

高等学校函授教材  
(兼作高等教育自学用书)

# 电 磁 场 原 理

杨宪章 编

高等教育出版社

---

## 内 容 提 要

本书系根据一九八一年十二月教育部审定的高等工业学校《电工原理函授教学大纲(草案)》电磁场部分编写的,作为电力、自动化类专业函授试用教材,兼作高等教育自学用书。也可供高等学校本科、专科、职工业余大学学生及有关的教师、工程技术人员参考。

全书分七章。内容包括静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题、时变电磁场和平面电磁波。每章开始有“本章学习指导”,介绍该章内容的内在联系和学习方法,章末有小结。各章都选配了适量的例题、习题、思考题和测验题。全部习题均附有答案。

本书文字通顺,条理清楚,思路清晰,例题、习题难易适度,适合读者自学。

本书责任编辑 楼史进

高等学校函授教材  
(兼作高等教育自学用书)

### 电磁场原理

杨宪章 编

高等教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
房山南召印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张22.75 字数 520,000

1985年6月第1版 1985年6月第1次印刷

印数 00,001—7,200

书号 15010·0631 定价 3.95 元

## 前 言

本教材系根据一九八一年十二月教育部在石家庄召开的高等工业学校函授教学工作会议审订的《电工原理函授教学大纲(草案)》电磁场部分编写的。其主要内容与基本要求与高等工业学校本科四年制电类专业的电磁场教学大纲基本一致。书中注明的选学内容,读者可根据自己的情况灵活掌握。

随着科学水平的飞跃发展,电磁场理论已经在工业、农业、国防与科学技术各个领域得到广泛应用。通过本课程的学习要求学生掌握电磁场的基本理论与分析计算的基本方法以及初步的实验技能,为解决工程实际问题和进一步研究电工问题准备必要的理论基础,为学习电力类以及自动化类的专业课打下基础。

本书按一般认识规律安排学习顺序,先讲静态场后讲时变电磁场。

为了加深读者对场的规律的认识,本书采用类比的方法,多次提及研究场问题时的共同途径与思想方法,以期触类旁通;为了使读者能正确理解并使用书中所介绍的定理与公式,本书反复强调所得定理、公式的前提条件以及公式的等效形式;为了适应近代计算技术的要求,本书力图突出边值问题的求解,以及边界条件的重要性;为了使读者在学习本书之后,能够举一反三思索问题,本书例题力求从某一问题(或某一点)开始进行剖析,然后扩大以傍及其它。凡此种种都作为编写本书时所追求的目的,但编者并不认为已经达到上述目的。

我们希望读者在阅读每章时都要先读读“本章学习指导”,那样作也许能使读者站得稍稍高一点,看得稍稍远一点,从内容的内在联系上理出一条思路,这对读者来说将是有益的。根据函授教学的特点本书选用了一些难度较大比较典型的例题,并作了比较详细的分析与讨论,其目的是使读者进一步深化所学理论而且起一个解题的示范作用。因此,在阅读这些例题时,应该学习和了解解题的思路、步骤以及结论的延拓。这样,对于读者解算习题,将有明显的帮助。习题(包括思考题等)的目的在于巩固及深化所学理论,并进行初步应用,对于读者来说,不进行习题的训练,是不可能掌握好课程内容的。本书每章之后,均附有“本章要点”,其目的是起一个提纲挈领的小结作用,以帮助读者进一步了解本章的重点内容及主要公式。

本书由武汉水利电力学院电工原理教研室杨宪章编写。其中第一章至第五章的例题、习题等是由黄学勇同志编写的,黄学勇同志并对全书的编写提出过不少好的建议。李晓明同志绘制了全部插图的底图。本书在编写过程中并得到了教研室全体同志的热情支持与帮助,因而本书应视为集体的成果。

本书由东北工学院周孔章与王运桐两位同志担任主审,并经一九八三年十月在武汉召开的审稿会议讨论通过。参加审稿会议的有东北工学院、东北电力学院、西安交通大学、华中工学院等院校的同志。他们提出了许多宝贵的意见,编者谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者的水平和经验,书中错误和不妥之处可能不少,敬希广大读者批评指正。

