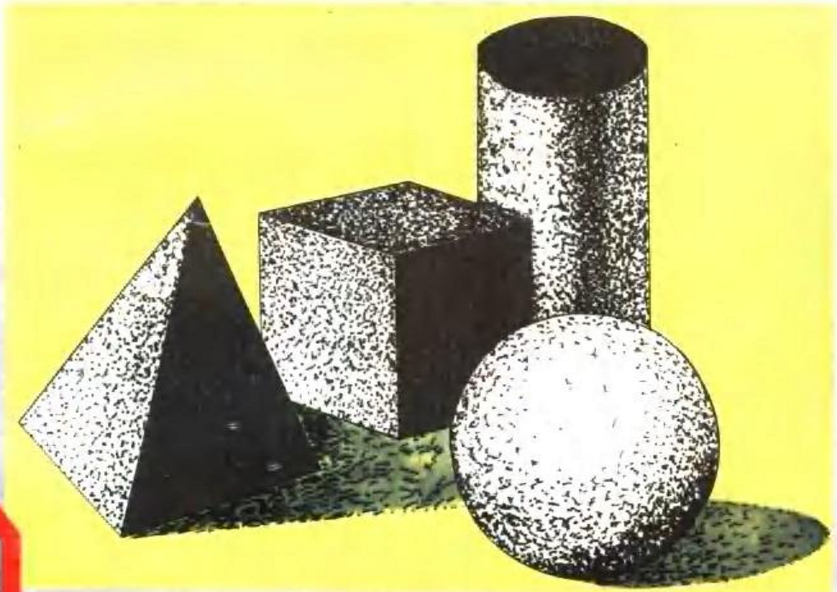
李汶忠 著

几何新定理



科学技术文献出版社

几何新定理

李汶忠 著

科学技术文献出版社

（京）新登字130号

内容简介

本书作者对初等几何和解析几何的定理、公式和作图方法进行了创造性研究，讲述了初等几何方面和解析几何方面求解任意四、凸五六边形面积和相关柱、锥、台体积的方法和公式；“化圆为方”、圆周展开、等分圆周等近似作图方法。这些定理、公式、作图方法的补充而丰富了目前几何书中所缺的内容。

本书通俗易懂，实用性强。可供广大中学生和大学低年级学生课外阅读；也可做为大中学校广大教师教学以及广大工程技术人员解决实际问题的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

几何新定理/李汶忠著.-北京：科学技术文献出版社，1996.9
ISBN 7-5023-2751-7

Ⅰ.几… Ⅱ.李… Ⅲ.几何-定理（数学）-中学-课外读物 Ⅳ.G634.634

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第08179号

科学技术文献出版社出版
（北京复兴路15号 邮政编码100038）
北京市燕山联营印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
1996年9月第1版 1996年9月第1次印刷
787×1092毫米 32开本 9印张 194千字
社科新书目：443—229 印数：1—2000册
定价：16.00元

前　　言

本书是我多年来对初等几何和解析几何研究的总结，其中一部分内容已在有关杂志上发表，而大部分内容是首次公开发表。

本书既是创造性的著作又是通俗性的读物。所谓创造性是因为书中所讲述的定理、公式、以及一些作图方法都是本人创造和发明的，是别的书中所没有的，故定名为《几何新定理》；所谓通俗性是因为它不需要高深的数学知识，只要具备一般中学水平的人就可看懂大部分内容，其中有一部分内容凡学过空间解析几何者也可看懂。本书是大中学校教课书内容的创新和延伸，具有很大的趣味性和实用性。

本书可供中学生和大学低年级学生课外阅读学习，也可作为大中学校老师教学充实课堂内容，补充数学新知识参考用书，还可供数学爱好者阅读和研究之用。由于本书讲述的内容大都是有关面积和体积计算的新方法，实用性很大，因而也可供工程技术人员和实际操作者阅读和应用。

承蒙中央民族大学数学系主任罗小伟教授对本书稿进行了审阅，并推荐出版。邢富冲教授阅读书稿后，认为书中内容“很有趣”，是件“很有意义的工作”，也热情推荐出版。在此对二位教授深表感谢。

