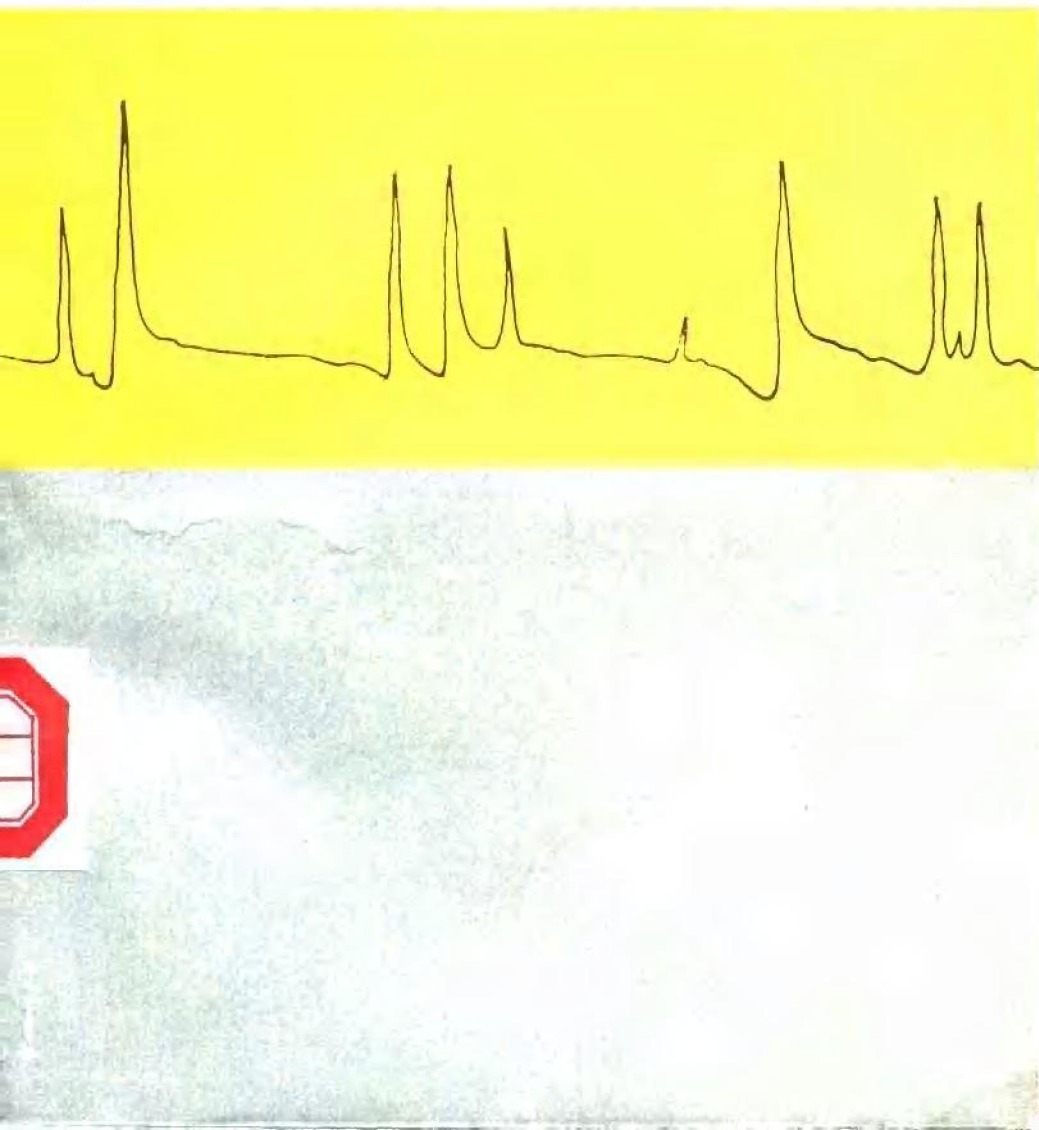


原子核理论

(核反应部分)

徐躬耦 王顺金著·YUANZIHE LILUN·高等教育出版社·



原子核理论

(核反应部分)

