴含了 $T(k-1)$ 为真，故应用定理 1 的条件(ii)可得 $T(k)$ 为真. 所以从定理 1 的条件(ii)可导出定理 9 的条件(ii). 反之，当定理 9 的条件(ii)被满足时也可导出定理 1 的条件(ii)被满足. 用反证法证明. 设由 $T(n)$ 对 $1\leqslant n<k$ 成立则 $T(k)$ 成立不能推出仅由 $T(k-1)$ 成立则 $T(k)$ 成立的结论，那么存在 $k_0\in N$ 使 $T(k_0-1)$ 成立而 $T(k_0)$ 不成立. 令 N 中这样的数的集合为 S，即 $S=\{k_0|k_0\in N, T(k_0-1)$ 为真，$T(k_0)$ 不