由于本人水平所限、研究钻研不够，疏漏不妥之处在所

难免，尚请广大读者批评指正。

李汶忠　1996.4.26

于中央民族大学数学系

目　　录

第一章　任意四、五、六边形面积求法

一、任意四边形面积求法

定理 1：任意凸四边形面积等于一组对边中点连线，乘以另一边中点至该连线间距离相乘积的二倍。

如图 1-1，$ABCD$ 为任意四边形，E 为 AD 边中点，F 为对边 BC 边中点，连接 EF。

P 为 AB 边中点，过 P 点作垂直于 EF 直线 PK，则任意凸四边形面积 S 为

$$S=2PK\cdot EF \qquad (1.1)$$

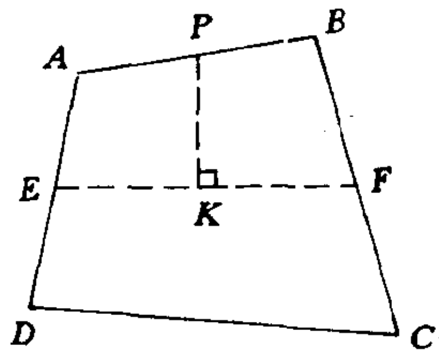


图 1-1

证明：见图 1-2，E、P、F、N 为任意四边形四边中点，连接四边形中点 $EPFN$ 便成为平行四边形。在平面几何中已证明：任意凸四边形 $ABCD$ 面积是平行四边形 $EPFN$ 面积的二倍，即：$S=2$ 平行四边形 $EPFN$ 面积。

连接 EF 为平行四边形 $EPFN$ 的对角线，并等分平行四边形 $EPFN$，故有任意凸四边形面积

$$S=2\text{ 平行四边形 } EPFN=4\triangle PEF$$

$$=4\times\frac{1}{2}PK\cdot EF=2PK\cdot EF.$$

即：$$S=2PK\cdot EF.$$

例：已知任意凸四边形 $ABCD$ 两对边中点连线 EF 长为 25m，另一边中点 P 至连线 EF 间距离 PK 长为 16m，求该任意凸四边形面积，如图 1-3。

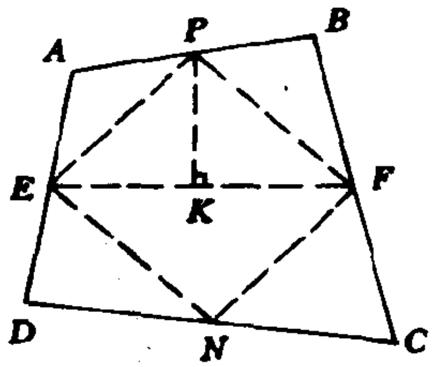


图 1-2

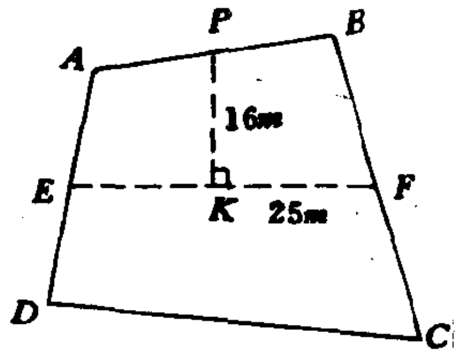


图 1-3

解：将 $EF=25\text{m}$，$PK=16\text{m}$ 代入公式（1.1）：

$$S=2PK\cdot EF$$

$$=2\times16\times25=800\text{m}^2.$$

所以凸四边形 $ABCD$ 面积为 800m^2.

定理 2：任意凸四边形面积等于两相邻边中点间之线段与另一边中点至该线的距离相乘积的二倍。

如图 1-4，设 $ABCD$ 为任意凸四边形，F 为 CD 边中点，E 为 BC 边中点，连 EF。P 为 AB 边中点，过 P 作 EF 垂线 PN，则任意凸四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=2EF\cdot PN \tag{1.2}$$