徐躬耦 王顺金 著

高等教育出版社

内 容 提 要

这部《原子核理论》共分三部分，分三册出版。第一册为核力部分，第二册为核结构与核衰变部分，均已先后出版。本书为第三册，这一部分系统地全面地阐述了核反应的理论及其发展趋势，内容丰富，取材较新，反映了核反应理论研究的最新成果。

本书层次分明，概念清晰。全书扼要地介绍了运动学方面的问题以后，首先讨论了少数自由度参与的直接反应，然后讨论了大量自由度参与的复合核反应，最后讨论了随时间演化的中间过程反应，在轻离子核反应理论的基础上进一步讨论重离子核反应。

本书可作为高等学校核物理专业和理论物理专业的教学用书，也可供科技工作者参考。

责任编辑：李松岩

(京)112号

原 子 核 理 论

(核反应部分)

徐躬耦 王顺金 著

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张 14.875 字数 370 000

1992 年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数 0001—1 312

ISBN 7-04-002323-7/O·791

定价 9.10 元

前 言

核反应理论是原子核理论的重要组成部分。核反应问题和核结构问题同属原子核多体问题,二者有紧密的联系。但是核反应问题又有自己的特点。

在核反应问题中,入射粒子与靶核所组成的体系处在非束缚态。核反应所研究的是体系从碰撞前的一种状态经核力作用进入碰撞后的另一种状态的跃迁几率或反应截面。本书第一章首先讨论了核反应问题的这种表述方式。

推广壳模型观点,可以考虑入射粒子在靶核的平均势场作用下的运动。但入射粒子与靶核间的作用可使靶核激发。如果只激发了靶核内的个别自由度,则反应机制比较简单,称为直接反应。本书第二、三两章讨论了这些问题。

入射粒子与靶核作用,损失能量足够多时,与靶核一起形成了一个复合系统。此复合系统的激发能还将逐渐分布到越来越多的自由度,形成极端复杂的复合核状态。这样的反应可基本上分为形成复合核与复合核随后的衰变两个阶段,称为复合核反应。直接反应主要与核结构中的低激发谱联系,而复合核反应则与激发能超过中子结合能的连续谱联系。近年来的研究工作指出,这是一个值得重视的方面,本书第四、五、六章讨论了复合核反应,并且注意了有关的统计特征。

无论是直接反应或通过复合系统的反应,都有一个激发靶核内越来越多的自由度的过程。故可以发生介于前述两种反应机制之间的中间过程反应。这是最近十余年来核反应理论的一个进展。本书第七、八两章讨论了这种反应机制。

核反应研究的一个重要发展是从轻离子引起的核反应扩展到

重离子引起的核反应。在重离子核反应中 de Broglie 波长远小于靶核尺度,故能够研究从擦边碰撞到对心碰撞的丰富多采的内容。本书第九章介绍了重离子核反应的这些内容。

当前核反应研究又在向新的领域推进,特别对高能重离子核反应的研究,人们寄予巨大希望。但本书作为核物理研究生教学用书,只能把内容限于低能核反应(对重离子来说每个核子十余 MeV)的范围,而把注意力放在阐明主要的物理内容和系统的理论处理方法,这两个基本方面无论对传统领域的进一步深入研究或跨入新领域的研究都是重要的。