编 者

一九八四年七月于珞珈山

# 目 录

|                           |     |                              |     |
|---------------------------|-----|------------------------------|-----|
| 前言                        | 1   | 本章学习指导                       | 133 |
| 第一章 静电场(一)                | 1   | § 3-1 导电媒质中的恒定电场·局外电场        | 134 |
| 本章学习指导                    | 1   | § 3-2 电流密度·欧姆定律及焦耳-楞次定律的微分形式 | 135 |
| § 1-1 电场与电场强度             | 3   | § 3-3 恒定电场的积分形式定理            | 138 |
| § 1-2 电场的叠加原理             | 6   | § 3-4 媒质分界面上的边界条件            | 139 |
| § 1-3 电场的图示               | 13  | § 3-5 恒定电场的微分形式定理与拉普拉斯方程     | 145 |
| § 1-4 真空中的高斯通量定理          | 15  | § 3-6 导电媒质中的恒定电场与电介质中静电场的比拟  | 151 |
| § 1-5 电介质中的高斯通量定理         | 22  | § 3-7 接地电阻的计算                | 155 |
| § 1-6 电场强度 $E$ 的环路定理与电位函数 | 29  | § 3-8 电磁场方程与电路基本定律的关系        | 161 |
| § 1-7 电位梯度                | 35  | 本章要点                         | 163 |
| § 1-8 静电场的边界条件            | 40  | 思考题                          | 164 |
| § 1-9 微分形式的高斯定理           | 45  | 测验作业                         | 164 |
| § 1-10 微分形式的电场强度环路定理      | 49  | 第四章 恒定磁场                     | 166 |
| § 1-11 泊松方程与拉普拉斯方程        | 52  | 本章学习指导                       | 166 |
| § 1-12 静电场的边值问题           | 56  | § 4-1 磁感应强度与毕奥-萨瓦定律          | 169 |
| 本章要点                      | 63  | § 4-2 磁通及其连续性原理              | 174 |
| 思考题                       | 66  | § 4-3 真空中的安培环路定理             | 178 |
| 测验作业                      | 67  | § 4-4 非真空媒质中的安培环路定理          | 180 |
| 第二章 静电场(二)                | 69  | § 4-5 铁磁物质                   | 185 |
| 本章学习指导                    | 69  | § 4-6 两媒质交界面上磁场的边界条件         | 189 |
| § 2-1 静电场的唯一性定理及其应用       | 71  | § 4-7 磁场中的两个微分形式定理           | 192 |
| § 2-2 平行双电轴法              | 77  | § 4-8 无电流区域磁场的标量磁位           | 194 |
| § 2-3 无限大导电平面的镜象法         | 82  | § 4-9 磁场的拉普拉斯方程              | 197 |
| § 2-4 球形导体面的镜象            | 88  | § 4-10 磁场的矢量磁位及泊松方程          | 199 |
| § 2-5 无限大介质交界平面的镜象        | 94  | § 4-11 磁场的镜象法                | 209 |
| § 2-6 电容与电容的计算            | 97  | § 4-12 自感及其计算                | 213 |
| § 2-7 双输电线的电容             | 102 | § 4-13 互感及其计算                | 221 |
| § 2-8 多导体系统的部分电容          | 104 | § 4-14 三相输电线的三相工作电感(选学)      | 228 |
| § 2-9 三相输电线的三相工作电容(选学)    | 114 | § 4-15 载电流回路系统的磁场能量及其分布      | 229 |
| § 2-10 带电导体系统的电场能量及其分布    | 117 | § 4-16 磁场力的计算                | 233 |
| § 2-11 虚位移法计算电场力          | 121 | 本章要点                         | 238 |
| 本章要点                      | 129 |                              |     |
| 思考题                       | 130 |                              |     |
| 测验作业                      | 131 |                              |     |
| 第三章 恒定电场                  | 133 |                              |     |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 思考题 .....                                  | 241 |
| 测验作业 .....                                 | 244 |
| <b>第五章 边值问题</b> .....                      | 245 |
| 本章学习指导 .....                               | 245 |
| § 5-1 位场边值问题的分类 .....                      | 247 |
| § 5-2 分离变量法 .....                          | 249 |
| § 5-3 复位函数法(选学) .....                      | 266 |
| § 5-4 保角变换法(选学) .....                      | 272 |
| § 5-5 均匀媒质中的有限差分法(选学) .....                | 275 |
| § 5-6 位场的模拟法 .....                         | 279 |
| 本章要点 .....                                 | 283 |
| 思考题 .....                                  | 284 |
| 测验作业 .....                                 | 284 |
| <b>第六章 时变电磁场</b> .....                     | 286 |
| 本章学习指导 .....                               | 286 |
| § 6-1 传导电流、运流电流和位移电流 .....                 | 290 |
| § 6-2 全电流定理 .....                          | 293 |
| § 6-3 电磁感应定律 .....                         | 295 |
| § 6-4 麦克斯韦电磁场方程组 .....                     | 298 |
| § 6-5 时变电磁场中不同媒质交界面的<br>边界条件·解的唯一性定理 ..... | 299 |
| § 6-6 电磁场能量·坡印廷矢量及能量流 .....                | 301 |
| § 6-7 电磁动态位及其微分方程 .....                    | 304 |
| § 6-8 电磁波的辐射与似稳条件(选学) .....                | 308 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 本章要点 .....                                    | 313 |
| 思考题 .....                                     | 314 |
| 测验作业 .....                                    | 315 |
| <b>第七章 平面电磁波</b> .....                        | 316 |
| 本章学习指导 .....                                  | 316 |
| § 7-1 理想电介质中的平面电磁波 .....                      | 317 |
| § 7-2 理想电介质中的正弦平面电磁波 .....                    | 322 |
| § 7-3 导电及半导电媒质中的平面电磁波·<br>波的衰减与透入深度 .....     | 325 |
| § 7-4 电流与磁通的趋肤效应·涡流 .....                     | 331 |
| § 7-5 正弦平面电磁波对理想导体平面的<br>垂直入射 .....           | 333 |
| 本章要点 .....                                    | 337 |
| 思考题 .....                                     | 338 |
| 测验作业 .....                                    | 338 |
| <b>附录一 坐标制</b> .....                          | 339 |
| <b>附录二 场论初步·矢量的积分定理与<br/>      矢量算式</b> ..... | 340 |
| <b>附录三 偏微分方程的一般概念与定解<br/>      问题</b> .....   | 344 |
| <b>附录四 非均匀媒质中的有限差分法</b> .....                 | 345 |
| <b>附录五 电磁场场图示例</b> .....                      | 350 |
| <b>附录六 电磁学的量和单位</b> .....                     | 354 |

# 第一章 静 电 场 (一)

## 【本章学习指导】

本章所研究的对象是静电场。所谓静电场是指对于研究者(所采用的坐标系)而言, 电场与激发电场的电荷的分布都是相对静止, 不随时间而改变的。显然, 引入本章的各物理量, 都必须遵循这一规定。

本章主要研究静电场的基本规律以及这些规律的简单应用。读者应该较好地理解这些规律的实质内容, 并学会运用这些规律去求解一些简单的静电场问题。

**1. 静电场的基本特征** 静电场能对静止电荷施力, 这是静电场所反映出来的基本特征。根据这一特征, 我们定义了一个不但能定性, 而且能定量描述静电场每点特性的物理量——电场强度。场中任一点的电场强度为微小正点电荷在该点所受电场力与此正点电荷所带电量之比的极限。其数学表达式为

