

高等学校建筑工程专业系列教材

结 构 力 学

(下册)

重 庆 建 筑 大 学
哈 尔 滨 建 筑 大 学
重 庆 建 筑 大 学
哈 尔 滨 建 筑 大 学
南 京 建 筑 工 程 学 院
苏 州 城 市 建 设 环 境 保 护 学 院
西 安 建 筑 科 技 大 学

张来仪
景 瑞
张来仪
景 瑞
刘郁馨
朱靖华
刘 铮

主 编

赵更新
孙佩英

编

主 审



中国建筑工程工业出版社

前 言

本教材是根据国家教育委员会 1995 年批准修正的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)所规定的内容,由重庆建筑大学、哈尔滨建筑大学、南京建筑工程学院、苏州城市建筑环境保护学院联合编写的。适用于四年制建筑工程、交通土建工程、水利工程等专业本科生的教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本书分上、下两册出版。上册包括绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力分析及位移计算、超静定结构的计算、影响线等。下册包括矩阵位移法、结构动力学、结构稳定计算、结构的极限荷载、结构非线性分析概论、结构力学的拓广及其在土建工程中的应用等。其中冠有 * 号的内容可供选学,不同专业可根据专业的需要酌情取舍。每章均有思考题,以活跃思维、启发思考,加深对基本概念的认识。

本书反映了参编四院校多年积累的教学经验,并注意吸取其他各兄弟院校教材的优点,力图保持结构力学基本理论的系统性和贯彻理论联系实际、由浅入深、方便教学等原则。同时考虑到现代科学技术的发展,适当介绍了一部分新内容。并注意培养学生独立思考、分析问题及解决问题的能力。当前,结构力学教学内容更新的重点是电子计算机在结构力学中的应用。为此,在选定编写内容时,减少了适用于手算的技巧方法,提高了对电算的要求。为了培养学生初步具有编写和使用结构计算程序的能力,与矩阵位移法紧密结合,编入了刚架静力分析的源程序。

参加本书编写的有:重庆建筑大学张来仪(第一章、第九章、第十四章)、赵更新(第八章、第十五章),哈尔滨建筑大学景瑞(第七章、第十二章),陈佩英(第六章、第十章),南京建筑工程学院刘郁馨(第三章、第四章、第五章、第十三章),苏州城市建设环境保护学院朱靖华(第二章、第十一章)。本书主编:重庆建筑大学张来仪、哈尔滨建筑大学景瑞。

为了使读者对结构力学的发展和在土建工程中的应用有所了解,特邀请中国工程院院士、哈尔滨建筑大学王光远教授撰写“结构力学的拓广及其在土建工程中的应用”,作为本书的第十六章,供读者参考。

本书由西安建筑科技大学刘铮教授审阅,并提出了许多宝贵的意见,编者曾据此加以修改,对此,我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

(京) 新登字 035 号

本教材是根据国家教育委员会 1995 年批准修定的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)所规定的内容,由重庆建筑大学、哈尔滨建筑大学、南京建筑工程学院、苏州城市建设环境保护学院联合编写的,分上、下两册出版。

下册的主要内容包括矩阵位移法、结构动力学、结构稳定计算、结构的极限荷载、结构非线性分析概论和结构力学的拓广及其在土建工程中的应用等。每章均有相当数量的习题,并附有答案。

本书可作为高等院校建筑工程、交通土建工程、水利工程等专业本科生的教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考。

高等学校建筑工程专业系列教材

结 构 力 学

(下 册)

重 庆 建 筑 大 学	张来仪	主 编
哈 尔 滨 建 筑 大 学	景 瑞	
重 庆 建 筑 大 学	张来仪	编
哈 尔 滨 建 筑 大 学	景 瑞	
南 京 建 筑 工 程 学 院	刘郁馨	
苏 州 城 市 建 设 环 境 保 护 学 院	朱靖华	
西 安 建 筑 科 技 大 学	刘 铮	主 审

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店总店科技发行所发行

密云县银河商标印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 15 $\frac{3}{4}$ 字数: 380 千字

1997 年 6 月第一版 1997 年 6 月第一次印刷

印数: 1—5000 册 定价: 17.00 元

ISBN 7-112-02987-2

TU·2279 (8102)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题,可寄本社退换

(邮政编码 100037)

高等学校建筑工程专业力学系列教材

编写委员会成员名单

主任委员：王光远 中国工程院院士、哈尔滨建筑大学教授
委 员 (以姓氏笔画为序)：

王天明	重庆建筑大学副教授
王焕定	哈尔滨建筑大学教授
王福临	沈阳建筑工程学院副教授
刘 铮	西安建筑科技大学教授
乔宏洲	西安建筑科技大学副教授
朱象清	中国建筑工业出版社总编辑、编审
朱靖华	苏州城市建设环境保护学院讲师
吴德伦	重庆建筑大学教授
张如三	哈尔滨建筑大学教授
张来仪	重庆建筑大学建筑工程学院副院长、副教授
金康宁	武汉城市建设学院副教授
曹 峰	西北建筑工程学院副教授
蒋 桐	南京建筑工程学院教授
景 瑞	哈尔滨建筑大学校长、教授

