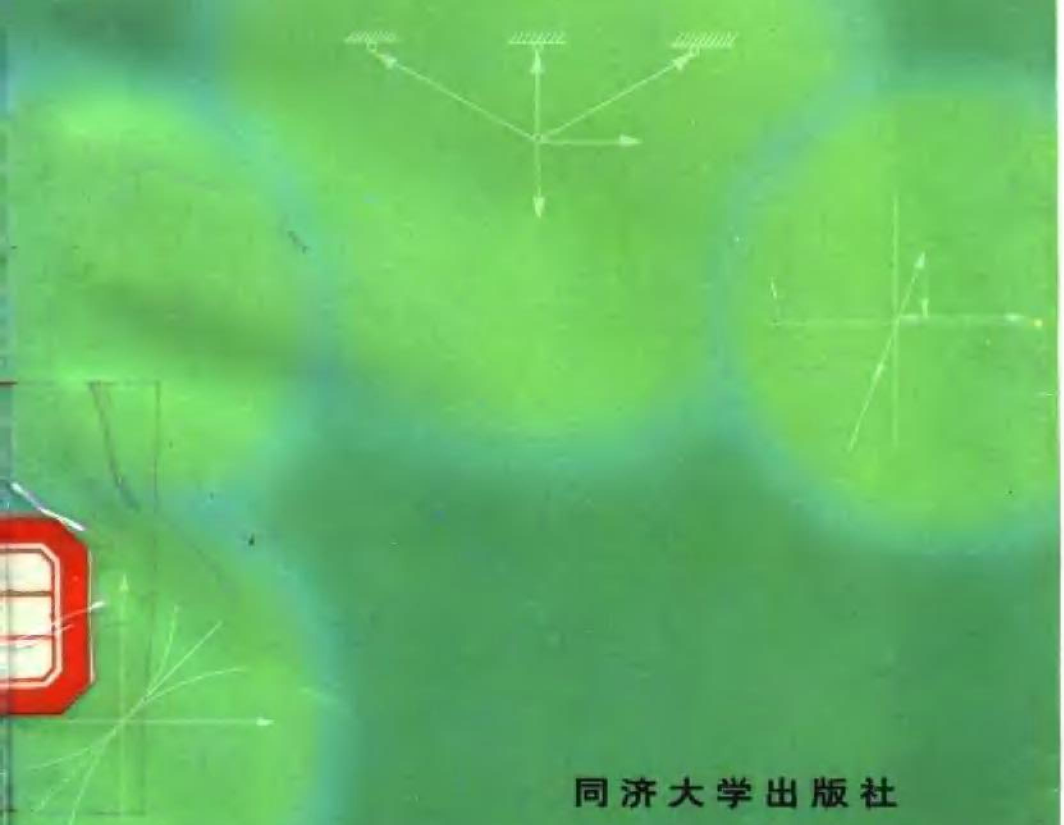
# 结构动力分析的子结构方法

楼梦麟　编著



同济大学出版社

# 结构动力分析的子结构方法

楼梦麟 编著

同济大学出版社

## 内容提要

结构动力分析的子结构方法是计算结构动力学的一个重要分支。本书第一章介绍结构动力分析的基本知识；第二章至第五章是本书的主要内容，较为详细地介绍以实模态理论为基础的各种类型的子结构模态分析方法；第六章至第八章介绍其他各类的结构动力分析子结构方法；第九章介绍复模态理论的子结构方法。