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta q}$$

由于力是矢量, 所以电场强度也是矢量。能描述静电场每点特性的物理量——电场强度  $\mathbf{E}$ , 乃是本章所研究的主要对象。

**2. 静电场的两个积分形式定理** 静电场的基本规律, 是指描述静电场基本特征的物理量电场强度矢量  $\mathbf{E}$  及与其紧密相关的重要物理量电位移矢量  $\mathbf{D}(=\epsilon\mathbf{E})$  所遵循的规律。通常我们从两个方面来进行研究: 一个方面是从场域空间大范围内, 研究场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  所遵循的规律; 另一方面, 就是从场域内的每一点来研究场量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$  所遵循的规律。

静电场的两个积分形式定理——高斯(通量)定理与电场强度  $\mathbf{E}$  的环路定理, 就是从场域空间大范围内进行研究的所得的结果。

高斯(通量)定理的数学表达式为  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q$ 。此定理说明, 穿过任意闭合曲面  $S$  的电位移矢量  $\mathbf{D}$  的通量, 等于该闭合曲面所包含的自由电荷量的代数和。通俗地说, 就是穿过闭合曲面  $S$  的  $\mathbf{D}$  线(不要忘记  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ , 因而  $\mathbf{D}$  线是  $\mathbf{E}$  线——电力线的  $\epsilon$  倍数), 等于面内自由电荷量的代数和。该定理提供我们一个十分明确的概念, 即:  $\mathbf{D}$  线渊源于自由电荷。这一定理说明了静电场是有源场, 场的有源性是静电场的一种特性。

电场强度  $\mathbf{E}$  的环路定理的数学表达式为  $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。此定理说明, 静电场中电场强度  $\mathbf{E}$  沿任意闭合路径  $l$  的曲线积分值恒为零。实质上这是静电场中功能守恒原理的体现。该定理同样向我们提供了一个十分明确的概念, 即: 电场强度线(电力线)不可能是旋涡线, 如果电力线是旋

涡线,沿旋涡线的积分值将不为零。场的无旋性是静电场的又一特性。具有这种特征的场称之为无旋(涡)场或位场。

由于这两个定理都是以积分的形式出现的,所以我们称之为静电场的两个积分形式定理。

**3. 静电场的两个微分形式定理** 上面我们从场域空间大范围内考察了场的基本特性,得到了两个描绘场的基本规律的积分形式定理,这虽然是必要的,然而还是很不够的。为了能深入了解场域中每一点的情形,有必要在原有两个积分形式定理的基础上进而从场域内的每一点来考察场的特性,这就引出了静电场的两个微分形式的定理,即高斯定理与  $E$  的环路定理的微分形式。由于有两个积分定理为基础,所以微分形式定理的推求并不是很复杂的,我们只需将积分轮廓,围绕场中任意点而无限地进行紧缩,即可得到表征场域各点基本特性的微分形式定理。

现在先来谈谈微分形式的高斯定理。由于我们的目的是要求了解场域每一点上场源(自由电荷)的分布与强弱程度,与该点周围无限小区域内电场的关系,我们只需将闭合曲面  $S$  包围场中任一点(例如  $A$  点)而无限地进行紧缩,使其所包围的体积  $\Delta V$  趋于零,即可达到观察该点具体状态的目的。此时所获得的下述比值的极限:  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ (\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) / \Delta V \right]$  即为场的散度表达式,记为  $\text{div} \mathbf{D}$ 。由于  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ , 故得  $\text{div} \mathbf{D} = \rho$  ( $\rho$  为无限小区域内单位体积的自由电荷量,亦即场中被考察点的自由电荷体密度)。这样我们就可以知道场中每一点所发出的电位移  $\mathbf{D}$  线数(也可按  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  折合为电力线数)等于该点的自由电荷体密度。至此,我们不仅了解到场源在空间范围内的分布,而且还得知其在空间各点上的强弱程度。

仿此,将  $E$  的环路定理数学表达式中的闭合积分路径  $l$ ,围绕某任意点  $A$  无限地进行紧缩,使其所界定的面积  $\Delta S$  趋于零,同样可以达到观察场中每一点状态的目的。当  $\Delta S \rightarrow 0$  的过程中,面元  $\Delta S$  的法线方向取某一特定方向时,下述比值的极限  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[ (\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) / \Delta S \right]$  将达到最大,亦即此方向上将有最大的环量面密度。此方向上以最大环量面密度为模的矢量,即为场的旋度,记为  $\text{rot} \mathbf{E}$ 。由于静电场中恒有  $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 故得  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ , 它说明静电场中各点的旋度恒为零。也就是说,静电场中既不存在旋涡线,也不存在旋涡点。

**4. 静电场中的电位函数与电位梯度** 上面我们主要介绍了电场强度矢量  $E$  与电位移矢量  $D$  所遵循的规律,为求解静电场问题提供了依据。然而,由于电场强度  $E$  (还有电位移矢量  $D$ ) 是一个矢量,直接运用上述所得的方程去求解它们,从原则上讲虽然是可行的,但将引起很大的困难。我们在遵循静电场基本规律的前提下,应该寻求其它途径,使问题相应简化。在这里,我们不应忘记在物理学中,曾经遇到过的比较熟悉的重要物理量——电位  $\varphi$ 。场中任一点  $A$  的电位,定义为从该点搬移单位正点电荷至参考点  $P$  时,电场力所作之功。即  $\varphi_A = \int_A^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。实际上,上述定义式也确定了电位(标量函数)与电场强度(矢量函数)间的积分关系式。在物理学中,我们曾经绘制过电力线、等位线,使得场的分布形象化。场的图形可以帮助我们认识场所具有的特