目 录

第十一章 矩阵位移法	1
第一节 概述	1
第二节 单元刚度矩阵	1
第三节 坐标变换	5
第四节 整体刚度矩阵	8
第五节 矩阵位移法基本方程	18
第六节 计算步骤和应用举例	22
思考题	40
习题	40
第十二章 结构动力计算	43
第一节 概述	43
第二节 运动方程的建立	44
第三节 单自由度体系的自由振动	52
第四节 阻尼对自由振动的影响	63
第五节 简谐荷载作用下无阻尼单自由度体系的受迫振动	67
第六节 简谐荷载作用下有阻尼单自由度体系的受迫振动	74
第七节 多自由度体系的自振频率和振型计算	79
第八节 振型正交性	88
第九节 用振型分解法计算多自由度体系的受迫振动	91
第十节 用能量法计算结构基频	96
思考题	100
习题	100
第十三章 结构稳定计算	106
第一节 概述	106
第二节 确定临界荷载的静力法	107
第三节 确定临界荷载的能量法	117
第四节 平面刚架稳定计算	124
* 第五节 拱的稳定计算	134
第六节 组合压杆的稳定计算	143
思考题	146
习题	147
第十四章 结构的极限荷载	149
第一节 极限荷载的概念	149
第二节 极限弯矩及塑性铰	151
第三节 梁的极限荷载	153
第四节 比例加载时判定极限荷载的一般定理	159

第五节 刚架的极限荷载	162
第六节 用增量变刚度法求刚架的极限荷载	168
思考题	173
习题	173
第十五章 结构非线性分析概论	176
第一节 结构分析的非线性问题	176
第二节 非线性问题的基本解法	177
第三节 非线性弹性问题的求解方法	180
第四节 结构几何非线性分析的有限单元法	184
* 第十六章 结构力学的拓广及其在土建工程中的应用	190
第一节 结构力学与工程理论的发展	190
第二节 工程优化	191
第三节 不确定性力学分析与设计	192
第四节 工程的实施、维修和结构控制	194
第五节 结语	196
附录 I 平面结构分析程序设计和源程序	197
第一节 程序设计中的几个问题	197
第二节 程序标识符及重要子程序的元语言表示	201
第三节 平面结构分析源程序	208
第四节 数据文件格式和算例	224
附录 II 稳定修正系数函数表	231
附录 III 部分习题答案	237
参考文献	242

第十一章 矩 阵 位 移 法

第一节 概 述

前面介绍的力法、位移法和渐近法，都是建立在手算基础上的传统结构分析方法。随着计算机的普及与应用，上述计算方法已不能适应新的要求。因此，基于电算解题的结构矩阵分析，越来越受到人们的重视，也给结构力学的分析与应用领域，开辟了更为广阔的前景。

结构矩阵分析是以传统结构力学为理论基础、以矩阵为数学表述形式、以计算机为运算工具的三位一体的分析方法。矩阵运算的引入，不仅使得公式的排列紧凑，也在形式上具有统一性，便于计算过程的程序化，以适于计算机进行自动化处理的要求。因此，学习本章时，既要了解它与传统方法的共同点，更要了解它的一些新手法和新的着眼点。

与传统的力法、位移法相对应，结构矩阵分析主要区分为矩阵力法和矩阵位移法。前者有利于编制计算机程序，因而广为流行。本章只对矩阵位移法进行讨论。

矩阵位移法是有限元法的雏形，所以结构矩阵分析又称为杆件结构的有限单元法。在本章中将使用有限元法的一些术语和提法。

根据有限元法的基本思路，矩阵位移法包含两个基本环节：一是单元分析，二是整体分析。首先是把结构离散为若干个单元，按照单元的力学特性，建立单元刚度方程，形成单元刚度矩阵；其次是在满足平衡条件和变形条件的前提下，考虑单元的集合，即由单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵，建立整体结构的位移法基本方程，进而求出结构的位移和内力。这样，就使得一个复杂结构的计算问题转化为简单单元的分析与集合问题。