北京大学胡济民教授仔细地审阅了全书,提出了许多宝贵意见,特表示衷心的感谢。兰州大学陈星槩同志耐心地作了大量校对和整理工作,谨表示感谢。

作者于 1988 年 11 月

目 录

前言	1
第一章 原子核碰撞问题的表述方法	1
§ 1.1 原子核碰撞问题的表述	1
§ 1.2 反应道及其波函数	3
§ 1.3 碰撞矩阵	7
§ 1.4 碰撞截面	15
第二章 光学模型	23
§ 2.1 光学模型的基本思想	23
§ 2.2 微观光学势	28
§ 2.3 唯象光学势	35
§ 2.4 粒子在光学势场中的散射与吸收	38
§ 2.5 耦合道光学模型	44
第三章 直接反应	47
§ 3.1 直接反应的基本特点和理论处理方法	47
§ 3.2 扭曲波 Born 近似 (DWBA)	48
§ 3.3 转移反应	57
§ 3.4 激发单粒子态的非弹性散射和电荷转移反应	70
§ 3.5 非弹性散射的一般理论	76
§ 3.6 激发集体运动态的非弹性散射, 耦合道光学模型	81
§ 3.7 非直接的单粒子转移反应, 耦合道 Born 近似 (CCBA)	90
§ 3.8 双核子转移反应	94
§ 3.9 扭曲波冲击近似	101
第四章 复合核共振反应(一)	105
§ 4.1 复合核共振反应的基本特征	105
§ 4.2 用投影算符来确定似稳态的复合核共振反应理论	107
§ 4.3 对于单能级共振的实验结果的分析	120

§ 4.4	无规矩阵	130
§ 4.5	关于复合核能级的性质和无规矩阵模型的涵义	137
§ 4.6	平均跃迁振幅与等效势场 目	139
第五章	复合核共振反应 (二)	145
§ 5.1	R 矩阵理论的基本精神	145
§ 5.2	R 矩阵	146
§ 5.3	R 矩阵和 U 矩阵的关系	153
§ 5.4	能级矩阵	157
§ 5.5	单能级共振反应	159
§ 5.6	多能级共振反应及其余能级的影响	161
§ 5.7	关于 R 矩阵理论的讨论	163
第六章	复合核反应的统计理论	165
§ 6.1	复合核反应截面的统计公式	165
§ 6.2	出射粒子能谱	179
§ 6.3	反应截面的涨落	185
§ 6.4	反应截面的关联	194
第七章	中间过程反应	204
§ 7.1	核反应的中间结构和门口态共振理论	204
§ 7.2	描写平衡前发射的激子模型	217
§ 7.3	多步过程反应的统计理论 (FKK 理论)	241
第八章	中间过程反应 (续)	264
§ 8.1	核反应的壳模型理论	264
§ 8.2	门口态共振理论	282
§ 8.3	重叠能级条件下核反应过程的统计理论	293
第九章	重离子核反应	309
§ 9.1	重离子核反应的特征	309
§ 9.2	弹性散射	314
§ 9.3	非弹性散射和少数核子转移反应	334
§ 9.4	深度非弹性碰撞	348
§ 9.5	熔合反应	392

附录一	非厄密哈密顿量的本征解与双正交系·····	428
附录二	量子系统的主方程·····	432
附录三	核反应过程的含时间的统计描述·····	445
附录四	路径积分方法和重离子散射的准经典近似·····	455

第一章 原子核碰撞问题的表述方法

§1.1 原子核碰撞问题的表述

原子核碰撞问题原则上应用波包来描绘,但目前实验上能给出的脉冲束其宽度远大于原子核的线度,而我们所考察的是相应于恒定粒子流的结果,这样,原子核碰撞问题仍可按定态问题处理。

原子核碰撞问题不同于原子核结构问题。在原子核碰撞问题中,粒子可以到达无穷远,相碰撞的系统处于连续谱,相应于某个能量,存在许多简并解。求解原子核碰撞问题就是要找出满足给定的无穷远边界条件的解。对这个问题的处理着眼于无穷远渐近行为,正与时间有关的描述中着眼于 $t \rightarrow \pm \infty$ 的渐近行为相当。