性,例如有源性、无旋性等,同时也能反映电场强度矢量  $E$  与电位函数  $\varphi$  之间的重要关系。我们知道,电力线是处处与等位线(面)正交的,我们引用电位梯度来描述这一关系,即  $E = -\text{grad}\varphi$ 。它说明,电场中某点的电场强度,等于该点电位梯度的负值,或者说,电场强度的模等于该点电位函数的最大增长率,其方向则与电位函数最大增长方向相反。同样,上式亦是电位(标量函数)与电场强度(矢量函数)间的重要微分关系式。正是由于这一重要关系式将标量函数与矢量函数联系起来,从而使得我们有可能将一个求解矢量函数  $E$  的问题,转化为求解标量函数  $\varphi$ 。求解标量函数,比求解矢量函数要容易得多,这显然是一个较为简便的途径。

由于引入了电位函数,使得求解静电场的问题大大简化,人们甚至于将静电场的求解称之为位场的求解。因此电位函数的作用就显得特别重要。

5. 泊松方程和拉普拉斯方程 前面我们就静电场的规律进行了阐述与介绍,在上述分析的基础上,我们要进一步将这些规律综合<sup>①</sup>为一个统一的能够描述场规律的微分方程,这就是以二阶偏微分方程形式出现的电位函数所必须满足的泊松方程或拉普拉斯方程。对于空间有自由电荷体密度  $\rho$  存在的场域,电位函数  $\varphi$  满足泊松方程。而对于自由电荷体密度  $\rho = 0$  的场域,电位函数  $\varphi$  则满足拉普拉斯方程。这样一来,求解静电场的问题,最终就转化为一个求解泊松方程或拉普拉斯方程(二阶偏微分方程)中电位函数  $\varphi$  的问题。

二阶偏微分方程的求解问题,读者已在有关数学物理方程的课程中学习过。求解一个偏微分方程,必须给定边界条件,否则方程的解不确定。因而静电场中电位函数的求解问题,就是求满足给定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解,通常称之为边值问题。我们将用比较多的篇幅来叙述它。

读者应该了解,“本章学习指导”只是想从教材内容的逻辑关系方面帮助大家理出一条思路。它的内容并不包括本章的所有重点与难点。“本章学习指导”也许不能一次读通,读懂,需在学习过程中反复阅读,才能取得较好的效果。

## § 1-1 电场与电场强度

**电场的物质性** 摩擦生电(或接触起电)这一现象的最古老的发现者是我们的祖先和古希腊人。在我国古代的书籍中,曾有“玳瑁拾芥”的记载。现在我们已经熟知:当将两种不同物质的物体相互摩擦后,两物体将分别带有数量相等而符号相反的电荷,即彼此性质不同的正电荷与负电荷。而且我们还知道,带有相同性质电荷的物体相互排斥,带有不同性质电荷的物体相互吸引。这些事实表明:无论是相同性质电荷之间,还是不同性质电荷之间均有力在相互作用着。

法国人库仑于 1785 年从实验出发,对两点电荷间所存在的力作了全面的定量的描述。这就是著名的库仑定律。但是,对于电荷间力的存在这一现象之本质的解释,却曾存在着各种流派。归纳起来有两种基本观点:一种观点认为带电体之间的相互作用力是所谓“超距力”,即物体间可

<sup>①</sup> 这里指的是综合研究,即将相互关联的事物或现象综合起来,与电路综合的涵义不同。

以超越距离而相互作用。也就是说,这种力既不需要时间也不需要经过物质传递。另一种观点认为在带电体间,存在着某种充满整个宇宙的旋涡状物质“以太”,当物体投入其中时,便形成相互间作用着的所谓的“电性力”。这种观点,实质上是将存在于带电体周围的客观物理实在,代之以并不存在的所谓“以太”。由于近代物理学的发展,人们在近数十年内已正确地认识到:在带电体周围的空间,存在着一种特殊运动形态的物质——电场。当电荷(或带电体)进入电场时,电荷(或带电体上的电荷)将受到电场给予的力。这种力,人们通常称之为电场力。电场能对电荷施力作功,说明电场具有能量,这是电场物质性的重要表现。两点电荷间(或两带电体间)的力,正是通过电场而进行传递的。因此十分清楚:电荷(或带电体)周围存在着一种特殊运动形态的物质——电场。电荷受到的作用力正是其它电荷激发的电场所施加的。这里,我们称之为“特殊”,是因为电场与一般“实体”的存在形式不同,而人们对于“实体”的存在易于感觉,又易于理解。

**电场强度** 前面我们已经谈到,静电场是一种特殊运动形态的物质,它的基本特征表现在能对静止电荷施力。要研究电场,只有有关电场性质的概念显然是不够的,还要有一个能定量描述电场基本特征的物理量,并对它进行研究,探求它所遵循的规律,进而加以掌握和应用。为此,我们将微小正点电荷在电场中任一点所受电场力与此微小正点电荷电量之比的极限定义为该点的电场强度。或者说,场中任一点的电场强度在数值上相当于单位正点电荷在该点所受之力,其方向则为正点电荷的受力方向。在不致引起误解的场合下,我们有时将电场强度简称为场强,通常以  $E$  表示。其数学表达式为

$$E = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta q} \quad (1-1-1)$$

式中:  $\Delta q$  为正的试验点电荷的电量,在国际单位制(SI)中,电量的单位为库仑(C)。

$\Delta F$  为正的试验点电荷所受的电场力,单位为牛顿(N)。因而电场强度的单位为牛顿每库仑(N/C)。在国际单位制(SI)中场强的单位为伏特每米(V/m),  $1\text{V/m} = 1\text{N/C}$ 。