本书可作高等院校相关专业教材，也可作从事结构动力分析的工程技术人员参考用书。

责任编辑　许纪森

封面设计　陈益平

**结构动力分析的子结构方法**

楼梦麟　编著

同济大学出版社出版

（上海四平路 1239 号）

上海新华书店发行所发行

常熟市文化照相制版彩印厂印刷

开本:850 × 1168　1/32　印张:10.25　字数:290 千字

1997 年 12 月第 1 版　1997 年 12 月第 1 次印刷

印数:1－500　定价:20.00 元

ISBN 7－5608－1837－4/O·157

# 前　言

动力子结构方法是计算结构动力学的一个重要分支。

计算机软硬件技术的迅速提高、有限单元法理论的创立和完善给复杂力学问题的计算带来了革命性的变革，也是动力子结构法基本理论的创立与发展的重要条件。促使动力子结构法不断发展、完善的根本动力是各种复杂结构对动力分析水平要求的不断提高。航空航天飞行器、大型舰船、海上采油平台和水坝等大型复杂系统，有的分部件制造，有的分区域施工，然后组集成一个大系统。子结构法“先修改后复原”的基本思想顺应了大型复杂结构制（建）造过程的实际情况和分析要求。创立动力子结构法的目的是提高计算效率，它可以充分地利用各子系统的动态特性，以简便的计算过程，最终获得可靠的原系统动力特性参数或动态响应。动力子结构法的一个很大特点是子结构的模态特性既可以从计算中得到，也可以通过试验获取，从而灵活地把试验与计算两个手段结合起来分析复杂系统的动力特性，也为一些复杂的连接条件或者局部子系统建立分析模型提供了分析工具。

自 60 年代初 Hurty 和 Gradwell 提出模态综合的思想以来，已有 30 多年发展历史。应该说，70 年代和 80 年代是研究动力子结构法的全面发展时期。在这一时期，以子结构模态综合法为代表的动力子结构方法的基本理论日臻完善，计算方法也得到了很大发展，我国学者为此作出了重要贡献。近几年来，动力子结构法在许多方面又取得了新的研究成果，例如，复杂阻尼系统的子结构方法、混合界面子结构分析模型的建立、连接子结构概念的提出与应用以及具有部分正交性的 Ritz 向量的引入等，扩大了动力子结构

法的应用范围，丰富了相应的计算理论。编写本书的目的是总结与介绍动力子结构方法的研究成果，便于工程技术人员、科研人员和研究生熟悉和掌握这些方法的基本原理和计算方法，在结构分析和工程设计中加以应用和发展。

本书的阅读对象是掌握结构动力学基本知识的工程技术人员和科学研究人员以及研究生。为了使尚未系统学习过结构动力学的有关人员能够顺利学习动力子结构法的有关内容，书中第一章介绍结构动力分析的基础知识，同时，这部分内容也是介绍动力子结构法所必需的。第二章至第五章为书中的主要内容，较为详细地介绍了以实模态理论为基础的各种类型的子结构模态综合方法。第六章至第八章介绍了其他类型的结构动力分析的子结构方法。而基于复模态理论的子结构复模态综合法安排在最后一章给以介绍。本书所介绍的子结构法是指能够实施坐标凝聚、最后减少系统动力分析自由度的子结构方法，而那些只应用了子结构划分技术并未缩减系统自由度的各种计算方法并未包括在内。还应指出，子结构技术已不仅仅局限于一般结构系统本身的动力分析问题，而且已广泛应用于结构与周围介质间的动力相互作用问题，如结构与流体的动力耦合问题，土-结构动力相互作用问题等。由于涉及内容更为广泛，书中只提出了这些问题，但并未作深入讨论。由于学识和水平有限，书中难免有缺点和不当之处，恳请读者批评指正。

作者曾在国家自然科学基金和水利水电科学基金资助下从事水工抗震研究，得以学习和应用子结构法的理论和方法，收益匪浅，由此有兴趣对子结构法开展了一些研究工作，在此向提供资助的两个基金会表示感谢。