证明：如图 1-5，设 Q 为 AD 边中点，连接 PQ 和 BD，并与 PN 交于 V。

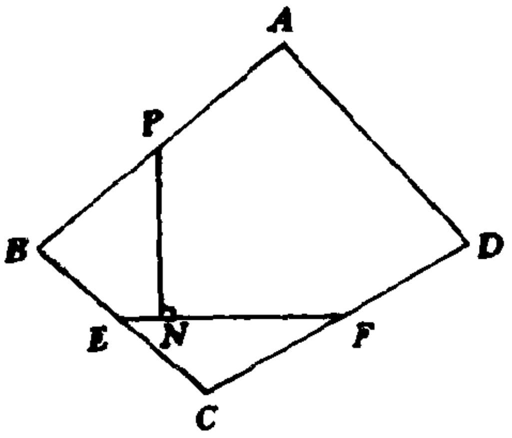


图 1-4

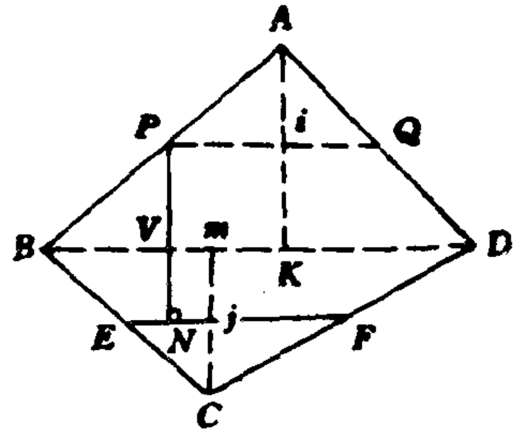


图 1-5

则有：$PQ \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}BD$，$EF \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}BD$，$\therefore PQ=EF$。

过 A 点作 $AK \perp BD$，过 C 点作 $Cm \perp BD$，分别交 PQ 于 i，EF 于 j，从而得：

$PV=iK$，$NV=jm$，故有 $PV=\frac{1}{2}AK$，$(Ai=iK)$，$NV=\frac{1}{2}Cm$，$(cj=jm)$，而得：

$$PN=\frac{1}{2}(AK+Cm)，即：2PN=AK+Cm.$$

任意凸四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$S=\triangle ABD+\triangle CBD=\frac{1}{2}AK \cdot BD+\frac{1}{2}Cm \cdot BD=AK \cdot PQ+Cm \cdot EF=AK \cdot EF+Cm \cdot EF=EF(AK+Cm)=EF \cdot 2PN=2EF \cdot PN$，即：

$$S=2EF \cdot PN.$$

例：$ABCD$ 为任意凸四边形，E 为 BC 边中点，F 为 CD 边中点，EF 连线长为 106m。P 为 AB 边中点，P 至 EF 垂线 PN 长为 78m，求凸四边形 $ABCD$ 面积，如图 1-6。

解：将 $EF=106\text{m}$，$PN=78\text{m}$ 代入公式（1.2），则凸四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=2EF\cdot PN=2\times106\times78=16536\text{m}^2,$$

即：$$S=16536\text{m}^2.$$

凸四边形 $ABCD$ 面积为 16536m^2.