在单元分析方面，单元的刚度方程已在第八章中导出，本章只是将已有的结果表示为矩阵形式，并讨论在任意坐标系中单元刚度方程的通用形式。

在整体分析方面，将根据计算过程程序化的要求，提出直接由单元刚度导出整体刚度的集成规则。这个集成规则是矩阵位移法的核心内容。

第二节 单元刚度矩阵

矩阵位移法的第一步，是把结构离散为单元。通过单元分析，导出单元杆端力与杆端位移的关系，用单元刚度方程来表达。

第八章给出的转角位移方程，实际上就是梁单元的刚度方程。梁单元可以看作杆件单元的特例。

这一节对平面结构的杆件单元进行单元分析，得出单元刚度方程和单元刚度矩阵。推导过程并没有采用新的方法，但有两点新的考虑：讨论杆件单元的一般情况；采用

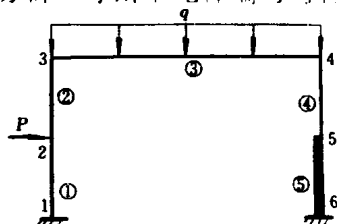


图 11-1

矩阵表示形式。

一、结构的离散与单元表示

在杆件结构矩阵分析中，一般是把结构杆件的转折点、汇交点、边界点、突变点或集中力作用点等列为结点，结点之间的杆件部分看作单元。在图 11-1 表示的平面结构中，1、2、3……6 表示整体结点，①、②……⑤代表各个单元。

图 11-2 给出了平面结构中某一等截面直杆单元变形前后的一般情况。杆件除弯曲变形外，还有轴向变形。设杆长为 l ，截面积为 A ，截面惯性矩为 I ，弹性模量为 E 。1、2 分别表示单元的始端点和终端点，为单元的局部编号。由端点 1 向端点 2 的指向规定为杆轴的正方向，在图中以箭头标示。

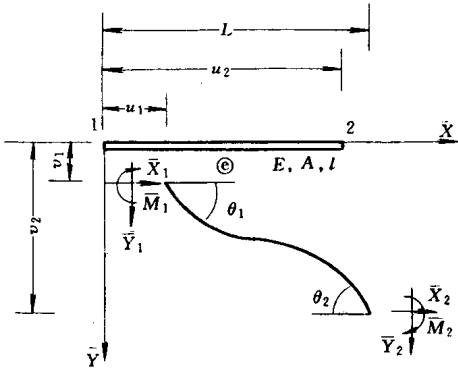


图 11-2

坐标系 $\bar{X}\bar{Y}$ 符合这样的约定： $\bar{X}$ 轴与杆轴重合，指向相同； $\bar{Y}$ 轴与 $\bar{X}$ 轴垂直，符合右手法则。这个坐标系定义为单元的局部坐标系。其中字母 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 上都划有一横，作为局部坐标系的标志。

在局部坐标系中，一般单元的两端各有三个位移分量 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{\theta}$ 及对应的杆端力分量 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{M}$ ，其中， $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 的正方向与坐标系正向相同， $\bar{\theta}$ 、 $\bar{M}$ 均以顺时针转向为正，注意它们同位移法中符号规定的区别。

把单元的六个杆端位移、杆端力分量按照一定的顺序排列，便形成如下形式的单元杆端位移

向量 $\{\bar{\Delta}\}^{(e)}$ 和单元杆端力向量 $\{\bar{F}\}^{(e)}$ ：

$$\{\bar{\Delta}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{(1)} \\ \bar{\Delta}_{(2)} \\ \bar{\Delta}_{(3)} \\ \bar{\Delta}_{(4)} \\ \bar{\Delta}_{(5)} \\ \bar{\Delta}_{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{F}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{(1)} \\ \bar{F}_{(2)} \\ \bar{F}_{(3)} \\ \bar{F}_{(4)} \\ \bar{F}_{(5)} \\ \bar{F}_{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (11-1)$$

向量元素的排列序号依次为 (1)、(2)、…、(6)。这是在单元分析过程中的编码，称为杆端位移分量或杆端力分量的局部码，并以数字加括号作为局部码标志。

二、单元刚度方程和刚度矩阵

当结构受到外力影响时，变形与内力之间具有唯一对应的关系。因此，我们可以选择与位移法类似的作法，建立单元杆端力与杆端位移之间的关系式，即单元刚度方程。

假定忽略轴向受力状态与弯曲受力状态之间的相互影响，现在来分别考虑轴向变形和弯曲变形引起的内力。

首先，由胡克定律可以导出

$$\begin{aligned} \bar{X}_1^{(e)} &= \frac{EA}{l} (\bar{u}_1^{(e)} - \bar{u}_2^{(e)}) \\ \bar{X}_2^{(e)} &= -\frac{EA}{l} (\bar{u}_1^{(e)} - \bar{u}_2^{(e)}) \end{aligned} \quad (11-2)$$

其次, 根据第八章导出的转角位移方程并改用本章的记号, 得到

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1^{(e)} &= \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_1^{(e)} + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_2^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} (\bar{v}_1^{(e)} - \bar{v}_2^{(e)}) \\
 \bar{M}_2^{(e)} &= \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_1^{(e)} + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_2^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} (\bar{v}_1^{(e)} - \bar{v}_2^{(e)}) \\
 \bar{Y}_1^{(e)} &= \frac{6EI}{l^2} (\bar{\theta}_1^{(e)} + \bar{\theta}_2^{(e)}) + \frac{12EI}{l^3} (\bar{v}_1^{(e)} - \bar{v}_2^{(e)}) \\
 \bar{Y}_2^{(e)} &= -\frac{6EI}{l^2} (\bar{\theta}_1^{(e)} + \bar{\theta}_2^{(e)}) - \frac{12EI}{l^3} (\bar{v}_1^{(e)} - \bar{v}_2^{(e)})
 \end{aligned} \tag{10-3}$$