最后，谨以此书向同济大学建校 90 周年表示庆贺。

楼梦麟

1996 年 9 月于同济大学

# 目　录

# 第一章　结构振动分析基础

一个结构系统的自由度是指能够完全确定该系统在任何时刻的位置所必需的独立参数的数目。连续结构系统又称为无限自由度系统。严格地讲，任何工程结构系统都是无限自由度系统，但是在实际应用中，为了便于分析各类结构的振动问题，在满足某些近似准则的基础上，将连续结构系统离散化，使得连续分布的物理特性参数可以用有限个“集中”或者“凝聚”参数来描述。这种离散化的各类结构系统又称为多自由度系统。描述连续系统和离散系统的振动问题所需用的数学工具是不相同的，前者借助于偏微分方程，后者借助于常微分方程。本书将主要讨论离散系统振动分析的子结构方法，本章将介绍离散系统振动分析的基本理论和计算方法，它们是学习子结构法的必要知识，也是介绍子结构方法必然要涉及的基本内容。

## 第一节　离散结构系统的运动微分方程

离散结构系统中最简单的情况是单自由度系统，研究单自由度系统的振动是非常有意义的。首先，工程中的许多振动问题可以简化为单自由度系统，所获动力分析结果就能够满足工程实际应用的要求；其次，多自由度系统或者无限多自由度系统的振动问题，有时通过特殊的坐标变换可以转化为多个（或无限多个）单自由度系统振动的组合，使得单自由度系统的振动分析成为这类离散系统或连续系统振动分析的基础。

图 1.1-1 所示质量 $m$、弹簧 $k$、阻尼器 $c$ 组成一个单自由度系

统，在动荷载 $p(t)$ 作用下质量 $m$ 将产生振动。应用达朗贝尔原理可以容易地建立其运动微分方程。作用在质量 $m$ 上的各种力如图 1.1-1(b)所示，根据在质量 $m$ 运动方向上的力的平衡条件可以得到：

$$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=p(t) \tag{1.1-1}$$

式中 $f_S(t)$ 是弹簧变形引起的弹性恢复力，它的大小与弹簧变形成正比，弹簧变形等于质量 $m$ 的位移 $u(t)$；$f_D(t)$ 为阻尼器提供的阻尼力，它的大小与速度 $\dot{u}(t)$ 成正比；$f_I(t)$ 为质心处的总惯性力，它的大小与质心处的加速度 $\ddot{u}(t)$ 成正比。它们分别为：

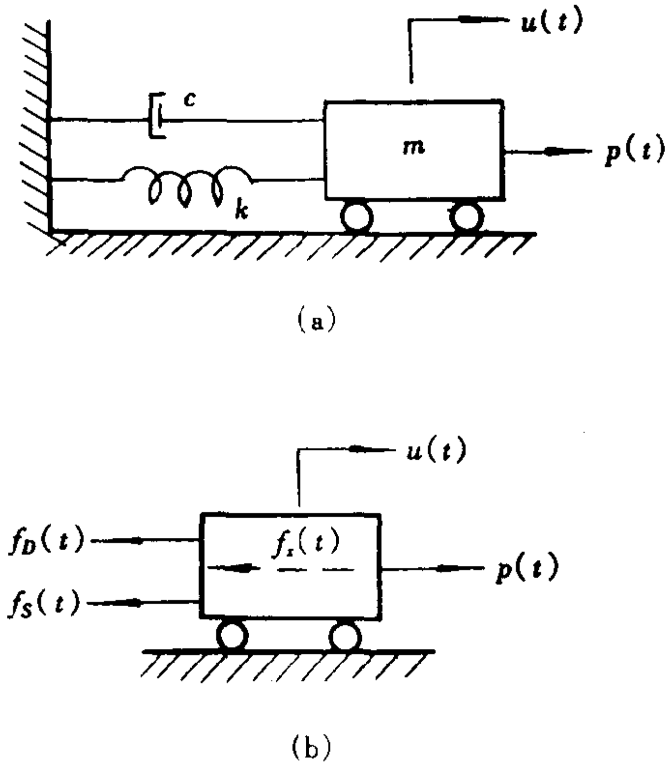


图 1.1-1 单自由度系统的运动(一)

$$\begin{aligned} f_S(t)&=ku(t)\\ f_D(t)&=c\dot{u}(t)\\ f_I(t)&=m\ddot{u}(t)\end{aligned} \tag{1.1-2}$$