上述电场强度定义式的含义是相当完备的。它指明了只有当正的试验点电荷所具有的电量微小且  $\Delta q \rightarrow 0$  时,表达式有效。通常物理上的解释是,只有当  $\Delta q$  充分小,而不致使被研究电场发生畸变时,亦即被研究场源电荷分布不发生改变时,所测得的场中每点的场强  $E$  才是有效的。显然,这容易为我们所理解。因为测试点电荷所带电量过大,它本身所激发的电场同样将施力于被研究电场的场源电荷,此时若场源电荷分布于导体表面,则场源电荷将受力而移动,致使其分布改变,因而电场亦随之而畸变。当然,如果在某些特殊情况下,我们判断场源电荷分布将不受正的试验点电荷电场的影响,即使正点电荷所带电量较大,定义仍然有效。

**点电荷的电场强度** 前面我们写出了电场强度的普遍定义式,它能反映我们研究对象的特征,然而从研究问题的方法来说,我们应该从这一普遍定义式出发,去研究某些具体的电场,看看从它们具体的场强表达式中,能给我们什么样的启示,然后,再回到问题的普遍性上来,研究它们所具有的规律。我们将首先选择点电荷电场进行研究。为了研究点电荷电场,我们必须重温一下库仑定律。库仑定律指出:真空中,两点电荷相互作用力的大小,与其各自所带电量的乘积成正比,而与它们之间的距离平方成反比。作用力的方向在两电荷的连线上,同性电荷相斥,异性

电荷相吸。[图(1-1-1)]。

库仑定律的矢量表达式为

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}_{21}^0 \quad (1-1-2)$$



图(1-1-1) 两点电荷的作用力

式中:  $\mathbf{F}_{21}$  表示点电荷  $q_1$  对点电荷  $q_2$  的作用力, 单位为牛顿(N)。

$\mathbf{F}_{12}$  表示点电荷  $q_2$  对点电荷  $q_1$  的作用力, 单位为牛顿(N)。

$q_1, q_2$  表示点电荷 1、2 所带的电荷量(代数量), 单位为库仑(C)。

$R$  表示两点电荷间距离, 单位为米(m)。

$\mathbf{R}_{21}^0$  为由点电荷 1 指向点电荷 2 的单位矢量, 它的作用仅表示方向, 如图(1-1-1)所示。 $\mathbf{R}_{12}^0$  是与  $\mathbf{R}_{21}^0$  方向相反的单位矢量。

$\epsilon_0$  表示媒质①为真空时的媒质电容率(或称真空介电常数), 单位为法拉每米(F/m)。此处可理解为空间媒质对作用力大小的影响程度。由物理学知  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

式(1-1-2)中若取电荷  $q_2$  之值为 1C, 即  $q_2 = 1\text{C}$ , 虽然 1C 是一个数目相当大的电荷量, 但是由于  $q_1$  为点电荷(电量集中在一点上), 此时我们可以判定其分布是不会受到电荷  $q_2$  电场的影响, 因此根据电场强度的定义, 此时点电荷  $q_1$  的电场对于电荷  $q_2$  的作用力即等于电荷  $q_2$  所在点的电场强度, 因而点电荷  $q_1$  在该点的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}_{21}^0 \quad (1-1-3)$$

若将表达式(1-1-3)改写为一般形式, 则有

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}^0 \quad (1-1-4)$$

这就是点电荷场强的普遍表达式。它表征点电荷  $q$  周围各点电场的强弱与方向。上式中  $R$  为从点电荷  $q$  指向场中任意被研究点  $A$  的单位矢量。

应该指出的是, 与库仑定律一样, 这一表达式只适用于点电荷的情况。然而我们没有必要拘泥于数学上关于点的概念。在数学中的“点”没有大小而仅有几何位置。在实际问题中, 只要判定带电体的几何尺寸远小于带电体至被研究点的距离时, 不管带电体的形状如何, 均可认为式(1-1-4)成立。亦即物理意义下的“点”是相对而言的。事实上, 库仑定律就是这样建立起来的。

对于两点电荷间的作用力, 赋以通过电场来传递的物理解释后, 我们将库仑定律表达式(1-1-2)按点电荷的场强公式加以改写, 则有

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}_{21}^0 = q_2 \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}_{12}^0 = q_1 \mathbf{E}_2$$

其中  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  分别为点电荷  $q_1, q_2$  所激发的电场强度。经过改写后的库仑定律表明, 点电荷  $q_1, q_2$  间的作用力是电场作用的结果, 或者说是通过电场进行传递的。

① 在静电场中, 媒质即指电介质(或简称介质)。

**例 1-1-1** 真空中设  $xy$  平面上有三个点电荷, 其中  $q_1 = -16 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $q_2 = -3 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $q_3 = 50 \times 10^{-9} \text{C}$ , 分别位于  $xy$  平面上的  $P_1(4, 0)$ ,  $P_2(0, 3)$  和  $P_3(4, 3)$  三点, 求坐标原点处的电场强度。坐标单位为米(m)。

**解** 设  $x, y$  轴的单位向量分别为  $e_x, e_y$ 。在坐标原点处三个点电荷的电场强度分别为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} (-e_x) \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{16 \times 10^{-9}}{4^2} e_x = 9e_x \text{ V/m} \end{aligned}$$

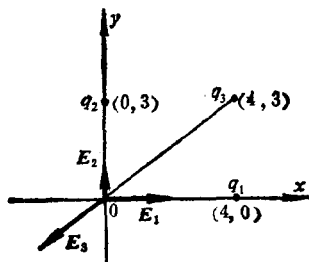
$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} (-e_y) \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-9}}{3^2} e_y = 3e_y \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} \left( -\frac{4}{5}e_x - \frac{3}{5}e_y \right) = -14.4e_x - 10.8e_y \text{ V/m}$$

由力的叠加原理可知, 在坐标原点处, 正的试验点电荷  $q_0$  所受电场力为  $F = q_0 E_1 + q_0 E_2 + q_0 E_3$ , 根据电场强度的定义:  $E = \frac{F}{q_0}$ 。

最后得坐标原点的电场强度

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 = (9 - 14.4)e_x + (3 - 10.8)e_y \\ &= -5.4e_x - 7.8e_y \text{ V/m} \end{aligned}$$



例 1-1-1 图

#### 思考题

1-1-1  $E = \frac{F}{q_0}$  与  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  二式的意义有什么区别? 第一式中对  $q_0$  有什么要求?