相互碰撞的原子核系统的状态按其渐近行为分类,涉及一组表述它们内部性质和相对运动的量子数。本章仅考虑各道均为两个粒子的核反应;对于三体以上的反应一般不考虑。对于两体反应,我们用 α_1, α_2 表示相对地运动着的两个粒子的一切内部性质,包括电荷 Z_1, Z_2 ,质量 μ_1, μ_2 ,自旋 I_1, I_2 ,宇称 π_1, π_2 ,能量 E_1, E_2 等。还可 α 表示全部量子数的集合 $\{\alpha_1 \alpha_2\}$ 。相对运动的性质可直接用波矢量 k_α 表述。此外还涉及两个粒子的自旋沿 z 轴的投影 i_1, i_2 。这种核反应状态简称为反应道。用 c 表示道指标,

$$c = \{\alpha i_1 i_2 k_\alpha\} \quad (1.1-1)$$

在下文中,有时为了突出反应道或粒子的自旋性质,我们在描述其内部性质的量子数后将其自旋量子数标出,写在括号中,如 $\alpha(I_1 I_2), \alpha_1(I_1) \alpha_2(I_2)$ 等。

由于相互碰撞的原子核系统中的核力作用,实际的渐近波函

数是各种反应道波函数的线性组合。除相应于给定实验条件的人射道波函数外,还有伴随着的出射道波函数。原子核碰撞问题就是要找出相应于给定入射道波函数的出射道波函数,或表示出射道与入射道之间的振幅关系的碰撞矩阵。

这种碰撞矩阵由原子核系统的动力学性质决定。如何从原子核系统的哈密顿量求出碰撞矩阵,是一个动力学问题,是核反应理论的一个中心问题。但在本章中我们暂不考虑系统的具体的动力学性质,而仅考虑普适的对称性和守恒定律,仅从运动学角度来讨论碰撞矩阵问题。

由于哈密顿量对空间转动和反演的不变性,角动量和宇称守恒。故应按角动量状态来区分反应道,道指标取为

$$c = \{ \alpha(I_1 I_2); s l_a J M k_a \}, \quad (1.1-2)$$

其中 s 为自旋角动量,

$$s = I_1 + I_2, \quad (1.1-3)$$

l 为轨道角动量, J 为总角动量, M 是总角动量沿 z 轴的投影,

$$J = s + l, \quad (1.1-4)$$

宇称则为

$$\Pi = \pi_1 \pi_2 (-)^{l_a}. \quad (1.1-5)$$

由于守恒定律,碰撞矩阵仅联系具有相同 J, Π 的道。还由于能量守恒,表示相对运动动能的指标 k_a 可以省略。对于给定入射条件的原子核碰撞问题,可分解为具有各种 J, Π 的道,考虑相应的碰撞矩阵,然后求出总的出射波振幅。有了总的出射波振幅,就可以求出与实验结果直接联系的碰撞截面。在以后几节中,我们将给出碰撞矩阵及碰撞截面的表示式。我们在这里采用了与时间无关的描述,在碰撞的形式理论中,也采用与时间有关的描述,读者可以相互参阅。

§1.2 反应道及其波函数

相碰撞的原子核系统的波函数 Ψ 满足薛定谔方程

$$H\Psi = E\Psi, \quad (1.2-1)$$

H 是哈密顿量。当粒子 α_1 与 α_2 相距较远时, α_1 与 α_2 之间的核作用势 V_a 可以略去,于是核系统的哈密顿量 H 简化为

$$H = H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2} + H_0 + H_a, \quad (1.2-2)$$

其中 H_{α_1} 及 H_{α_2} 分别表示 α_1 及 α_2 的内禀哈密顿量, H_0 表示它们的质心动能,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_R^2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2, \quad (1.2-3)$$

H_a 包括它们的相对运动动能及它们之间的库仑作用势 $V_c(r_a)$,

$$H_a = -\frac{\hbar^2}{2\mu_a} \nabla_{r_a}^2 + V_c(r_a), \quad \mu_a = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (1.2-4)$$

相应于此反应道的渐近解可写成

$$\Psi = \phi(\mathbf{R}) \chi(r_a) \psi_{\alpha_1}(q_1) \psi_{\alpha_2}(q_2), \quad (1.2-5)$$