上述三式代入(1.1-1)式后就可建立单自由度系统的运动微分方程：

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p(t) \tag{1.1-3}$$

考察图 1.1-2 所示的单自由度系统，由于在质量 $m$ 运动方向上还作用有重力 $W$，这样该系统的力的平衡方程应为：

$$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=p(t)+W \tag{1.1-4}$$

利用(1.1-2)式则有：

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p(t)+W \qquad (1.1\text{-}5)$$

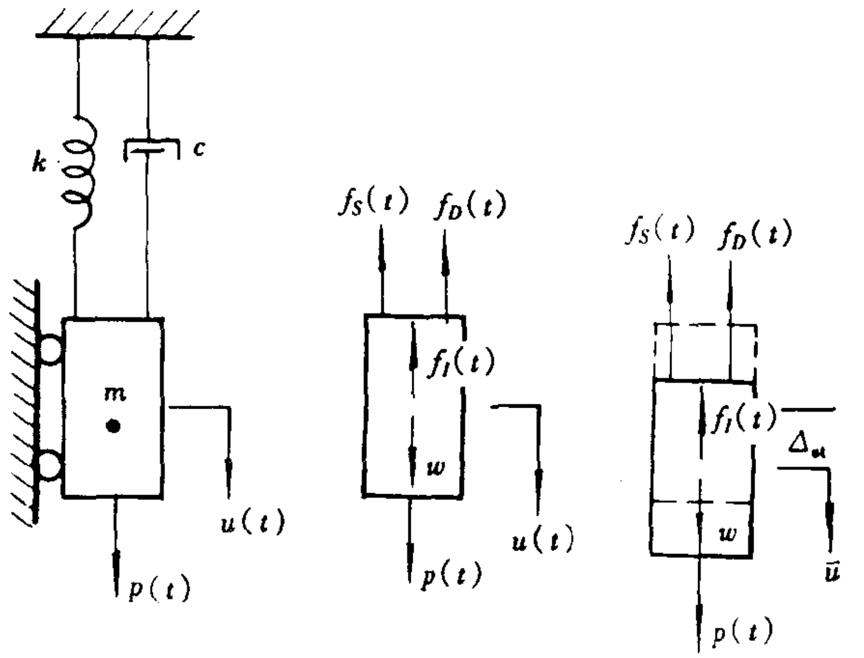



图 1.1-2　单自由系统的运动(二)

应该指出，(1.1-5)式中质量 $m$ 的位移 $u(t)$ 应该包括两部分：无动荷载 $p(t)$ 作用时由重力 $W$ 引起的静力变形 $\Delta_{st}$ 和由动荷载产生的附加动变形 $\bar{u}(t)$，即

$$u(t)=\Delta_{st}+\bar{u}(t) \qquad (1.1\text{-}6)$$

其中 $\Delta_{st}$ 为不随时间变化的常量：

$$\Delta_{st}=\frac{W}{k} \qquad (1.1\text{-}7)$$

把(1.1-6)和(1.1-7)两式代入(1.1-5)式，并注意到 $\ddot{u}(t)=\ddot{\bar{u}}(t)$，$\dot{u}(t)=\dot{\bar{u}}(t)$，则图 1.1-2 所示单自由度系统的运动微分方程为：