将式 (11-2) 和 (11-3) 汇集在一起, 写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ \hline -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \tag{11-4}$$

上式可记为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [\bar{k}]^{(e)} \{\bar{\Delta}\}^{(e)} \tag{11-5}$$

其中

$$[\bar{k}]^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ \hline -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \tag{11-6}$$

式 (11-4)、(11-5) 称为局部坐标系中的单元刚度方程。矩阵 $[\bar{k}]^{(e)}$ 称为局部坐标系中的单元刚度矩阵。显然, $[\bar{k}]^{(e)}$ 的行数等于杆端力向量的分量数, 列数应等于杆端位移向量的分量数, 因而是一个 6×6 阶的方阵。

三、单元刚度矩阵的性质

(一) 单元刚度系数的意义

$[\bar{k}]^{(e)}$ 中的每个元素称为单元刚度系数。一般来说, $[\bar{k}]^{(e)}$ 中的第 i 行、 j 列元素 $\bar{k}_{ij}$ 代表: 当第 j 个杆端位移分量 $\bar{\Delta}_j$ 独立发生单位位移时 (其他位移分量均为零)、引起的第 i 个杆端力分量 $\bar{F}_i$ 的值。例如, 在式 (11-4) 中, $[\bar{k}]^{(e)}$ 的第 3 行第 5 列元素 $-\frac{6EI}{l^2}$, 为杆端位移分量 $\bar{v}_2=1$ 时引起的杆端力分量 $\bar{M}_1$ 。

(二) 对称性

根据反力互等定理, 各元素之间存在如下关系

$$\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ji} \tag{11-7}$$

表明 $[\bar{k}]^{(e)}$ 是对称矩阵。

(三) 奇异性

一般情况下, $[\bar{k}]^{(e)}$ 是奇异矩阵, 即其元素组成的行列式

$$|[\bar{k}]^{(e)}| = 0 \quad (11-8)$$

直接计算 (11-6) 式不难验证这一结论。由此可见, $[\bar{k}]^{(e)}$ 不存在逆矩阵。从单元刚度方程 (11-5) 出发, 若由杆端位移 $\{\bar{\Delta}\}^{(e)}$ 推算杆端力 $\{\bar{F}\}^{(e)}$, 可得到唯一解; 反之, 若由 $\{\bar{F}\}^{(e)}$ 反推 $\{\bar{\Delta}\}^{(e)}$, 则杆端位移 $\{\bar{\Delta}\}^{(e)}$ 可能无解, 或不存在唯一解。在力学上这可解释为: 由式 (11-5) 表达的杆端力与杆端位移的关系, 对应于一个完全自由的单元, 可以发生任意的刚体位移。

(四) 形式不变性

局部坐标系中的单元刚度矩阵 $[\bar{k}]^{(e)}$, 只与单元的几何形状、物理常数有关, 与单元在结构中的位置无关。或者说, 几何形状和物理常数相等的一类单元, 具有相同的单元刚度矩阵。

四、特殊单元的刚度矩阵

在式 (11-4) 所示一般杆件单元的刚度方程中, 六个杆端位移分量可以指定为任意值。结构中还有一些特殊杆单元, 某些杆端位移已知为零。这些单元的刚度矩阵, 可通过对式 (11-4) 的特殊处理方便地得到。

(一) 连续梁单元

若把连续梁两支座间的一段取作单元, 有端点位移条件

$$\bar{v}_1 = 0, \bar{v}_2 = 0$$

同时, 若不计轴向变形, 又有

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 0$$

将以上式子代入式 (11-4), 便得到连续梁单元的刚度方程

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (11-9)$$

这时单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^{(e)} = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} \quad (11-10)$$

实际上, 上面的导出过程对应于这样的简单作法: 在式 (11-6) 所示一般杆件的单元刚度矩阵中, 删去与零位移分量对应的 1、2、4、5 行和列, 便得到 (11-10) 式。

(二) 平面桁架单元

根据该单元的性质, 只须考虑杆端轴向线位移。于是在式 (11-6) 中, 划去 2、3、5、6 行、列元素, 桁架单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (11-11)$$