$\phi, \chi, \psi_{\alpha_1}, \psi_{\alpha_2}$ 分别是质心运动、相对运动和内部运动波函数,满足下述方程:

$$H_0 \phi = \epsilon \phi, \quad (1.2-6)$$

$$H_a \chi = E_a \chi, \quad (1.2-7)$$

$$H_{\alpha_1} \psi_{\alpha_1} = E_{\alpha_1} \psi_{\alpha_1}, \quad (1.2-8)$$

$$H_{\alpha_2} \psi_{\alpha_2} = E_{\alpha_2} \psi_{\alpha_2}. \quad (1.2-9)$$

$\epsilon, E_a, E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}$ 是相应的本征能量。因为系统未受外力时,质心运动保持不变,在以后我们就不再考虑这一部分运动,而让 $\epsilon = 0$,这相当于选取质心系。这时

$$E = E_a + E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2}. \quad (1.2-10)$$

仅当 $E_a = E - E_{\alpha_1} - E_{\alpha_2} > 0$ 时,才能发生相应于该反应道的反应。

我们现在分别讨论内部运动波函数和相对运动波函数。因为

库仑势 $V_c(r_a)$ 与 α_1, α_2 的自旋无关, 所以 H_a 的解对 α_1, α_2 的自旋状态是简并的, 内部波函数可采用下述 $\{\alpha(I_1 I_2); s\nu\}$ 表象,

$$\psi_{\alpha(I_1 I_2) s\nu} = \sum_{i_1 i_2} \langle I_1 i_1 I_2 i_2 | s\nu \rangle \psi_{\alpha_1(I_1) i_1} \psi_{\alpha_2(I_2) i_2}, \quad (1.2-11)$$

这里, $\psi_{\alpha_1(I_1) i_1}, \psi_{\alpha_2(I_2) i_2}$ 表示粒子 α_1, α_2 的角动量及 z 轴投影为 $I_1 i_1, I_2 i_2$ 的波函数, $\langle I_1 i_1 I_2 i_2 | s\nu \rangle$ 是角动量耦合系数 (C-G 系数)。

$\psi_{\alpha(I_1 I_2) s\nu}$ 是反应道的确定自旋状态的波函数, 满足下述正交归一条件,

$$\int_S \psi_{\alpha s\nu}^* \psi_{\alpha' s'\nu'} dS = 4\pi a_a^2 \delta_{\alpha' s\nu; \alpha s'\nu'}. \quad (1.2-12)$$

这里的积分是在总的反应道界面 $S = \sum S_a$ 上进行的, 还包括对自旋求和。其中 a_a 是反应道 α 的相互作用半径, 以 a_a 为半径的球面把二体反应的组态空间划分为存在核力相互作用的内部区域和不存在核力相互作用的外部区域。通常 a_a 的选取应大于等于 α 道两个核的半径。而

$$\delta_{\alpha s\nu; \alpha' s'\nu'} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'} \delta_{\nu\nu'}. \quad (1.2-13)$$

上述正交归一条件实际上暗含着一个假定: 不同 α 的内部运动波函数彼此正交。在一般情况下证明这一假定的正确性是比较困难的, 但当 a_a 取足够大时, 不难证明 (1.2-12) 式是相当精确地满足的。

现在考虑相对运动波函数, 其分波形式为

$$\chi = \sum_{lm} \frac{u_{al}(r_a)}{r_a} (i^l Y_{lm}(\Omega_a)). \quad (1.2-14)$$

式中 $Y_{lm}(\Omega_a)$ 是归一化的球谐函数, 满足 $Y_{l-m}^* = (-)^m Y_{lm}$; 因子 i^l 的引入是为了保证波函数具有正确的时间反演变换性质, 见 §1.3。而径向波函数 $u_{al}(r_a)$ 满足方程

$$\left[\frac{d^2}{dr_a^2} - \frac{l(l+1)}{r_a^2} - \frac{2\mu_a}{\hbar^2} (V_c(r_a) - E_a) \right] u_{al}(r_a) = 0,$$

$$(1.2-15)$$

其中

$$V_c(r_a) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_a}. \quad (1.2-16)$$