$$m\ddot{\bar{u}}(t)+c\dot{\bar{u}}(t)+k\bar{u}(t)=p(t) \qquad (1.1\text{-}8)$$

另一种单自由度系统振动的典型情况如图 1.1-3 所示，由支承运动而不是外部动荷载引起的振动。在实际工程中，这种支承运

动中最有代表性的情况就是地震引起的地面运动。质量 $m$ 的受力分析如图中所示，力的平衡方程为：

$$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=0 \tag{1.1-9}$$

与前一种单自由度系统不同的是惯性力 $f_I(t)$的大小与总加速度成正比。设质量 $m$ 的总位移为：

$$u^t(t)=u(t)+u_g(t) \tag{1.1-10}$$

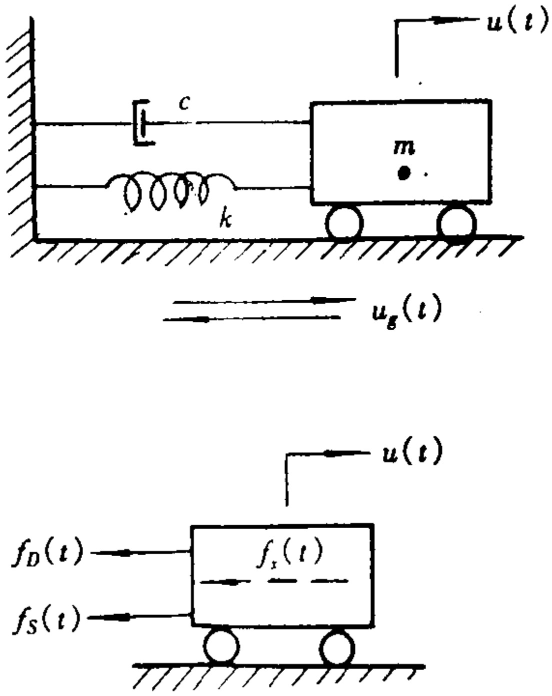


图 1.1-3　单自由度系统的运动(三)

这样：

$$f_S(t)=ku(t)$$
$$f_D(t)=c\dot{u}(t) \tag{1.1-11}$$
$$f_I(t)=m\ddot{u}^t(t)$$
$$=m\ddot{u}(t)+m\ddot{u}_g(t)$$

代入(1.1-9)式后有：

$$m\ddot{u}(t)+m\ddot{u}_g(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=0 \tag{1.1-12}$$

如果支承运动状态是已知的，则将已知项 $m\ddot{u}_g(t)$作为等效动荷载 $p_{\text{eff}}(t)$移至方程右端，得

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p_{\text{eff}}(t) \tag{1.1-13}$$

式中

$$p_{\text{eff}}(t)=-m\ddot{u}_g(t) \tag{1.1-14}$$

如果以质量 $m$ 的总位移 $u^t(t)$来建立运动微分方程，则应为：

$$m\ddot{u}^t(t)+c\dot{u}^t(t)+ku^t(t)=p_{\text{eff}}(t) \tag{1.1-15}$$

式中

$$p_{\text{eff}}(t)=c\dot{u}_g(t)+ku_g(t) \tag{1.1-16}$$

(1.1-13)和(1.1-15)两式说明,支撑运动引起的单自由度系统的运动微分方程也具有与(1.1-3)式相同的形式。

下面继续讨论图1.1-4所示单自由度系统在支承运动作用下的振动问题。显然力的平衡方程为:

$$f_S(t)+f_D(t)+f_I(t)=W \tag{1.1-17}$$

而质量 $m$ 的总位移为:

$$u^t(t)=\Delta_{st}+\bar{u}(t)+u_g(t) \tag{1.1-18}$$

这时

$$f_S(t)=k(\Delta_{st}+\bar{u}(t))$$
$$f_D(t)=c\,\dot{\bar{u}}(t)$$
$$f_I(t)=m(\ddot{\bar{u}}(t)+\ddot{u}_g(t)) \tag{1.1-19}$$

代入(1.1-17)式并利用(1.1-7)式则得

$$m\,\ddot{\bar{u}}(t)+c\,\dot{\bar{u}}(t)+k\bar{u}(t)=p_{\mathrm{eff}}(t) \tag{1.1-20}$$

