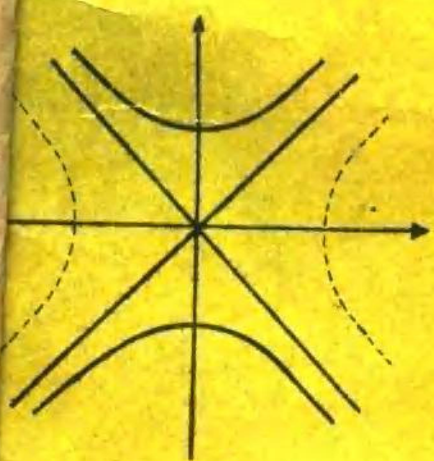
广义相对论基础

金万修 编著



东北师范大学出版社

广义相对论基础

金万修　编著

东北师范大学出版社

广义相对论基础

金力修　编著

东北师范大学出版社出版
（长春市斯大林大街110号）
吉林省新华书店发行
长春市第九印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：7.625　字数：197千
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
印数：3 000
ISBN 7—5602—0045—1/O·11
统一书号：13334·26　（压膜）定价：1.65元

前　　言

促使我写这本书的主要原因是，目前很难找到一本适合于物理系本科高年级学生用的自成体系的广义相对论中文书。虽然广义相对论方面外文书籍很多，但大部分是比较高深的专著，或过分简单的通俗读物。据我几年来给大学物理系高年级学生讲广义相对论选修课及研究生广义相对论基础课的经验，他们希望有一本可以作为选修课教材及自学的广义相对论方面的教本，能使初学者在入门阶段获得系统的或大部分广义相对论知识。为此，我把几年来在物理系使用过的广义相对论讲义及部分研究生广义相对论基础课讲稿，在力求理论体系完整的条件下，经多次修改写成此书。

为使读者阅读方便起见，本书力求在物理知识及数学知识方面自给自足。本书主要包括下列内容：狭义相对论部分，该部分主要是为读者提供学习广义相对论所必须的有关狭义相对论知识；数学部分，给读者提供学习广义相对论的必要的数学工具；广义相对论基础理论部分；广义相对论的实验验证及理论预言；最后是广义相对论宇宙模型。

为使读者更好地理解和掌握有关原理、提高运算能力，每章末都有一定量的习题。对于比较难作的习题，均给了适当的提示。

本书的前九章由编著者执笔；第十章，第十一章由綦国英同志执笔；最后由作者统编完成。

顾达天同志为本书绘制了全部插图，作者表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在不妥或错误之处，恳请读者给予批评指正。

金万修

1987年2月于东北师大

目　　录

第一章　狭义相对论时空

§1　牛顿力学时空

在日常生活中人们对时空的认识是，时间间隔对任何参考系的观察者都是不变的，也就是说一个标准钟在任何参考系中其时率是不变的，因而对任何参考系都可以采用统一的时计。但是一个物理事件发生在空间的位置，对不同参考系的观察者而言却不一样，即物理事件的空间位置是相对的。

经典力学相对性原理指出：如果K系是惯性系，K′系相对于K系做匀速直线运动，那么K′系也是惯性系。如果在K系中取一笛卡儿坐标系OXY，在K′系中也取一笛卡儿坐标系O′X′Y′，并使二者对应坐标轴互相平行（图1.1）。在 t＝0 时刻二坐标原点重合，K′系相对于K系沿X轴方向以速度V做匀速直线运动。由于经典力学中时间的绝对性，发生于空间同一点的同一物理事件，如果在K系中其空间坐标用（x，y，z）表示，在K′系中用（x'，y'，z'）表示，二者必满足下列关系：

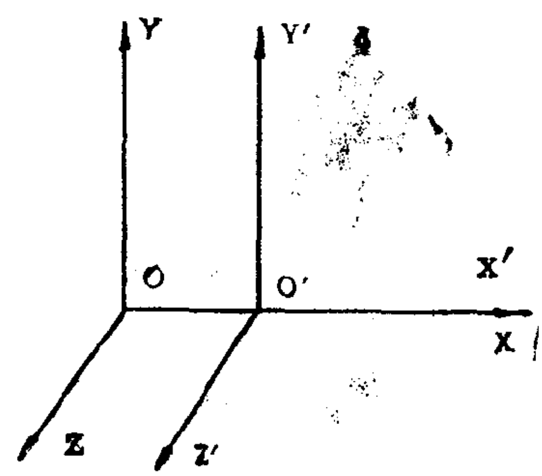


图　1.1

$$
\begin{aligned}
x' &= x - V\cdot t \\
y' &= y \qquad\qquad (1.1)\\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

