实变函数论简明教程

山东科学技术出版社

实变函数论简明教程

烟台师范学院等九院校　编

山东科学技术出版社

一九八五年·济南

内 容 简 介

本书以一维情形为主简明地介绍了勒贝格测度与勒贝格积分的核心内容，同时在有关章节中指出了勒贝格测度与积分推广到多维情形的思路与步骤。

本书注意了师范性特点，文字简练，深入浅出，范例较多，通俗易懂，便于自学。它除了重积分次序交换的富比尼定理外，已包括了勒贝格测度与积分的全部主要内容。因此，可作为师专用教材，还可作为师范院校的教材或参考书，也可作为函授教材或自学者用书。

实变函数论简明教程

烟台师范学院等九院校 编

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 4.375印张 90千字

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数：1—10,000

书号 13195·138 定价 0.90元

前　言

本书是参照教育部1980年颁发的高等师范院校试用的《实变函数与泛函分析》教学大纲中的实变函数部分，结合师专的具体情况编写的。

实变函数论是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的，它的主要内容是勒贝格测度和勒贝格积分理论。这些理论是数学分析课程中微积分理论的进一步发展，它们已经成为分析数学各个重要分支(如函数论、泛函分析、概率论、微分方程等)的必不可少的工具。通过该门课程的教学，将使学生进一步加深对数学分析中微积分理论的理解。

基于本课程的上述目的与意义，考虑到师专的培养目标和教学时间，在本书的编写过程中，我们注意到：

1. 以尽量简明的形式介绍实变函数论的核心内容。为此，以一维情形为主来叙述勒贝格测度与勒贝格积分理论，但在概念的建立及定理的叙述与证明形式上，照顾到把这些概念及定理推广到多维的情形(甚至抽象的情形)，并在适当的地方指出这个推广的具体步骤。由于教学时间限制，不能不删去关于多重积分次序交换的富比尼定理，但本书已包含了勒贝格测度与积分的主要理论。

2. 加强与数学分析课程的联系，重视把勒贝格积分和黎曼积分进行对比。我们希望通过对比，能有助于学生接受新的概念；有助于突出新的积分理论的优越性；同时，还有

助于学生对数学分析中微积分理论有更深一层的认识。

本书全部内容可以在50学时左右讲完。

本书是在1983年《全国部分高师实函与泛函第一次教学讨论会》上，来自师专的代表提出“应编写适用于师专的实函教材”的要求下组织人力编写的。山东师大陈玉波先生、华东师大张奠宙先生自始至终对本书的编写工作给予大力支持，提出了很多指导性意见。参加本书编写的有下列同志：李庆春(烟台师院)，刘芳彬(包头师专)，郑光华(雷州师专)，赵德春(青海师大)，李燕杰(哈尔滨师专)，王成新(泰安师专)，戴成森(常德师专)，周光实(保定师专)，刘永生(衡阳师专)等。初稿完成后由李庆春，刘芳彬，王成新三位同志修改、定稿。在定稿过程中，陈玉波先生仔细地审阅了全书，并提出了若干重要的修改意见。我们对陈玉波、张奠宙先生表示衷心感谢。

编　者

1984年12月

目　录

第一章　集合及其基数

集合论是现代数学的基础．实变函数论，是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的，因此我们先介绍集合论的基本知识．

§1·1　集合及其运算

1．集合概念

集合这个概念，如同几何中的点、线、面一样，是一个不能用别的概念加以定义的原始概念，只能给于一种描述性的说明．具有某种特征，并可以相互区别的事物的全体称之为集合（简称集），其中每个个体事物叫做该集合的元素．例如，自然数的全体成一集合；0与1之间的实数全体成一集合；$[0,1]$上的实函数全体成一集合；直线上开区间(a,b)全体成一集合，等等．

如果A是一个集合，x是A的元素，称x属于A，记为$x\in A$；x不是A的元素，称x不属于A，记为$x\overline{\in} A$．对一个集合来说，任何事物或属于该集合，或不属于该集合，二者必居其一．否则，便不成一集合．