使

$$\eta_a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v_a}; \quad (1.2-17)$$

$$k_a^2 = \frac{2\mu_a E_a}{\hbar^2}; \quad (1.2-18)$$

$$v_a = \frac{\hbar k_a}{\mu_a}; \quad (1.2-19)$$

$$\rho_a = k_a r_a. \quad (1.2-20)$$

我们得到

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_a^2} - \frac{l(l+1)}{\rho_a^2} + \frac{2\eta_a}{\rho_a} - 1 \right] u_{al}(\rho_a) = 0. \quad (1.2-21)$$

上述二阶常微分方程有两个线性独立解,任何特解都可以写成它们的线性组合。为描述碰撞问题的需要,我们选两个线性独立解为向内波函数 I_{al} 和向外波函数 O_{al} , 其渐近形式为

$$I_c \equiv I_{al} \sim \exp \left[-i(\rho_a - \eta_a \ln 2\rho_a - \frac{l\pi}{2} + \sigma_{a0}) \right]; \quad (1.2-22)$$

$$O_c \equiv O_{al} \sim \exp \left[i(\rho_a - \eta_a \ln 2\rho_a - \frac{l\pi}{2} + \sigma_{a0}) \right], \quad (1.2-23)$$

其中 $\sigma_{a0} = \arg \Gamma(1 + i\eta_a). \quad (1.2-24)$

上述解可以重新组合成另外两个独立解: 规则解 F 和不规则解 G , 它们的渐近式为

$$F_c \equiv F_{al} \sim \sin(\rho_a - \eta_a \ln 2\rho_a - \frac{l\pi}{2} + \sigma_{al}); \quad (1.2-25)$$

$$G_c \equiv G_{al} \sim \cos(\rho_a - \eta_a \ln 2\rho_a - \frac{l\pi}{2} + \sigma_{al}), \quad (1.2-26)$$

其中 $\sigma_{al} = \arg \Gamma(1 + l + i\eta_a). \quad (1.2-27)$

二阶常微分方程的这两个独立解 F_{al} 与 G_{al} 满足朗斯基行列式条件,

$$F'_{al} G_{al} - G'_{al} F_{al} = 1. \quad (1.2-28)$$

这两组解 I_c, O_c 与 F_c, G_c 之间的变换关系如下:

$$I_c = (G_c - iF_c) \exp(i\omega_c); \quad (1.2-29)$$

$$O_c = (G_c + iF_c) \exp(-i\omega_c), \quad (1.2-30)$$

其中

$$\omega_c \equiv \omega_{a1} = \sigma_{a1} - \sigma_{a0} = \sum_{n=1}^l \tan^{-1} \frac{\eta_a}{n}. \quad (1.2-31)$$

显然

$$O_c^* = I_c. \quad (1.2-32)$$

如果 α_1 与 α_2 是中性粒子,它们之间没有库仑作用,则 $\eta_a = 0$,

$$I_c = -i \left(\frac{\pi \rho_a}{2} \right)^{1/2} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho_a); \quad (1.2-33)$$

$$O_c = i \left(\frac{\pi \rho_a}{2} \right)^{1/2} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho_a); \quad (1.2-34)$$

$$F_c = \left(\frac{\pi \rho_a}{2} \right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho_a); \quad (1.2-35)$$

$$G_c = (-)^l \left(\frac{\pi \rho_a}{2} \right)^{1/2} J_{-l-\frac{1}{2}}(\rho_a), \quad (1.2-36)$$

这里 $H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}$ 和 $H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}$ 是第一、二类汉克尔(Hankel)函数, $J_{l+\frac{1}{2}}$ 是贝塞尔(Bessel)函数。

分别考虑了反应道内部运动波函数与相对运动波函数以后,我们现在考虑总的反应道波函数,让 $\mathcal{J}_{asvlm}$ 及 $\mathcal{O}_{asvlm}$ 分别表示单位流量的向内和向外波函数:

$$\mathcal{J}_{asvlm} = \frac{I_{al}}{\sqrt{v_a r_a}} (i^l Y_{lm}) \psi_{asv}; \quad (1.2-37)$$

$$\mathcal{O}_{asvlm} = \frac{O_{al}}{\sqrt{v_a r_a}} (i^l Y_{lm}) \psi_{asv}. \quad (1.2-38)$$