或其逆变换为

$$x = x' + vt'$$
$$y = y' \qquad (1.2)$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

（1.1）式就是著名的伽里略变换式。从（1.1）式可以看出，一个物理事件在不同的参考系中空间位置是相对的。如果两个物理事件在K系中同时发生，即$t_1 = t_2$，则这两个事件在K′系中发生的时间分别为t'_1、t'_2，必有$t'_1 = t'_2$。即物理事件的同时性是绝对的。如果二事件同时发生，但发生于空间不同地点，则二事件对K系及K′系空间距离分别为$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$，$d' = [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]^{\frac{1}{2}}$，从(1.1)式必有$d = d'$。即空间两点间的距离是绝对的，因此牛顿力学时空通常称为绝对时空。如果一个刚杆相对于K系是静止的，在K′系中的观察者看来它是运动的，但刚杆的长度无论是对K系或K′系的观察者来说，它的长度是相等的。因此不同的参考系可以采用统一的标准尺进行空间度量。由于同时性的绝对性，对不同参考系可以采用统一的时计（标准钟）来度量时间间隔。

假设一个粒子在某一时刻相对于K系运动速度是$\boldsymbol{v}$，相对于K′系运动速度为$\boldsymbol{v}'$，从（1.1）式可以立即导出粒子速度变换式为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} \qquad (1.3)$$

上式称为牛顿力学中速度相加定理。

经典力学相对性原理断言：物理规律在一切惯性系中是不变的。而惯性系间的时空变换式为伽里略变换式(1.1)，因此要求一切物理方程在伽里略变换下数学形式应该不变，即协变。

十九世纪末到廿世纪初，电动力学迅速发展起来，并且证明了光现象也遵守电磁理论，而电磁现象满足麦克斯韦方程，

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{E}=4\pi\rho \\
&\nabla \times \boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0 \qquad\qquad (1.4)\\
&\nabla \times \boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0
\end{aligned}
$$

式中c是常数，对光现象c是光速。按经典力学相对性原理，麦克斯韦方程应在伽里略变换下是协变的。然而按速度相加定理$c=c'+V$，光速并非常数，因而（1.4）式在（1.1）式变换下不是协变的。这样就产生了下面两种观点：一种观点认为变换式（1.1）是正确的，相对性原理不正确，麦克斯韦方程只在特殊参考系中才成立，光速在不同参考系中不同；另一种观点认为相对性原理是正确的，伽里略变换式（1.1）是不正确的。后一种观点实质上就是要求改变牛顿力学的绝对时空观。

§2 爱因斯坦相对性原理 光速不变原理

爱因斯坦认为：在一切惯性系中物理规律都是一样的，即在K系和K′系中一个正确的物理方程，都应该取同样的数学形式。从K系到K′系的时空变换式应保证物理方程的协变性。同时爱因斯坦又提出了另一条原理——光速不变原理：真空中的光速是各向同性的，对任何惯性参考系，真空中光速数值不变。同时爱因斯坦提出，一对物理事件在K系中是同时的，在K′系中不一定是同时的。因为测量时间必须首先在一个参考系内校准各地时钟，才能达到一个惯性系内采用统一的时计。而校准各地时钟一个物理上切实可行手段（而不是先验的）是用一个信号，既然光速在不同参考系中各向同性且数值不变，那么用光信号做为各惯性系校准时钟的绝对标准是合理的。

如果在K′系内校准A′、B′两地的时钟（图1.2），则要在A′、

B'的中点C'向相反方向发出一个光信号，当光信号到达A'、B'时，校准A'、B'二处时钟指同一时刻。则K'系内的观察者认为A'、B'二处接到光信号二事件是同时的。然而对于一个K系内观察者如何来看这一问题呢？从K系内观察者的观点看来，光的速度也是c，但A'迎着光信号运动，而B'点离开光信号运动，因此A'点先接到光信号，B'点后接到光信号，所以A'接到光信号这一事件先于B'接到光信号这一事件，即二事件不是同时的。因而同时性是相对的，伽里略变换是不正确的。