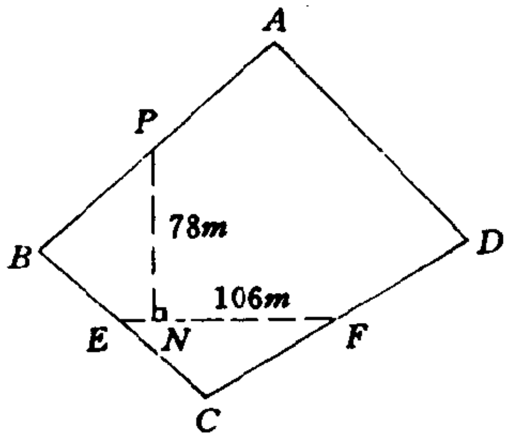


图 1-6

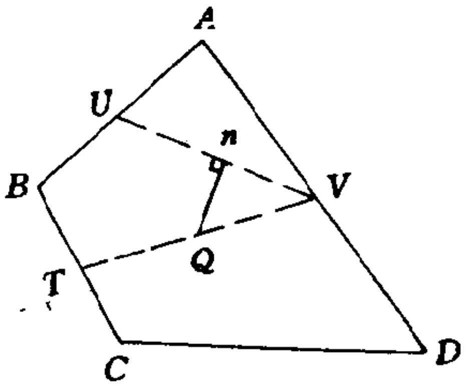


图 1-7

定理 3：任意凸四边形面积为两相邻边中点连线长，乘以一组对边中点连线之中点到相邻边中点连线之距离的四倍。

如图 1-7，$ABCD$ 为任意凸四边形，U 为 AB 边中点，V 为 AD 边中间，连接两中点 U 和 V 为直线 UV。TV 为一组对边 BC 和 AD 的中点 T 和 V 的连线。Q 为连线 TV 中点，过 Q 点作直线 UV 垂线 Qn，则该任意四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=4Qn\cdot UV \tag{1.3}$$

证明：见图 1-8，H 为 CD 边中点，连接 H、T、U、V 为平行四边形$\square HTUV$，UH 和 TV 为平行四边形$\square HTUV$ 的两对角线，则有 $QU=QH$，$QT=QV$。故有：

$\triangle QHT=\triangle QUV$；$\triangle QUT=\triangle QHV$，而且有：$\triangle VQH=\triangle VQU$（等底等高），同理有：$\triangle TQU=\triangle TQH$，

即：$\triangle QUV = \triangle QVH = \triangle QHT = \triangle QTU$，

平行四边形$\square HTUV$面积S'为：

$$S' = 4\triangle QUV$$

任意凸四边形$ABCD$面积S是内接平行四边形$\square HTUV$面积S'的二倍，即：

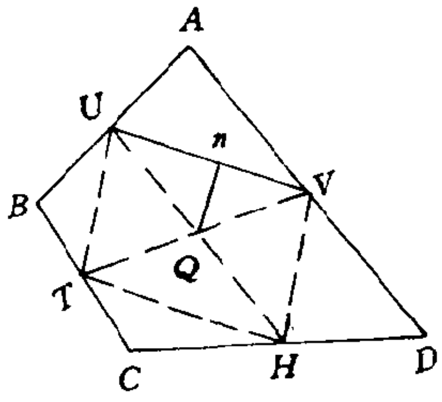


图 1-8

$S = 2S' = 2 \times 4\triangle QUV$，

$S = 8\triangle QUV$，

而：$\triangle QUV$面积$= \frac{1}{2}Qn \cdot UV$，代入上式：

$$S = 8\triangle QUV = 8 \times \frac{1}{2}Qn \cdot UV,$$

即：$$S = 4Qn \cdot UV.$$

例：$ABCD$为任意凸四边形，TV为一组对边中点连线，Q为中点。U为AB边中点，连接U和V两点为直线UV，其长是23m，过Q点作直线UV垂线Qn，其长为14m，求任意凸四边形$ABCD$面积，如图1-9。

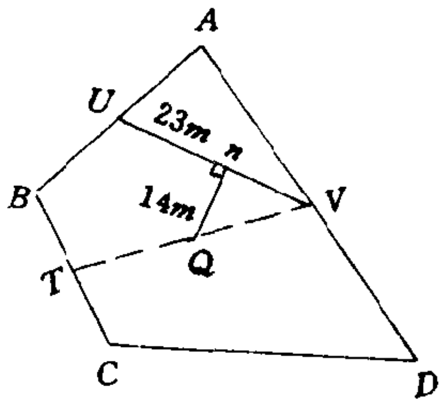


图 1-9

解：将$UV = 23\text{m}$，$Qn = 14\text{m}$，代入公式（1.3），则有任意凸四边形$ABCD$面积S为：

$$S = 4Qn \cdot UV = 4 \times 14\text{m} \times 23\text{m} = 1288\text{m}^2,$$

即：$$S = 1288\text{m}^2,$$

任意凸四边形 $ABCD$ 面积为 $1288m^2$.