式中 $p_{\mathrm{eff}}(t)$ 仍如(1.1-14)式所示。

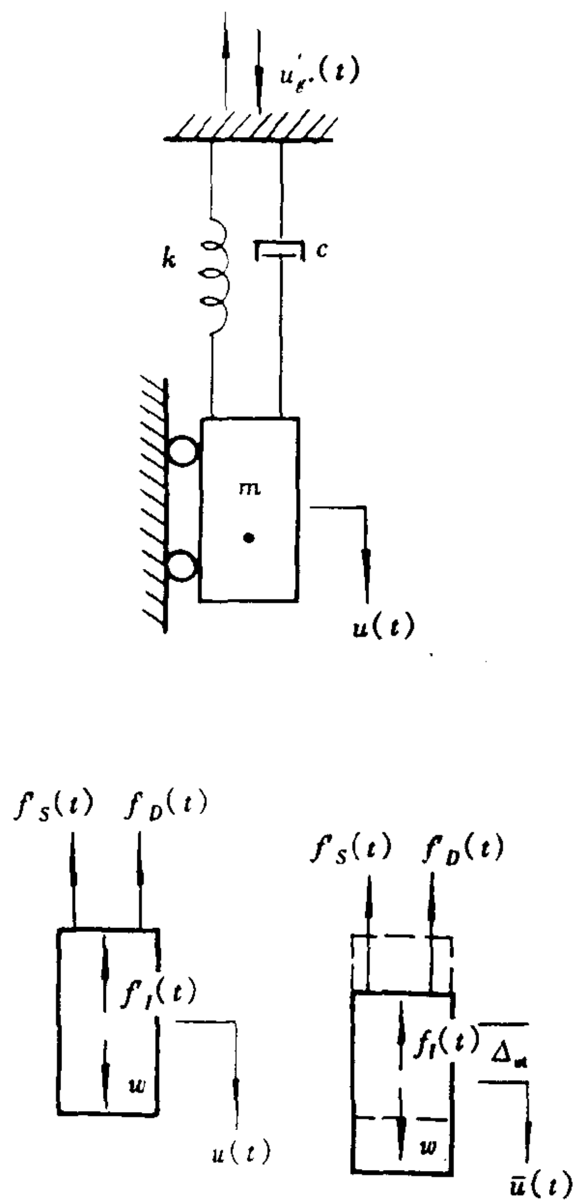



图1.1-4 单自由度系统的运动(四)

若令 $\bar{u}^t(t)=\bar{u}(t)+U_g(t)$ 则有

$$m\,\ddot{\bar{u}}^t(t)+c\,\dot{\bar{u}}^t(t)+k\,\bar{u}^t(t)=p_{\mathrm{eff}}(t) \tag{1.1-21}$$

式中 $p_{\mathrm{eff}}(t)$ 仍如(1.1-16)式所示。

比较(1.1-8)式和(1.1-3)式、(1.1-20)式和(1.1-13)式可以看出,这些方程都有相同形式,但是描述质量运动状态的物理量有所

不同，(1.1-8)式和(1.1-20)式中采用的是相对于质量 $m$ 静力平衡位置的相对位移。这些结果表示，以静力平衡位置建立的运动微分方程可以不涉及重力的影响。然而必须牢记方程中的位移变量是相对于静力平衡位置的动位移。在多自由度系统中这一结论也是适用的。为叙述方便，在以后的运动微分方程中将相对位移 $\bar{u}(t)$ 也表示为 $u(t)$。

建立单自由度系统运动微分方程的过程不难推广到具有 $n$ 个自由度的离散结构系统。对系统的每个自由度建立类似于(1.1-1)式的力的平衡方程：

$$\begin{aligned}
f_{I1}(t)+f_{D1}(t)+f_{S1}(t)&=p_1(t)\\
f_{I2}(t)+f_{D2}(t)+f_{S2}(t)&=p_2(t)\\
&\cdots\\
f_{In}(t)+f_{Dn}(t)+f_{Sn}(t)&=p_n(t)
\end{aligned}\qquad(1.1\text{-}22)$$