为表明集合A是由元素x组成的，通常写成：$A=\{x\}$．例如，一切直角三角形组成的集合，写成{直角三角形}．

如果一个集合的元素能列举出来，则可在大括号内列出

全体或有代表性的元素来表示它．例如，由四个数 2、3、5、7 组成的集合 A，可表示为 $A=\{2,3,5,7\}$；全体自然数集 N，可写成 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$．

如果一个集合由满足条件 $P(x)$ 的元素 x 组成，则表示为 $\{x|P(x)\}$．例如，平方等于 1 的数 x 组成的集合表为 $\{x|x^2=1\}$；若 $f(x)$是在某一集合 E 上定义的一个实函数，则$\{x|f(x)>a,\ x\in E\}$就是表示 E 中所有使 $f(x)$的值大于 a 的 x 所组成的集合，或写成 $E[f(x)>a]$．

为了研究问题的需要，把引进不含任何元素的集合，称为空集，记为 ϕ．例如，$\{x|x$ 是实数且 $x^2+1=0\}$是一空集．

若集合的元素只有有限个（空集的元素个数认为是 0)，则称之为有限集；其余的称为无限集．

下面研究集的关系．

定义 1　设 A 与 B 是两个集合．如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)；或称 B 包含 A，记为 $B\supset A$．如果 $A\subset B$ 且至少有一个元素 $x\in B$ 而 $x\bar{\in}A$，则称 A 是 B 的真子集．

为方便起见，规定空集 ϕ 是任何集的子集．

包含关系具有下面的性质：

定理 1·1·1　对任何集合 A、B、C，均有

(1) $A\subset A$；

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$．

定义 2　对于集合 A 与 B，若 $A\subset B$，$B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$．

例如，$A=\{-1,1\}$，B 为方程 $x^2-1=0$ 的根作成的集，则 $A=B$．

2. 集合的运算

由于研究问题的需要，经常要进行集合的运算。如果所考虑的一切集都是某个集合 S 的子集，便称 S 为基本集。例如，若限制在实数直线上研究各种点集的运算，则实数直线是基本集。

① 并与交。

定义 3 设 A、B 是二集合。由至少属于 A 与 B 之一的一切元素所组成的集称为 A 与 B 之并（或和），记为 $A\cup B$（或 $A+B$），即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

图 1 是 $A\cup B$ 的示意图。

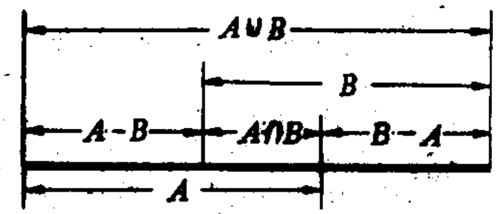

图 1

完全类似地可以定义任意个集的并集。设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是一族集合，其中 α 是集的指标，它在某个固定的指标集 I 中变化；由至少属于一个 A_α 的一切元素所组成的集称为这族集合的并（或和），记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$（或 $\sum\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$），即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{有某个}\alpha\in I,\text{ 使 } x\in A_\alpha\}.$$

注意，由若干个集构成并集时，同时是两个或两个以上的集所公有的元素在并集中只算做一个。

例 1 设 $A_i=\{i\}$，$i=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{1,2,3,\cdots,n\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

例 2 设 $A_\alpha = \{x \mid \alpha - 1 < x \leqslant \alpha\}$, $\alpha \in I$, I 为全体无理数，则

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = (-\infty, +\infty).$$

例 3 设 $A_i = \left\{x \mid -1 + \frac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{i}\right\}$, i 为全体自然数，

则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1).$$

例 4 设对每一个实数 x，集 A_x 是 xoy 平面上横标为 x 的全体点，则 $\bigcup\limits_{x} A_x$ 是整个平面.

定义 4 设 A、B 是二集合. 由既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合称为 A 与 B 的交（或积），记为 $A \cap B$（或 AB），即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

如图 1 所示.

若 $A \cap B = \phi$，则称 A 与 B 不相交；若 $A \cap B \neq \phi$，则称 A 与 B 相交.