用同样的方法, 还可导出其他各种特殊单元的刚度方程和刚度矩阵。

第三节 坐标变换

在上一节，我们以杆轴线为 $\bar{x}$ 轴，建立了单元的局部坐标系，目的是希望导出的单元刚度矩阵具有最简形式。

但是，在一个复杂的结构中，杆件的轴线方向不尽相同，因而各局部坐标系指向不一。为了整体分析的需要，必须建立一个统一的坐标系，称为整体坐标系，作为整个结构的参照。整体坐标系以 xy 表示，一般以右指向的水平轴为 x 轴， y 轴与 x 轴垂直，以向下的指向为正（见图 11-3a）。

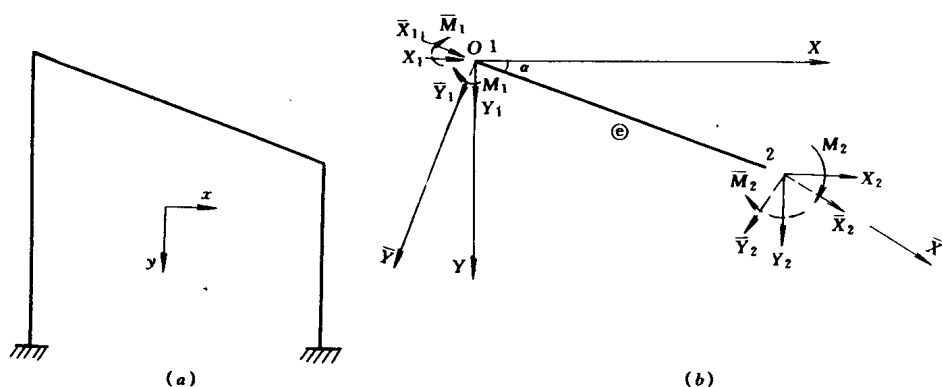


图 11-3

为了推导整体坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ ，我们采用坐标变换的方法：先讨论两种坐标的转换关系，然后导出两种坐标系中单元刚度矩阵的变换式。

一、单元坐标变换矩阵

先考察两种坐标的变换关系。图 11-3b 给出了两种坐标系的位置。 $\bar{X}\bar{Y}$ 为单元 e 的局部坐标系， XY 代表整体坐标系。两个坐标系相交成 α 角，以顺时针转向为正。

考察单元端点 2 处的杆端力。局部坐标系中的分量用 $\bar{X}_2$ 、 $\bar{Y}_2$ 、 $\bar{M}_2$ 表示，整体坐标系中的分量以 X_2 、 Y_2 、 M_2 表示。两者之间存在下列关系

$$\begin{aligned} X_2 &= \bar{X}_2 \cos \alpha - \bar{Y}_2 \sin \alpha \\ Y_2 &= \bar{X}_2 \sin \alpha + \bar{Y}_2 \cos \alpha \\ M_2 &= \bar{M}_2 \end{aligned} \quad (11-12)$$

显然，在端点 1 处，亦存在上述的杆端力转换关系。将它们写成矩阵形式得：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (11-13)$$

或简记为

$$[F]^{(e)} = [T]^{(e)} \{\bar{F}\}^{(e)} \quad (11-14)$$

式中

$$[T]^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-15)$$

称为单元坐标转换矩阵。式 (11-13) 是两种坐标系中单元杆端力的转换式。

可以证明, 单元坐标转换矩阵 $[T]^{(e)}$ 为一正交矩阵。因此, 它的逆矩阵等于其转置矩阵。即

$$([T]^{(e)})^{-1} = ([T]^{(e)})^T \quad (11-16)$$

或

$$[T]^{(e)} ([T]^{(e)})^T = ([T]^{(e)})^T [T]^{(e)} = [I] \quad (11-17)$$

$[I]$ 是与 $[T]^{(e)}$ 同阶的单位矩阵。因此, 式 (11-14) 的逆转换关系式为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = ([T]^{(e)})^T \{F\}^{(e)} \quad (11-18)$$

注意到杆端力、杆端位移与坐标定义的一致性, 同理, 可求出单元杆端位移在两种坐标系中的转换关系。若以 $\{\Delta\}^{(e)}$ 表示整体坐标系中的单元杆端位移列阵, 则

$$\{\Delta\}^{(e)} = [T]^{(e)} \{\bar{\Delta}\}^{(e)} \quad (11-19)$$

$$\{\bar{\Delta}\}^{(e)} = ([T]^{(e)})^T \{\Delta\}^{(e)} \quad (11-20)$$

二、整体坐标系中的单元刚度矩阵

在整体坐标系中, 单元的刚度方程可以写为

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)} \{\Delta\}^{(e)} \quad (11-21)$$

其中, $[k]^{(e)}$ 称为整体坐标系中的单元刚度矩阵。

现来导出 $[k]^{(e)}$ 与局部坐标系中单元刚度矩阵 $[\bar{k}]^{(e)}$ 的转换关系。

单元在局部坐标系中的刚度方程为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [\bar{k}]^{(e)} \{\bar{\Delta}\}^{(e)} \quad (a)$$