定理 4：任意凸四边形面积为两相邻两边中点连线长之积，乘其夹角正弦的二倍。

如图 1-10，$ABCD$ 为任意凸四边形，E 为 AB 边中点，U 为 BC 边中点，F 为 CD 边中点。连接 E 和 U 两点为直线 UE，连接 F 和 U 两点为直线 UF，直线 UE 和 UF 夹角为 $\theta°$，则任意凸四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=2UE \cdot UF\sin\theta° \tag{1.4}$$

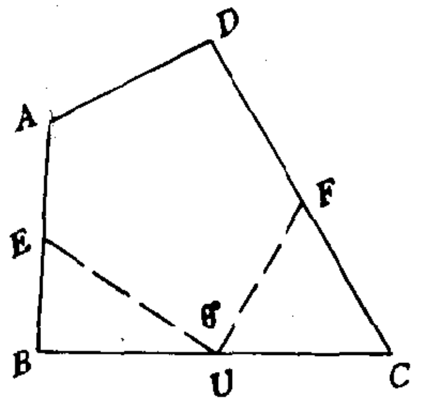


图 1-10

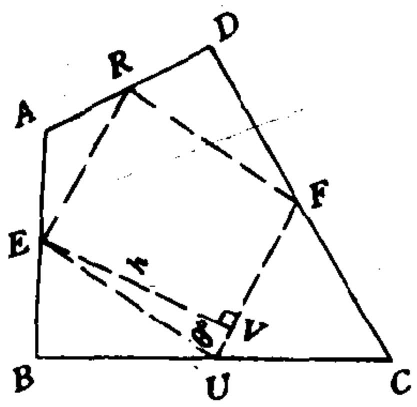


图 1-11

证明：见图 1-11，R 为 AD 边中点，连接 U、F、R、E 四点，则为平行四边形 $\square UFRE$，其面积为 S'，由平面几何可知：任意凸四边形 $ABCD$ 面积 S 是内接 $\square UFRE$ 面积 S' 的 2 倍，即：

$$S=2S'=2\square UFRE。$$

过 E 点作直线 UF 的高 $EV=h$，则有：$\square UFRE=UF \cdot h=UF \cdot UE\sin\theta$，即：

$$S=2S'=2\square UFRE=2UF \cdot UE\sin\theta,$$

亦：
$$S=2UE \cdot UF\sin\theta°.$$

例：$ABCD$ 为任意凸四边形，U 为 BC 边中点 E 为 AB 边中点，F 为 DC 边中点，连接 U 和 E 两点为直线 UE，其长为 28m，连接 U 和 F 两点为直线 UF，其长为 25m，两直线 UE 和 UF 夹角 $\theta°$为 80°，求该四边形面积，如图 1-12。

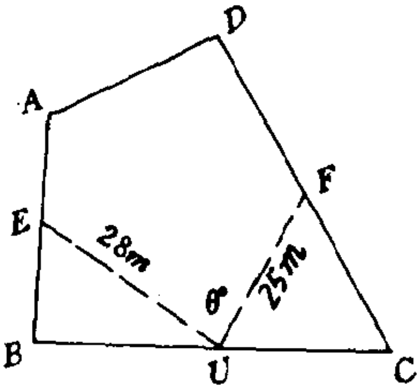


图 1-12

解：将 $UE=28\text{m}$，$UF=25\text{m}$，$\theta°=80°$代入公式（1.4），则有：

$$S=2UE\cdot UF\sin\theta°=2\times28\text{m}\times25\text{m}\cdot\sin80°$$

$$=2\times28\text{m}\times25\text{m}\times0.9848\approx1378.72\text{m}^2,$$

即：$$S\approx1378.72\text{m}^2,$$

任意凸四边形 $ABCD$ 面积为 1378.72m^2.

定理 5：任意凸四边形面积为两对角线与其夹角正弦乘积的二分之一。

如图 1-13，$ABCD$ 为任意四边形，两对角线长分别为 AC 和 BD，其夹角为 $\theta°$，则任意四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