#### 习题

1-1-1 真空中两个点电荷  $q$  和  $-pq$  ( $0 < p < 1$ ) 相距  $d$ , 求电场强度为零的点与点电荷间的距离。

(在  $q$  至  $-pq$  连线的延长线上, 距后者为  $\frac{\sqrt{p}d}{1-\sqrt{p}}$ )

1-1-2 两同号的点电荷  $q_1 = q$ ,  $q_2 = 3q$ , 在真空中相距  $d$ 。问在两点电荷的连线上, 在哪一点上它们各自产生的电场强度大小、方向均相同。

(在  $q_2$  至  $q_1$  连线的延长线上, 距  $q_1$  为  $1.37d$ )

## §1-2 电场的叠加原理

**电场的叠加原理** 前面我们导得了最简单的点电荷电场的场强计算公式。我们的目的, 并不仅仅为了去解决点电荷场强的计算问题, 而在于能将它引伸, 去解决场源电荷作任意分布情况下的场强计算问题, 并由此引伸出更有意义的结论来。

在物理学中已经明确指出过, “力”服从叠加原理。电场强度是单位正点电荷所受的电场力。

显然,在媒质电容率与场强无关的情况下(称这种媒质为线性的),电场强度亦服从叠加原理。因而在由若干个点电荷共同激发的电场中,任一点的电场强度,等于每一个点电荷单独存在时,该点所具有的电场强度的矢量和(矢量叠加)。这一结论我们称之为场的叠加原理[图(1-2-1)]。

即

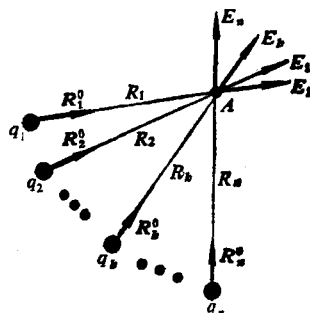
$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \cdots + E_k + \cdots + E_n = \sum_{k=1}^n E_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 R_k^2} R_k^0 \end{aligned} \quad (1-2-1)$$

式中:  $q_k$  为点电荷  $k$  所具有的电量。

$R_k$  为点电荷  $k$  所处位置至被研究点的距离。

$R_k^0$  为从点电荷  $k$  的位置指向被研究点方向上的单位

矢量。



图(1-2-1) 场强叠加性示意

**电荷作任意分布时电场强度的计算** 静电场中的叠加原理,看上去似乎只是重复地叙述了力的矢量叠加原理。但是如果我们细心地去考察各种复杂的电场,我们将发现:从理论上讲,电荷作任意分布的复杂电场都可以运用叠加原理加以解决。例如:真空中,电荷沿空间某一曲线作线分布或电荷沿空间某一曲面作面分布,或电荷沿空间某一体积作体分布时,我们可以将此任意分布的电荷进行无限的分割,分割后的每一无限小电荷元则视为点电荷元。这样我们就可以认为场是无限多个连续分布的点电荷元所共同激发的。利用场的叠加原理,即可求得场中每点的电场强度。

我们先研究电荷作线状分布的情况。设有一曲线  $l$ , 电荷沿此曲线作线状分布。为了分析方便我们引入电荷线密度  $\tau$  的概念, 电荷线密度  $\tau$  的定义为

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1-2-2)$$

式中  $dq$  为线元  $dl$  上所具有的电量。可以看出, 电荷线密度  $\tau$ , 等于微小线元  $dl$  上所具有的电荷载量  $dq$  与该线元  $dl$  之比, 其单位为库仑每米(C/m)。当电荷沿线分布均匀时,  $\tau$  为常量; 当电荷沿线分布不均匀时, 它是空间坐标的函数。由式(1-2-2)有  $dq = \tau dl$ , 由于  $dl$  为一无限小量, 因而我们此时可视  $dq$  为点电荷电量, 此时其在空间某点所产生的电场强度表达式为

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^0 \quad (1-2-3)$$

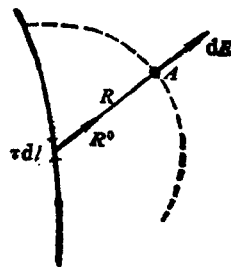
故当电荷沿空间曲线  $l$  连续分布时[图(1-2-2)], 如求空间任一点的场强表达式, 我们只需将式(1-2-3)沿曲线  $l$  进行积分即得

$$E = \int_l \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^0 \quad (1-2-4)$$

式中:  $R$  为线元  $dl$  至被研究点的距离。

$R^0$  为线元  $dl$  指向被研究点方向上的单位矢量。

当电荷沿某空间曲面作面分布时, 我们引入电荷面密度的



图(1-2-2) 线分布电荷的线电荷元在空间点A产生的场强

概念, 电荷面密度  $\sigma$  的定义为

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1-2-5)$$

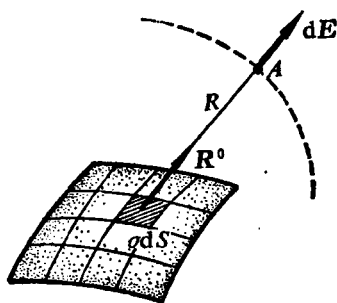
式中  $dq$  为面元  $dS$  上所具有的电荷量。可以看出, 电荷面密度  $\sigma$ , 等于微小面元  $dS$  上所具有的电荷量  $dq$  与该面元  $dS$  之比, 其单位为库仑每平方米 ( $C/m^2$ )。同样, 当电荷沿曲面均匀分布时,  $\sigma$  为常量, 当电荷沿曲面分布不均匀时, 它为空间坐标的函数。