同样可以定义任意个集的交集. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是任意集族，其中 α 为指标，I 是指标集；由同时属于每个 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 的一切元素所组成之集称为这集族的交（或积），记为 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$（或 $\prod\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$），即

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{对一切 } \alpha \in I \text{ 有 } x \in A_\alpha\}.$$

例 5 设 $A_i = \left\{x \mid 0 \leqslant x < 1 + \dfrac{1}{i}\right\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,

则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid 0 \leqslant x < 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

例 6 设 $A_i = \left\{x \mid i \leqslant x \leqslant i + \dfrac{3}{2}\right\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,

则
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \phi.$$

例 7 设 $A_i = \left\{x \mid -\dfrac{1}{i} < x < \dfrac{1}{i}\right\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\},\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

定理 1·1·2 集合的并与交满足:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

一般为
$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} (A \cap B_\alpha),$$
$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} (A \cup P_\alpha);$$

(4) 幂等律: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

证明 以(3)的第三式为例.

先设 $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$，则 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$. 于是 $x\in A$ 且有 $\alpha_0\in I$ 使 $x\in B_{\alpha_0}$. 从而 $x\in A\cap B_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$. 这就证明了 $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

再证相反的包含关系. 设 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$，则有 $\alpha_0\in I$，使 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$，即 $x\in A$ 且 $x\in B_{\alpha_0}$，更有 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$，因此 $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$. 于是 $\bigcup_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)\subset A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$.

由证明的两个包含关系即得所要证明的等式.

定理 1·1·3 集的并与交满足包含关系：

(1) $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$；

(2) 若 $A_\alpha\subset B_\alpha$，$\alpha\in I$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha,\quad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

这可由定义直接推出.

② 差与余.

定义 5 设 A、B 是两个集合. 由属于 A 而不属于 B 的一切元素所组成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$（或 $A\backslash B$），即

$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 但 } x\overline{\in}B\}.$$

注意，这里并不要求 $A\supset B$. 一般说来，$(A-B)\cup B$ 未必等于 A. 易证，当且仅当 $B\subset A$ 时才有 $(A-B)\cup B=A$.

若 $S\supset A$，则称 $S-A$ 为 A 关于 S 的余集，记为 $\mathscr{C}_SA$. A 关于基本集 S 的余集简记为 $\mathscr{C}A$.

显然，求余运算具有下面的性质：

定理 1·1·4 (1) $\mathscr{C}S=\phi$, $\mathscr{C}\phi=S$;

(2) $A\cup\mathscr{C}A=S$, $A\cap\mathscr{C}A=\phi$;

(3) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$;

(4) $A-B=A\cap\mathscr{C}B$;

(5) 若 $A\subset B$，则 $\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$。

定理 1·1·5 (1) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$;

(2) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$.

证明 只证(1)，(2)留给读者自证。

设 $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. 于是 x 不属于任何一个 $A_\alpha(\alpha\in I)$，因而 x 属于每个 $\mathscr{C}A_\alpha(\alpha\in I)$，即 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$. 可见左边含于右边. 反之，设 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$，则 x 属于每个 $\mathscr{C}A_\alpha(\alpha\in I)$，即 x 不属于每个 A_α，因而 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. 于是 $x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$. 这就证明了右边含于左边. 由所得的两个包含关系，便知等式成立。

定理 1·1·5 称为狄莫更(De Morgan)对偶原理．借助对偶原理，能将已证明的关于集的某种性质转移到相应的余集上去．该原理的文字叙述是：并集的余集等于每个集的余集的交集，交集的余集等于每个集的余集的并集。

§1·2　集合的基数

对于有限集，元素的个数这一概念是众所周知的。对于无限集，如何理解其元素的"个数"呢？本节的主要任务，是利用一一对应把元素个数概念推广到无限集，建立基数概念，比较基数的大小。

1. 1—1 对应与对等

定义 1　设 A、B 是两个非空集合。如果有某一法则 φ，使对每个 $a\in A$，有唯一确定的 $b=\varphi(a)\in B$ 与之对应，而且对每个 $b\in B$，必有唯一确定的 $a\in A$，适合 $\varphi(a)=b$，则称 φ 是 A 到 B 上的 1—1 对应。记为

$$\varphi:\ A\xrightarrow{1-1}B.$$

例 1　$(0,1]$上的函数 $g(x)=\begin{cases}x, 0<x<1,\\ 0, x=1\end{cases}$ 是 $(0,1]$ 到 $[0,1)$上的 1—1 对应。