写成向量形式为：

$$\{f_I(t)\}+\{f_D(t)\}+\{f_S(t)\}=\{p(t)\}\qquad(1.1\text{-}23)$$

对于每一自由度，有

$$\begin{aligned}
f_{Ii}(t)&=\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\ddot{u}_j(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\\
f_{Di}(t)&=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\dot{u}_j(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\\
f_{Si}(t)&=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}u_j(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}\qquad(1.1\text{-}24)$$

式中 $\ddot{u}_j(t)$、$\dot{u}_j(t)$ 和 $u_j(t)$ 分别为系统 $j$ 自由度处的加速度、速度和位移；$m_{ij}$ 定义为质量影响系数，其含义为在 $j$ 自由度发生单位加速度时在 $i$ 自由度产生的惯性力；$c_{ij}$ 定义为阻尼影响系数，其含义为在 $j$ 自由度发生单位速度时在 $i$ 自由度产生的阻尼力；$k_{ij}$ 定义为刚度影响系数，其含义为在 $j$ 自由度发生单位位移时在 $i$ 自由度产生的弹性恢复力。对于系统的所有自由度，从(1.1-24)式可得

$$\{f_I(t)\}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2n} \\ & & & \cdots & & \cdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{in} \\ & & & \cdots & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{ni} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_i(t) \\ \vdots \\ \ddot{u}_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (1.1\text{-}25a)$$

$$\{f_D(t)\}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ & & & \cdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ & & & \cdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_i(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (1.1\text{-}25b)$$

$$\{f_S(t)\}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ & & & \cdots & & \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \\ & & & \cdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_i(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (1.1\text{-}25c)$$

写成矩阵形式，分别为

$$\begin{aligned} \{f_I(t)\}&=[M]\{\ddot{u}(t)\} \\ \{f_D(t)\}&=[C]\{\dot{u}(t)\} \\ \{f_S(t)\}&=[K]\{u(t)\} \end{aligned} \qquad (1.1\text{-}26)$$

把(1.1-26)式代入(1.1-23)式就可以得到多自由度系统的运动微分方程：

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[C]\{\dot{u}(t)\}+[K]\{u(t)\}=\{p(t)\} \qquad (1.1\text{-}27)$$

式中$[M]$，$[C]$和$[K]$矩阵分别称为多自由度系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，是离散结构系统的物理特性矩阵，为$(n\times n)$阶

方阵。形成这些物理特性矩阵有不同的方法，对复杂结构来说，目前普遍采用有限单元方法进行离散，如何应用有限单元法形成刚度矩阵和质量矩阵可参考有关专著。结构振动阻尼问题是一个很复杂的问题，在很多情况下，常采用比例阻尼的假定，这时