由式(1-2-5)有  $dq = \sigma dS$ , 因  $dS$  为一无限小量, 显然我们亦可将  $dq$  视为点电荷电量, 故此, 当电荷沿空间曲面  $S$  连续分布时[图(1-2-3)], 仿前得空间任一点的电场强度表达式为

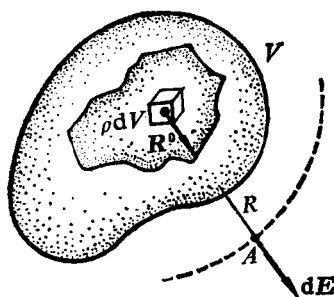
$$E = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^0 \quad (1-2-6)$$

式中:  $R$  为面元  $dS$  至研究点的距离。

$R^0$  为面元  $dS$  指向研究点方向上的单位矢径。



图(1-2-3) 面分布电荷的面电荷元在空间点  $A$  产生的场强



图(1-2-4) 体分布电荷的体电荷元在空间点  $A$  产生的场强

与前述的处理方法相同, 当电荷在某空间作体积分布时, 我们引入电荷体密度  $\rho$  的定义式为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (1-2-7)$$

可以看出, 电荷体密度  $\rho$  等于微小体积元  $dV$  所具有的电荷量  $dq$  与该体积元  $dV$  之比,  $\rho$  的单位为库仑每立方米 ( $C/m^3$ )。把  $dq = \rho dV$  视为点电荷后, 则电荷在某空间作体积分布时[图(1-2-4)], 空间任一点的电场强度表达式为

$$E = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^0 \quad (1-2-8)$$

式中:  $R$  为体积元  $dV$  至研究点之距离。

$R^0$  为体积元  $dV$  指向研究点方向上之单位矢量。

在我们运用上述积分公式求解空间任一点的电场强度时, 应该明确一个问题, 即这里所指的“密度”, 乃是平均意义下的密度概念。也就是说, 对相当数量的基本电荷粒子所占据的空间体积取平均值, 而这一体积的尺度相对于宏观物体的尺度来讲又是足够微小的。因为前面所引入的电荷线密度、电荷面密度、电荷体密度的概念是假定电荷连续分布为前提的, 只有如此, 电荷密度

的定义式才有意义。但是实际上基本电荷粒子在空间的分布是不连续的,倘若想象为点状分布,则在不连续的点处,由于此处无电荷分布,  $\rho$  值将为零,而在点状电荷分布处,因为点所占据的空间体积为零,则  $\rho$  为无穷大,因而定义式没有意义。大家知道,基本电荷粒子本身所占有的体积尺度,总是远小于基本电荷粒子间距离的几何尺度,从微观上讲电荷不可能实现连续分布,因此这里引入的是平均意义下的密度概念,是从宏观的观点来研究宏观电现象的有效作法。就象天空的云彩一样,它是由彼此相隔一定距离的许多悬浮水珠组合而成,然而从大的方面来看,我们却可以认为它是连续分布的。

应该指出,式(1-2-4)、(1-2-6)、(1-2-8)它们在形式上似乎是简单的,然而在解决实际问题时,往往受到客观条件的种种限制。例如我们通常很难知道实际问题中电荷的分布状态以及进行积分时会遇到数学上的困难(在许多情况下,我们虽能列出积分表达式,却无法得出积分结果)。因而从实际的观点来说它们能解决的问题是有限的。

**例 1-2-1** 真空中长度为  $2L$  的均匀带电直线,它所带的电荷量为  $q$ ,试确定直线外任一点处的电场强度。

**解** 建立一直角坐标系,令  $z$  轴通过带电直线,坐标原点  $o$  重合于带电直线的中点,如图所示。由于电场对带电直线作轴对称分布,因此研究坐标平面  $xoz$  上的电场分布具有普遍性。取圆柱坐标系  $\alpha=0$  的半平面上任一点  $P$ ,令其圆柱坐标为  $(r, 0, z)$ ,此点即在平面  $xoz$  上。下面我们将研究场点  $P$  处的电场强度。

带电直线的电荷量  $q$  在长度  $2L$  上均匀分布,因此直线上的线电荷密度  $\tau$  为

$$\tau = \frac{q}{2L}.$$

在带电直线上坐标  $z=l$  处截取线元  $dl$ ,线电荷元的电量为  $dq=\tau dl$ ,线电荷元  $dq$  在点  $P$  处的场强  $dE$  的方向沿着线元  $dl$  到点  $P$  的矢径方向。设正  $z$  轴与该矢径的夹角为  $\theta$ ,线电荷元  $dq$  到场点  $P$  的距离为  $R$ ,则场强  $dE$  的大小为

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

根据叠加原理,场点  $P$  处的场强  $E = \int_{-L}^L dE$ ,即由所有的线电荷元  $dq$  在点  $P$  处的场强  $dE$  进行矢量合成。这时,必须注意到各线电荷元在场点  $P$  处场强  $dE$  的方向是不同的。因此,一般总是先求出每一矢量  $dE$  在各坐标轴上的分量,把矢量之和转化为各坐标分量的代数和,或是把矢量积分转化为标量积分。

设场强  $dE$  的  $z$  轴分量为  $dE_z$ ,径向分量为  $dE_r$ ,则有

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta$$

$$dE_r = dE \sin\theta = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta$$