经过组合可得到总角动量及其沿 z 轴投影取确定值 JM 的波函数:

$$\mathcal{J}_{aslJM} = \sum_{vm} \langle svlm | JM \rangle \mathcal{J}_{asvlm}; \quad (1.2-39)$$

$$\mathcal{O}_{aslJM} = \sum_{vm} \langle svlm | JM \rangle \mathcal{O}_{asvlm}. \quad (1.2-40)$$

总的反应道波函数可用 $\mathcal{J}_{aslJM}$ 及 $\mathcal{O}_{aslJM}$ 的线性组合来表示。

为了计算方便,我们引入反应道表面波函数 φ_{asvlm} ,其定义为

$$\varphi_{asvlm} = \frac{1}{r_a} (i^l Y_{lm}) \psi_{asv}. \quad (1.2-41)$$

由此得

$$\psi \sim u_{al} \varphi_{asvlm}. \quad (1.2-42)$$

反应道表面波函数满足下述正交归一条件

$$\int_S \varphi_{asvlm}^* \varphi_{a's'v'l'm'} dS = \delta_{asvlm; a's'v'l'm'}. \quad (1.2-43)$$

在 $\{aslJM\}$ 表象中,

$$\varphi_{aslJM} = \sum_{vm} \langle svlm | JM \rangle \varphi_{asvlm}, \quad (1.2-44)$$

$$\int_S \varphi_{aslJM}^* \varphi_{a's'l'J'M'} dS = \delta_{aslJM; a's'l'J'M'} \quad (1.2-45)$$

这里的正交归一性可从反应道自旋状态波函数的正交归一性及 C-G 系数的正交性推得。

§ 1.3 碰撞矩阵

相碰撞的原子核系统的渐近波函数一般可以写成

$$\psi = \sum_c (x_c \mathcal{O}_c + y_c \mathcal{I}_c), \quad (1.3-1)$$

其中 y_c 表示反应道 c 的向内波函数 $\mathcal{I}_c$ 的振幅, x_c 表示向外波函数 $\mathcal{O}_c$ 的振幅, 这里道指标 c 指 $\{asvlm\}$ 或 $\{aslJM\}$ 。对于一定的系统和给定的入射条件, y_c 是给定的, 问题在于确定相应的 x_c 。 x_c 既决定于系统的相互作用, 也决定于 y_c 。由于薛定谔方程的线性特征, x_c 和 y_c 之间存在线性关系,

$$x_c = - \sum_{c'} U_{cc'} y_{c'}, \quad (1.3-2)$$

或

$$x = -Uy, \quad (1.3-3)$$

这里 $U_{cc'}$ 是碰撞矩阵 U 的矩阵元, 给出向外波振幅与向内波振

幅之间的关系。碰撞矩阵 U 纯粹由系统的作用决定。运用碰撞矩阵, 碰撞问题的通解可表示为

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_c y_c \left(\mathcal{I}_c - \sum_{c'} U_{c'c} \mathcal{O}_{c'} \right) \\ &= \sum_{cc'} y_c (\delta_{c'c} \mathcal{I}_{c'} - U_{c'c} \mathcal{O}_{c'}) .\end{aligned}\quad (1.3-4)$$

如果给定条件是: 只有相应于某一反应道的向内波振幅 $y_c = 1$, 其它均为零, 则相应的渐近波函数为

$$\Psi_c = \sum_{c'} (\delta_{c'c} \mathcal{I}_{c'} - U_{c'c} \mathcal{O}_{c'}) .\quad (1.3-5)$$

而通解可表为

$$\Psi = \sum_c y_c \Psi_c .\quad (1.3-6)$$

前已指出, 由于守恒定律, 在理论计算中宜采用 $\{\alpha slJM\}$ 表象, 但为了和实验结果联系, 尚需用 $\{\alpha svlm\}$ 或 $\{\alpha i_1 i_2 lm\}$ 表象来表述, 所以需要考虑它们之间的联系。把道指标具体化, 我们有

$$\Psi_{\alpha slJM} = \mathcal{I}_{\alpha slJM} - \sum_{\alpha' s' l' J' M'} U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha slJM} \mathcal{O}_{\alpha' s' l' J' M'} .\quad (1.3-7)$$