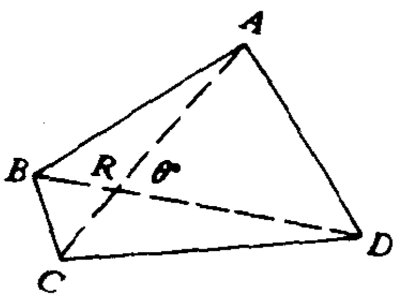


图 1-13

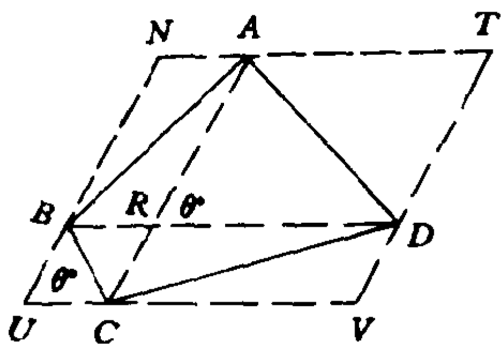


图 1-14

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta^{\circ} \tag{1.5}$$

证明：见图1-14，过 B、D 两点分别作 AC 之平行线，过 A、C 分别作 BD 之平行线，这两组平行线相交于 U，N，T，V，则 $UNTV$ 为平行四边形$\square UNTV$，有 $NU=AC$，$UV=BD$，AC 和 BD 相交于 R 点，$\angle NUV=\angle ARD$，即：$\angle\theta^{\circ}=\angle\theta^{\circ}$。

$\therefore UBRC$ 为平行四边形，则：

$\triangle BRC=\frac{1}{2}\square UBRC$，

同理：$\triangle CRD=\frac{1}{2}\square RDVC$，$\triangle ARD=\frac{1}{2}\square ARDT$，$\triangle ARB=\frac{1}{2}\square ARBN$，

$\triangle BRC+\triangle CRD+\triangle ARD+\triangle ARB=\frac{1}{2}\square UBRC+\frac{1}{2}\square RDVC+\frac{1}{2}\square ARDT+\frac{1}{2}\square ARBN=\frac{1}{2}(\square UBRC+\square RDVC+\square ARDT+\square ARBN)$

即：四边形 $ABCD=\frac{1}{2}\square UNTV=\frac{1}{2}NU\cdot UV\cdot\sin\theta^{\circ}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta^{\circ}$

即：任意四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta^{\circ}$$

例：$ABCD$ 为任意四边形，对角线 $AC=34\text{m}$，$BD=40\text{m}$，两对角线夹角 $\theta^{\circ}=45^{\circ}$，求该任意四边形 $ABCD$ 面积，如图1-15。

解：将 $AC=34\text{m}$，$BD=40\text{m}$，$\theta^{\circ}=45^{\circ}$，代入公式

(1.5)，即：任意四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}(34\text{m}\times40\text{m}\times\sin45°)$$
$$\approx480.8\text{m}^2.$$

即： $S\approx480.8\text{m}^2$

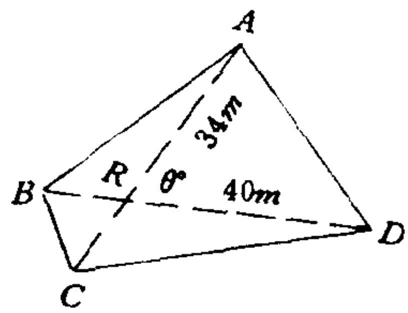


图 1-15

任意四边形 $ABCD$ 面积为 480.8m^2.

推论 1：若任意四边形对角线相互垂直，则该四边形面积为两对角线相乘积的二分之一。

如图 1-13，$ABCD$ 为任意四边形面积，其对角线 AC 和 BD 夹角 $\theta°$为 90°。

证明：据定理 5，该任意凸四边形面积 S 为：$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta°=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin90°=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，

即：
$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

推论 2：正方形面积为一对角线自乘积的二分之一。

证明：据定理 5，正方形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin90°=\frac{1}{2}AC\cdot AC\cdot1=\frac{1}{2}AC^2.$$

即：$S=\frac{1}{2}AC^2$.