将式 (a) 左乘 $[T]^{(e)}$ 并结合式 (10-14), 得到

$$\{F\}^{(e)} = [T]^{(e)} [\bar{k}]^{(e)} \{\bar{\Delta}\}^{(e)} \quad (b)$$

在式 (11-21) 右端引入式 (11-19), 得

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)} [T]^{(e)} \{\bar{\Delta}\}^{(e)} \quad (c)$$

比较式 (b) 和式 (c), 可知

$$[k]^{(e)} [T]^{(e)} = [T]^{(e)} [\bar{k}]^{(e)} \quad (d)$$

等式两边各右乘 $([T]^{(e)})^{-1}$, 便得到

$$[k]^{(e)} = [T]^{(e)} [\bar{k}]^{(e)} ([T]^{(e)})^{-1} \quad (11-22)$$

式 (11-22) 就是两种坐标系中单元刚度矩阵的转换关系。只要求出单元坐标转换矩阵 $[T]^{(e)}$, 整体坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 就能确定。

顺便指出, 由于 $[T]^{(e)}$ 矩阵的正交性, $[k]^{(e)}$ 的计算可以方便地应用下式

$$[k]^{(e)} = [T]^{(e)} [\bar{k}]^{(e)} ([T]^{(e)})^T \quad (11-23)$$

来替代 (11-22) 式。

整体坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 与 $[\bar{k}]^{(e)}$ 同阶，也具有类似的性质：

(1) 元素 k_{ij} 表示在整体坐标系中，第 j 个杆端位移分量独立发生单位位移时引起的第 i 个位移分量方向的杆端力。

(2) 对称性。

(3) 奇异性。

【例 11-1】 试求图 11-4 所示结构中，各单元在整体坐标系中的刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 。各杆截面尺寸相同。 $l = 5\text{m}$, $b \times h = 0.5\text{m} \times 1\text{m}$, $A = 0.5\text{m}^2$, $I = \frac{1}{24}\text{m}^4$, $E = 3 \times 10^7 \text{kN/m}^2$ 。

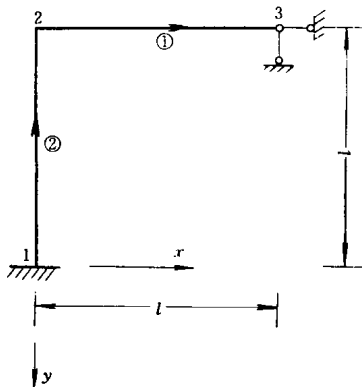


图 11-4

【解】 (1) 局部坐标系中的单元刚度矩阵

图中以箭头标明各单元局部坐标系 $\bar{x}$ 的方向。由于单元①、②的尺寸、弹性常数相同， $[\bar{k}]^{(1)}$ 与 $[\bar{k}]^{(2)}$ 相同。将已知各量代入式 (11-6)，算得

$$[\bar{k}]^{(1)} = [\bar{k}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

(2) 整体坐标系中的单元刚度矩阵

单元①: $\alpha = 0^\circ$ ，由式 (11-15)， $[T]^{(1)} = [I]_{6 \times 6}$ ，于是

$$[k]^{(1)} = [\bar{k}]^{(1)}$$

单元②: $\alpha = -90^\circ$ ，单元坐标变换矩阵为

$$[T]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

据式 (11-23)

$$\begin{aligned} [k]^{(2)} &= [T]^{(2)} \cdot [\bar{k}]^{(2)} \cdot ([T]^{(2)})^T \\ &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 & -12 & 0 & -30 \\ 0 & -300 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ -30 & 0 & 100 & 30 & 0 & 50 \\ -12 & 0 & 30 & 12 & 0 & 30 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & -300 & 0 \\ -30 & 0 & 50 & 30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第四节 整体刚度矩阵

这一节，将在单元分析的基础上，讨论整体分析的基本概念，建立结构的整体刚度方程，导出整体刚度矩阵。

本节和下一节以平面刚架的分析为例，介绍整体分析的原理和方法。对于连续梁、平面桁架，均可看作这里的特例，在应用举例中讨论。

整体刚度方程是按位移法建立的。具体作法有两种：一种是传统位移法，另一种是直接刚度法（也称刚度集成法或单元集成法）。后一种方法的优点是计算过程程序化，适于用计算机处理。

按处理结构支承条件的次序，直接刚度法分“先处理”和“后处理”两种作法。后处理法的特点是，先不考虑支承条件，在形成原始的整体刚度矩阵后，再引入支承条件，进行处理，得出整体刚度矩阵；先处理法则是在形成整体刚度矩阵时，事先已根据结构的支承条件进行了处理。

本章着重介绍先处理法，有关后处理法的内容可参考其他书籍。

我们先回顾一下传统作法。

对于图 11-5a 所示的刚架，设不计杆件的轴向变形，位移法基本体系如图 11-5b 所示。基本未知量为结点转角 Δ_1 、 Δ_2 ，组成结构的结点位移向量 $\{\Delta\}$ ：