变换到 $\{\alpha svlm\}$ 表象, 我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha slJM} &= \sum_{v'' l'' m''} \langle sv'' l'' m'' | JM \rangle \mathcal{I}_{\alpha sv'' l'' m''} \\ &- \sum_{\alpha' s' l' J' M'} U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha slJM} \sum_{v' l' m'} \langle s' v' l' m' | J' M' \rangle \mathcal{O}_{\alpha' s' v' l' m'} ;\end{aligned}\quad (1.3-8)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha svlm} &= \sum_{JM} \langle svlm | JM \rangle \Psi_{\alpha slJM} \\ &= \sum_{JM v'' l'' m''} \langle svlm | JM \rangle \langle sv'' l'' m'' | JM \rangle \mathcal{I}_{\alpha sv'' l'' m''} .\end{aligned}$$

$$= \sum_{JM \alpha' s' l' J' M' \nu' m'} \langle s \nu l m | JM \rangle U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha s l J M} \\ \times \langle s' \nu' l' m' | J' M' \rangle \mathcal{O}_{\alpha' s' \nu' l' m'}. \quad (1.3-9)$$

根据 C-G 系数的性质,

$$\sum_{JM} \langle s \nu l m | JM \rangle \langle s \nu' l' m' | JM \rangle = \delta_{\nu \nu'} \delta_{m m'}, \quad (1.3-10)$$

求得

$$\Psi_{\alpha s \nu l m} = \mathcal{I}_{\alpha s \nu l m} - \sum_{\substack{\alpha' s' \nu' l' m' \\ JM J' M'}} \langle s' \nu' l' m' | J' M' \rangle U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha s l J M} \\ \times \langle s \nu l m | JM \rangle \mathcal{O}_{\alpha' s' \nu' l' m'}. \quad (1.3-11)$$

但是 $\Psi_{\alpha s \nu l m}$ 又可用 $\{\alpha s \nu l m\}$ 表象中的碰撞矩阵来表示,

$$\Psi_{\alpha s \nu l m} = \mathcal{I}_{\alpha s \nu l m} - \sum_{\alpha' s' \nu' l' m'} U_{\alpha' s' \nu' l' m'; \alpha s \nu l m} \mathcal{O}_{\alpha' s' \nu' l' m'}. \quad (1.3-12)$$

比较上面两种表述式, 求得两种表象中的碰撞矩阵 U 的变换关系,

$$U_{\alpha' s' \nu' l' m'; \alpha s \nu l m} = \sum_{JM J' M'} \langle s' \nu' l' m' | J' M' \rangle U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha s l J M} \\ \times \langle s \nu l m | JM \rangle. \quad (1.3-13)$$

$U_{\alpha' s' \nu' l' m'; \alpha s \nu l m}$ 就是 $\{\alpha s \nu l m\}$ 表象中碰撞矩阵的矩阵元。从 C-G 系数的性质知道, 碰撞矩阵 U 从 $\{\alpha s l J M\}$ 表象到 $\{\alpha s \nu l m\}$ 表象的变换是幺正变换。事实上这是从一组正交基 $\{\alpha s l J M\}$ 到另一组正交基 $\{\alpha s \nu l m\}$ 的变换。

碰撞矩阵 U 由系统的作用决定。由于哈密顿量具有一些普适的对称性, 碰撞矩阵 U 具有如下的普遍性质:

(1) 由于作用势对空间转动变换不变, 系统的总角动量及其沿 z 轴的投影 JM 是守恒量, 所以在 $\{\alpha s l J M\}$ 表象中,

$$U_{\alpha' s' l' J' M'; \alpha s l J M} = U_{\alpha' s' l' J' M'}^{JM} \delta_{J J'} \delta_{M M'}. \quad (1.3-14)$$