$$[C]=a_1[M]+a_2[K] \tag{1.1-28}$$

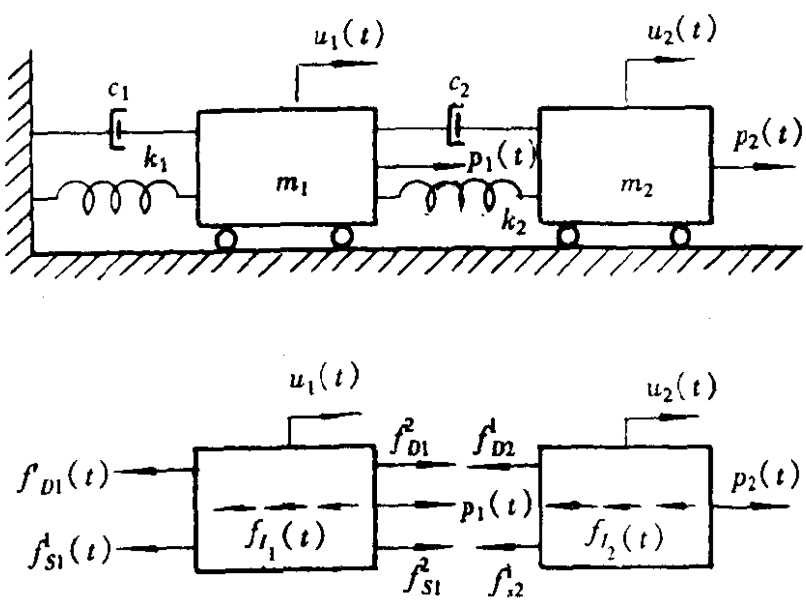



图 1.1-5　双自由度系统

**算例 1.1-1**　图 1.1-5 所示为一双自由度的振动系统。刚性质块 $m_1$ 和 $m_2$ 之间由弹簧 $k_2$ 和阻尼器 $c_2$ 联接，并通过弹簧 $k_1$ 和阻尼器 $c_1$ 联接于支承。在激振力 $p_1(t)$和 $p_2(t)$作用下作水平运动，试建立该系统的运动微分方程。

质块 $m_1$ 和 $m_2$ 的位移坐标原点取为静止平衡位置。在任一瞬时 $t$，$m_1$ 和 $m_2$ 的运动状态分别设为 $u_1(t)$，$\dot{u}_1(t)$，$\ddot{u}_1(t)$和 $u_2(t)$，$\dot{u}_2(t)$，$\ddot{u}_2(t)$，从各质块的受力分析可得：

$$f_{I1}(t)+(f_{D1}^1(t)+f_{D1}^2(t))+(f_{S1}^1(t)+f_{S1}^2(t))=p_1(t) \quad \text{(a)}$$

$$f_{I2}(t)+f_{D2}^1(t)+f_{S2}^1(t)=p_2(t) \quad \text{(b)}$$

式中　　$f_{I1}(t)=m_1\ddot{u}_1(t)$

$$f_{D1}^{1}(t)=c_1\dot{u}_1(t)$$
$$f_{D1}^{2}(t)=c_2(\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t))$$
$$f_{S1}^{1}(t)=k_1u_1(t)$$
$$f_{S1}^{2}(t)=k_2(u_1(t)-u_2(t))$$
$$f_{I2}(t)=m_2\ddot{u}_2(t)$$
$$f_{D2}^{1}(t)=c_2(\dot{u}_2(t)-\dot{u}_1(t))$$
$$f_{S2}^{1}(t)=k_2(u_2(t)-u_1(t))$$

代入力的平衡方程式(a)、(b)两式中，经整理后得此系统的运动微分方程：

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{u}_1(t)+(c_1+c_2)\dot{u}_1(t)-c_2\dot{u}_2(t)\\ &+(k_1+k_2)u_1(t)-k_2u_2(t)=p_1(t) \end{aligned} \tag{c}$$

$$m_2\ddot{u}_2(t)-c_2\dot{u}_1(t)+c_2\dot{u}_2(t)-k_2u_1(t)+k_2u_2(t)=p_2(t) \tag{d}$$

(c)、(d)两式不能单独求解，是一组耦合的 2 阶运动微分方程组，用矩阵可简洁地表示为：

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{e}$$

## 第二节　动力放大因子

在单自由度系统的运动微分方程(1.1-3)式中，如果不存在阻尼力和外部激振力时，系统处于无阻尼自由振动之中：

$$m\ddot{u}(t)+ku(t)=0 \tag{1.2-1}$$

令 $u(t)=u_0\cos\bar{\omega}t$，且 $u_0\neq0$，代入上式后得到

$$(k-\bar{\omega}^2m)u_0\cos\bar{\omega}t=0 \tag{1.2-2}$$

要使上式成立，必须有