利用 1—1 对应可以建立两个集合的对等概念。

定义 2　设 A、B 是两个非空集合.如果存在 A 到 B 上的一个 1—1 对应 φ，则称 A 与 B 对等，记为 $A\sim B$；规定 $\phi\sim\phi$。

例 2　自然数集 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 和偶数集 $E=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$对等。只要令 $n\to 2n(n=1,2,\cdots)$即可。

例 3　区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$和全体实数 R^1 对等，只须对每个$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，令 $\varphi(x)=\mathrm{tg}\,x$。

注 有限集和无限集是经常用到的概念，但迄今尚未给出严格的数学定义。例 2 和例 3 说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等，这对于有限集来说，显然是不可能的。这个现象说明了无限集与有限集的区别。可以证明，任一无限集必然与其一真子集对等，这正是无限集的特征，可用来作为无限集的定义。任何一个集合，若能与其真子集对等，称之为无限集。其余的称为有限集。

显然，对等关系"～"具有下列基本性质。

定理 1·2·1 对任意集合 A、B、C 均有

(1) 自反性：$A \sim A$；

(2) 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

(3) 传递性：若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$。

此外，对等还有下面的一个重要性质。

定理 1·2·2 设集合 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$；集列 $\{A_i\}$ 中任何两个集不相交，集列 $\{B_i\}$ 中任何两个集也不相交。如果 $A_i \sim B_i (i = 1, 2, \cdots)$，则 $A \sim B$。

证明留给读者。

欲判断两集对等，常用下面的定理。

定理 1·2·3（伯恩斯坦（Bernstein）定理） 设 A、B 是两个集合。如果 A 对等于 B 的一个子集，B 又对等于 A 的一个子集，则 $A \sim B$。

证明 由假设，存在 A 到 B 的子集 B_0 上的 1—1 对应 φ，又存在 B 到

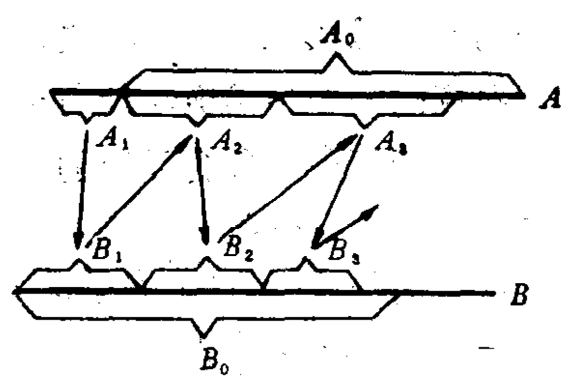

图 2 定理 1·2·3 证明示意

A 的子集 A_0 上的 1—1 对应 ψ（图 2）。

令 $A - A_0 = A_1$,

$\varphi(A_1) = B_1$, $\psi(B_1) = A_2$,

$\varphi(A_2) = B_2$, $\psi(B_2) = A_3$,

$\varphi(A_3) = B_3$, …

由于 φ 和 ψ 都是 1—1 对应，故 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 互不相交，$B_1, B_2, B_3, \cdots$ 也互不相交。显然，由于 φ 是 1—1 对应，所以 $A_n \sim B_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$，故由定理 1·2·2 得知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$。另一方面，由于 ψ 也是 1—1 对应，所以 $B \sim A_0$，$B_k \sim A_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$，故 $B - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sim A_0 - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k+1} = A - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。从而，$A = (A - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \sim (B - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = B$。定理得证。

2. 基数与基数比较

设 A 是一非空有限集。欲知 A 的元素之个数，通常是将 A 的元素一个一个地“数”。而“数”的实质就是把 A 的元素按自然数编号：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。这样，就在 A 与自然数列的某一截段 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 之间建立了 1—1 对应关系，而最后对应的一个自然数 n 即为集 A 的元素的个数。显然，互相对等的有限集所含元素的个数相同。如果把与截段 $\{1\}$ 对等的集归为同一类，则这类集中每一个集所含元素的个数都是 1；把与截段 $\{1, 2\}$ 对等的集归为同一类，则这类集中每一个集所含元素的个数都是 2；一般地，把与截段 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等的集归为同一类，则这类集中每一个集所含元素的个数