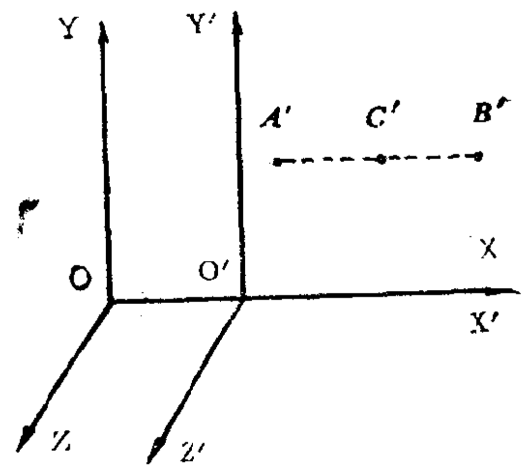


图 1.2

§3 事件 间距

一个物理事件，必须指出它是在何时、何地发生的，即必须用空间坐标（x，y，z）及时间t来描述一个物理事件。如果引入一个四维时空坐标系（t，x，y，z），则一个物理事件可以用四维时空中一点来描述，该点称为世界点。由世界点所构成的四维时空中的光滑曲线称为世界线。

光速不变原理的数学表达式可以写为

$$c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=0$$

对于一切物理事件引入下式：

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

ds^2称为二邻近事件的间距。对于有限距离二事件，间距为

$$s_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

二邻近事件在K系和K'系中的间距分别为

$$ds_{12}^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

$$ds'^2_{12}=c^2dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2$$

将光速不变原理和相对性原理二者结合起来，可以证明，对任何二相邻事件满足

$$ds^2_{12}=ds'^2_{12}$$

也就是说从一个惯性系变到另一个惯性系的时空变换式必须满足间距不变性。即间距在坐标变换下是不变量——绝对量。

如果K系中$ds^2>0$，则K′系中必有$ds'^2>0$。当二事件间距满足$ds^2>0$，称二事件是类时事件。如果二事件是类时的，总可以找到一个参考系K′，使得二事件发生于空间同一地点。事实上当$s^2_{12}>0$时，有

$s^2_{12}=s'^2_{12}=c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2>0$令$x'_1=x'_2$，$y'_1=y'_2$，$z'_1=z'_2$，则$s'^2_{12}=c^2(t'_2-t'_1)^2>0$。这说明在这样的K′坐标系中二事件发生于空间同一地点。由光速不变原理，任何相互作用的传播速度必小于光速，即有因果联系的事件传播速度满足$v<c$，由

$$\begin{aligned}s^2_{12}&=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2\\&=(c^2-v^2)(t_2-t_1)^2\end{aligned}$$

可知有因果关系二事件必须$s^2_{12}>0$，因此二因果事件关系必须是类时的。

$s^2_{12}<0$的两个事件称为类空事件。如果二事件是类空的，总可以找到一个坐标系K′，使得二事件是同时的但不同位。事实上当$s^2_{12}<0$时，有

$s^2_{12}=s'^2_{12}=c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2<0$。如果令$t'_2=t'_1$，上式显然成立，也就是说当二事件是类空的$s_{12}<0$，总可以找到一个$K'$系二事件是同时的。二事件是类空的，$s_{12}$必为虚数，从

$$s_{12}=(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}c(t_2-t_1)$$

为虚数，必有

$$1-\frac{v^2}{c^2}<0 \quad v>c$$

因而二类空事件之间不可能存在因果联系。

从上述分析中可以看出，粒子运动轨道上邻近两个时空点间距必须是类时的，即粒子的世界线必须是类时曲线。

事件按间距分类可以在四维时空中用几何图象直观表示如图1.3所示。如果用一个轴表示空间轴，一个轴表示时间轴，在这个二维时空图中，$s_{12}=0$，即$c^2t^2-x^2=0$，显然是过o点的两条直线，这两条直线分别表示光信号沿x轴正负方向传播。$t=0$时刻过o点做匀速直线运动的一个粒子，因其速度小于光速，粒子世界线必在aoc、bod二区域内，该二区域内任何一个时空点与o点的间距必是类时的。aoc区域内发生的任何事件，都比发生于o点的事件较迟，因而称aoc内发生的事件对o而言是绝对未来事件。而bod区域内发生的事件都比o较早，称为绝对过去事件。$s_{12}^2<0$区域即图中阴影部分是类空区，出现于该区域的事件对o点来讲二者是类空的，即该区域内发生的事件不可能与发生于o点的事件有因果联系，称二事件为绝对远离事件。