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$$

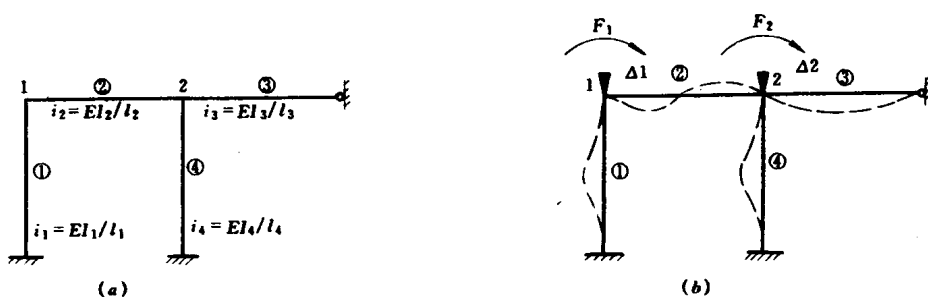


图 11-5

与 Δ_1 、 Δ_2 对应的力是附加约束力偶 F_1 、 F_2 。它们组成整体结构的结点力向量 $\{F\}$ ：

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

在传统作法中，先分别考虑每个转角位移 Δ_1 、 Δ_2 独自引起的结点力偶，如图 11-6a、b 所示；然后，叠加这两种情况，即得到结点力偶 F_1 、 F_2 如下：

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_1 & 4i_2 + 3i_3 + 4i_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (11-24)$$

记为

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \quad (11-25)$$

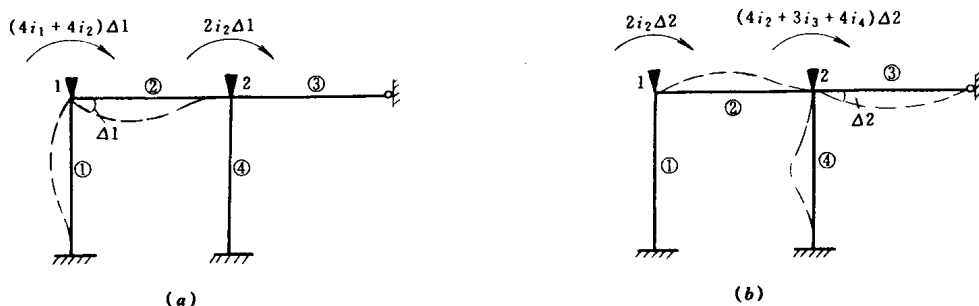


图 11-6

式中

$$[K] = \begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 + 3i_3 + 4i_4 \end{bmatrix} \quad (11-26)$$

式 (11-24) 或 (11-25) 称为整体刚度方程, $[K]$ 称为整体刚度矩阵。

上面简略地回顾了传统位移法, 下面详细介绍直接刚度法中的先处理法。

一、直接刚度法的力学模型和基本原理

按传统位移法建立整体刚度方程 (11-24) 时, 我们是分别考虑每个结点位移对结点力向量 $\{F\}$ 的贡献, 然后按结点进行叠加。

按直接刚度法建立整体刚度方程时, 是分别考虑每个单元的结点位移同时对 $\{F\}$ 的贡献, 然后按单元进行叠加。

直接刚度法仍是以传统位移法的基本体系为力学模型, 如图 11-7 所示。杆上的箭头表示单元的局部坐标 $\bar{x}$ 。为了便于同传统作法的结果比较, 仍忽略杆件的轴向变形。

现在, 我们来考察结点的平衡条件和几何条件, 讨论整体刚度矩阵的集成原理。

(一) 利用支承条件和变形协调条件求各单元对 $\{F\}$ 的贡献

首先, 考虑单元①的贡献。记为

$$\{F\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

由单元①的支承条件和变形谐调条件, 已知

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(1)} = \bar{v}_1^{(1)} = \bar{u}_2^{(1)} = \bar{v}_2^{(1)} &= 0 \\ \bar{\theta}_1^{(1)} &= 0, \bar{\theta}_2^{(1)} = \Delta_1 \end{aligned} \quad (b)$$

在单元刚度方程 (11-4) 中, 引入式 (b) 各条件并向整体坐标系转换, 可得

$$F_1^{(1)} = \bar{M}_2^{(1)} = \bar{M}_2^{(1)} = 4i_1\Delta_1 \quad (c)$$

由于附加约束的作用

$$F_2^{(1)} = 0 \quad (d)$$

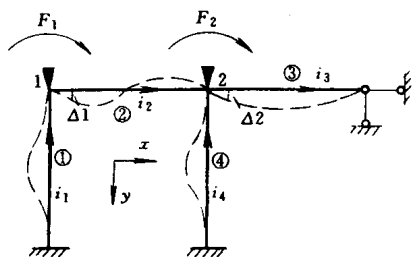


图 11-7

式 (c) 和 (d) 可合并为增广形式:

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (11-27)$$

记为

$$\{F\}^{(1)} = [K]^{(1)} \{\Delta\} \quad (e)$$

其中

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f)$$

$[K]^{(1)}$ 表示单元①对整体刚度矩阵提供的贡献, 称为单元①的贡献矩阵。

其次, 考虑单元②的贡献。记为

$$\{F\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (g)$$

杆端位移条件给出

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(2)} = \bar{v}_1^{(2)} = \bar{u}_2^{(2)} = \bar{v}_2^{(2)} &= 0 \\ \bar{\theta}_1^{(2)} = \Delta_1, \bar{\theta}_2^{(2)} &= \Delta_2 \end{aligned} \quad (h)$$

在单元刚度方程中引入条件式 (h), 得到

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} = M_1^{(2)} = \bar{M}_1^{(2)} &= 4i_2\Delta_1 + 2i_2\Delta_2 \\ F_2^{(2)} = M_2^{(2)} = \bar{M}_2^{(2)} &= 2i_2\Delta_1 + 4i_2\Delta_2 \end{aligned} \quad (i)$$

即

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

单元②的贡献矩阵为

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \quad (11-28)$$

同理, 可求得单元③、④的贡献

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3i_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (11-29)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4i_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (11-30)$$

及贡献矩阵

$$[K]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3i_3 \end{bmatrix}, [K]^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4i_4 \end{bmatrix} \quad (11-31)$$

(二) 利用平衡条件组集整体刚度矩阵

结点 1、2 的隔离体如图 11-8a、b 所示。

按力矩平衡条件, 在结点 1、2 有下列关

系式:

$$F_1 = F_1^{(1)} + F_1^{(2)}$$

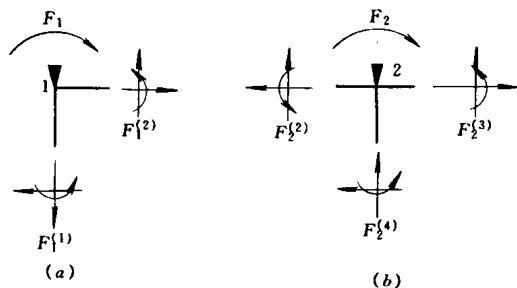


图 11-8

$$F_2 = F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(4)} \quad (k)$$

合并以上二式，得

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (l)$$

注意到式 (d) 并作类似的扩充，(l) 式成为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (m)$$

在上式右端引入式 (11-27)、(j)、(11-29) 及 (11-30)，叠加后得到整体刚度方程

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 + 3i_3 + 4i_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (11-32)$$

或记为

$$\{F\} = \left(\sum_{(e)} [K]^{(e)} \right) \{\Delta\} \quad (11-33)$$

由此得出整体刚度矩阵 $[K]$ ：

$$[K] = \sum_{(e)} [K]^{(e)} = \begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 + 3i_3 + 4i_4 \end{bmatrix} \quad (11-34)$$

上式表明，整体刚度矩阵 $[K]$ 为各单元贡献矩阵之和。

可以看出，单元贡献矩阵 $[K]^{(e)}$ 是 $[K]$ 的同阶矩阵，是由 $[k]^{(e)}$ 元素及扩充的零元素组成的矩阵。按式 (11-34) 组集的整体刚度矩阵，结果与式 (f) 相同。因此，直接刚度法与传统位移法是异途同归的。

从以上讨论，可以归纳出直接刚度法求整体刚度矩阵的两个重要步骤：

第一步，由单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 求单元贡献矩阵 $[K]^{(e)}$ 。

第二步，由 $[K]^{(e)}$ 求整体刚度矩阵 $[K]$ 。

其中，第二个步骤比较简单，只是简单的叠加。因此，下面将对第一个步骤作进一步的讨论。

二、按单元定位向量组集整体刚度矩阵

前已指出， $[K]$ 是由 $[K]^{(e)}$ 简单叠加而成，而 $[K]^{(e)}$ 又是由 $[k]^{(e)}$ 的元素及零元素扩充而成，因此，组集整体刚度矩阵的关键，是实现 $[k]^{(e)}$ 的元素在 $[K]^{(e)}$ 中的定位。为此，下面先讨论几个概念，再讨论组集整体刚度矩阵的法则。

(一) 结构有效位移的整体码

这里，有效位移是指：在传统位移法中需要作为基本未知量的所有位移。

把结构的结点有效位移依次编号，每个位移分量对应的序号称为该位移的整体码。

在先处理法中，凡是已知为零的位移分量或可以忽略的结点位移分量，其整体码均编为 0。

考虑例 11-1 中的平面刚架，整体编码如图 11-9a 所示。

结点 A 有三个位移分量，编号顺序依次为： $u_A \rightarrow v_A \rightarrow \theta_A$ 。因此，A 结点位移分量的整