式中的  $l, R, \theta$  对于不同的线电荷元都是变量,但它们是有联系的,可统一用一个变量  $\theta$  来表示

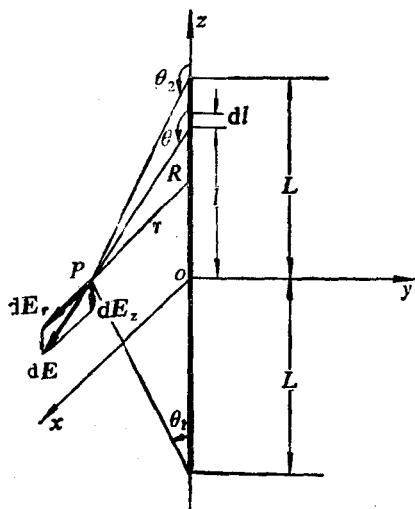
$$\begin{aligned} R &= r \csc \theta \\ l &= z - r \cot \theta \\ dl &= r \csc^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

因而点  $P$  处场强  $E$  的  $z$  轴分量  $E_z$  为

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{-L}^L dE_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r r \csc^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 (r \csc \theta)^2} \cos \theta d\theta \quad (I) \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \end{aligned}$$

场强  $E$  的径向分量  $E_r$  为

$$\begin{aligned} E_r &= \int_{-L}^L dE_r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r r \csc^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 (r \csc \theta)^2} \sin \theta d\theta \quad (II) \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$



例 1-2-1 图

式中  $r$  为场点到带电直线的距离,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别是带电直线的两端点到场点的矢径方向与正  $z$  轴方向之间的夹角。

我们可以进一步看到, 当  $L \rightarrow \infty$ , 即带电直线为无限长直线时, 有  $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$ 。这时, 由式 (I) 和 (II) 可得到:  $E_z = 0, E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$ , 电场强度只有径向分量。

若保持线电荷密度  $\tau$  不变, 当  $L \rightarrow \infty$ , 则  $q = 2L\tau \rightarrow \infty$ , 因此无限长的带电直线实际上是不存在的。但是, 这并不等于说, 在理论上研究无限长带电直线的电场是没有实际意义的。我们将对此作一些深入的讨论。

#### (1) 在长度为 $2L$ 的带电直线中点附近的电场强度 $E$

所谓带电直线的中点附近, 指的是这样一个区域, 其中的任一点  $P(r, \alpha, z)$  到该中点的距离较之带电直线的长度要小得多。本例中点  $P(r, 0, z)$  的坐标如满足关系式:  $r \ll L$  和  $|z| \ll L$ , 它就在中点附近。这时, 把式 (I)、(II) 用场点的坐标表示为

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (III)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{r}{[(L-z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{[(L+z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$E_r = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (IV)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{L+z}{[(L+z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{z-L}{[(L-z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

式 (III) 中的分式项即

$$\frac{r}{[(L-z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{[(L+z)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{r}{L} \left[ \left( 1 + \frac{z^2 + r^2 - 2Lz}{L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{z^2 + r^2 + 2Lz}{L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

根据牛顿二项式公式, 可以把  $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$  展开成台劳级数

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots \quad (|x| < 1)$$

分别令  $x = \frac{z^2 + r^2 - 2Lz}{L^2}$  及  $\frac{z^2 + r^2 + 2Lz}{L^2}$ , 则可按牛顿二项式公式把前一分式加以展开。因为  $r/L$

$\ll 1$ ,  $|z|/L \ll 1$ , 若只保留展开级数中含  $\frac{r}{L}$ ,  $\frac{z}{L}$  的一阶项, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{r}{L} \left[ \left( 1 + \frac{z^2 + r^2 - 2Lz}{L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{z^2 + r^2 + 2Lz}{L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ & \approx \frac{r}{L} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2 + r^2 - 2Lz}{L^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2 + r^2 + 2Lz}{L^2} \right) \right] \\ & \approx 2 \left( \frac{r}{L} \right) \left( \frac{z}{L} \right) \\ & \approx 0 \end{aligned}$$

同样地, 式(IV)中的分式项为

$$\begin{aligned} & \frac{L+z}{[(L+z)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z-L}{[(L-z)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \\ & \approx \frac{L+z}{L} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2 + r^2 + 2Lz}{L^2} \right) - \frac{z-L}{L} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2 + r^2 - 2Lz}{L^2} \right) \\ & = 2 - \frac{3Lz^2 + Lr^2}{L^3} \\ & \approx 2 \end{aligned}$$

把上面的展开结果代入式(III)、(IV)中, 得  $E_z = 0$ ,  $E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$ 。

由此可见, 有限长的带电直线中点附近的电场可以抽象为无限长带电直线的理想情况加以研究。凡是场点到带电直线的距离较之它到直线两端的距离小得多时, 运用无限长带电直线的场强计算公式来求解, 可以获得足够精确的结果。其实, 电荷并不是分布在没有粗细的几何直线上, 而是分布在导线的表面上, 只是当导线的粗细比起场点到导线的距离小得多时, 我们认为电荷集中在轴线上。由此可见, 理论上所研究的问题, 都是工程技术中常常遇到的实际问题在一定条件下抽象出来的。通过下面类似的讨论, 我们将更好地理解“点电荷”的概念。

## (2) 在远离长度为 $2L$ 的带电直线处的电场强度 $E$

考虑从坐标原点  $o$  出发的某一矢径方向, 即保持  $\text{tg} \theta = \frac{r}{z}$  不变的方向上, 对于  $L/r \ll 1$ ,  $L/|z|$

$\ll 1$  的场点  $P(r, o, z)$  处的场强  $E$ 。

仍用牛顿二项式展开, 得到