定理 6：任意凸四边形三边中点连线长分别为 a、b、c，则任意凸四边形面积 S 为：

$$S=4\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}，P=\frac{1}{2}(a+b+c)\quad(1.6)$$

如图 1-16，$ABCD$ 为任意凸四边形，E 为 AB 边中点，F 为 BC 边中点，G 为 AD 边中点，连接 EF 线段长为 a，连接 FG 线段长为 b，连接 EG 线段长为 c，则任意凸四边形 $ABCD$ 面积 S 为：

$$S=4\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)},\ P=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

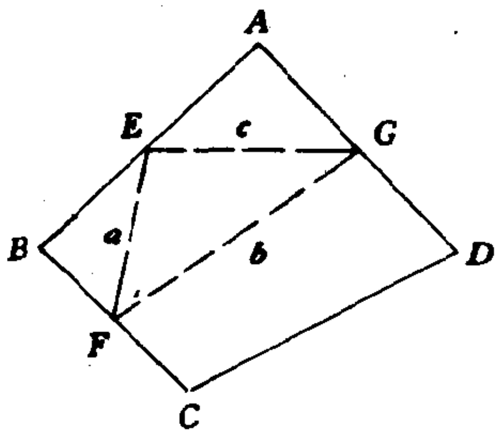


图 1-16

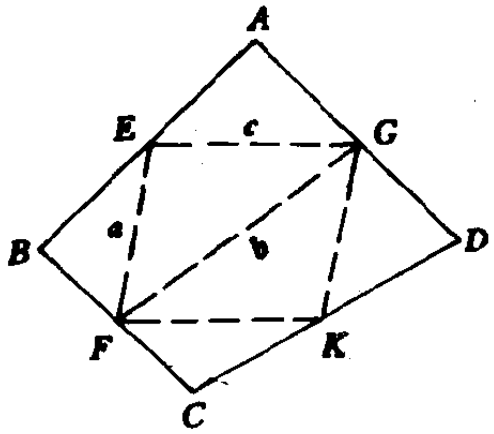


图 1-17

证明：见图 1-17，K 为 CD 边中点，连接四边中点 $EFKG$ 便成为平行四边形。在平面几何中已证明：任意凸四边形 $ABCD$ 面积是平行四边形 $EFKG$ 面积的二倍，即：$S=2\square EFKG$。

FG 是平行四边形 $EFKG$ 的对角线，并等分该平行四边形面积，即：

$$S=2\square EFKG=2\times 2\triangle EFG=4\triangle EFG,$$

即：
$$S=4\triangle EFG \qquad (a)$$

根据海伦公式，三角形$\triangle EFG$ 面积为：

$$\triangle EFG=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)},\ P=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

将该式代入（a）式，便得：

$$S=4\triangle EFG=4\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\text{，即：}$$

$$S=4\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)},$$

$$P=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

例：$ABCD$ 为任意凸四边形，三边中点连线 $a=4$，$b=7$，$c=5$，求该任意凸四边形面积，见图 1-18。

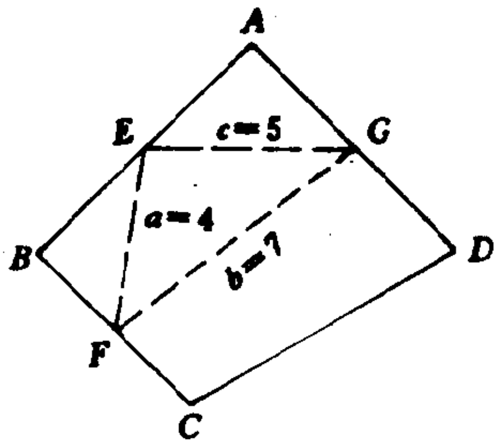


图 1-18

解：将 $a=4$，$b=7$，$c=5$，代入公式（1.6）：

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2}(a+b+c)\\&=\frac{1}{2}(4+7+5)\\&=8.\end{aligned}$$

即：$P=8$，

$$\begin{aligned}S&=4\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\\&=4\sqrt{8(8-4)(8-7)(8-5)}\\&=4\sqrt{96}=16\sqrt{6}\text{，即：}\end{aligned}$$

$S=16\sqrt{6}$.

上述求任意凸四边形面积定理可以说是求凸四边形面积的万有定理，因为任何凸四边形面积，如正方形、长方形、菱形、梯形等各种规则的和不规则形状的凸四边形面积，都可用上述任何一个定理和方法求出。

定理 7：任意凹四边形。连接凸凹对角线并延长一倍，将该线端点与另一尖角顶点连成一直线，则任意凹四边形面积为该一直线中点到两凹边中点连线距离与两凹边中点连线长