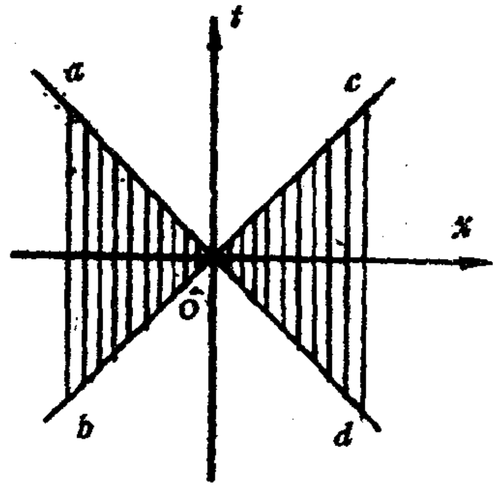


图 1.3

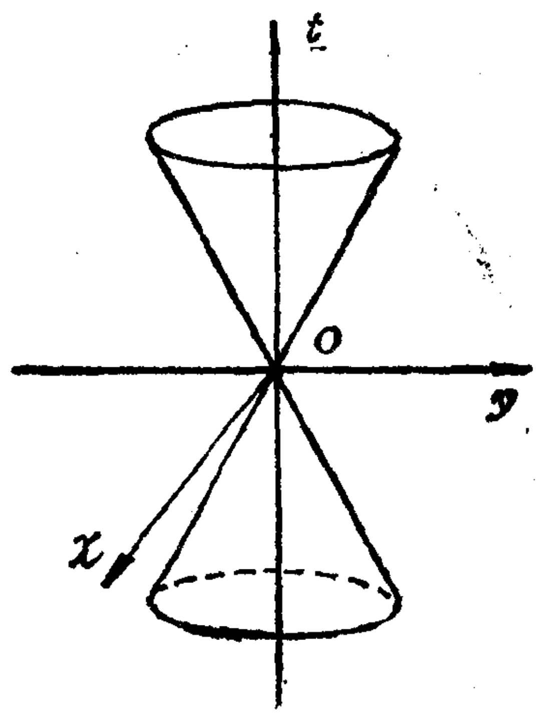


图 1.4

如果考虑是四维时空，则

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$$

表示一个四维时空的超锥面，称

为光锥。对于一维时间二维空间其图象如图1.4所示，时空被光锥划分为类时区和类空区。

§4 本征时

相对于某一参考系静止的标准钟走的时间间隔称为本征时时间间隔。例如，一个时钟相对于K系做匀速直线运动，将K'系与该时钟固定在一起，则这一时钟相对K'系静止，按间距不变性，有

$$c^2dt'^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)$$

由上式得到

$$dt'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \tag{1.5}$$

（1.5）式的一个直接结果是时间延缓。因为从K系的观点看静止于K系的时钟走的时间是dt，那么运动的钟走的时间是dt'，从（1.5）式显然可以看到$dt'<dt$，也就是说运动的时钟走的慢了。但从K'系的观点看K系中的静止时钟是运动的，因而会得到

$$dt=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt' \tag{1.6}$$

从（1.6）式看到$dt<dt'$，也就是说从K'系的观点看K系中的时钟变慢了。二者是否矛盾呢？仔细考虑起来并不矛盾。因为（1.5）式说的是一个运动的钟与K系中很多静止的钟来比较；而（1.6）式说的是K系中的一钟与K'系中的很多钟比较，二者观点并不相同。这种相互观察都有时间延缓现象来源于同时的相对性，来源于惯性系的对称性。

由（1.5）式和（1.6）式得出的观察者互看时钟延缓的结论，会产生一种所谓时钟佯谬的问题，或通俗的所谓双生子佯谬问题。如果同时静止于K系中某地的两个时钟，事先已经把

它们校准，使其中一个运动起来（如装在火箭上），另一个仍静止于原处，然后运动的钟回到出发位置与静止于原处的钟对照，那么从静止参考系的观点，运动的钟应该落后；从运动参考系的观点，在原处静止的钟应该落后。那么，究竟应该哪一个钟落后呢？如果在K系中某一点诞生一对孪生兄弟，使其中一个运动起来再回到原处，那么二者之中哪一个会更年轻些呢？这就是所谓双生子佯谬问题。结论应该是不管从什么观点看，都是运动钟落后了。这一结论并不与（1.5）式及（1.6）式矛盾。因为与运动钟连在一起的参考系并非惯性系，因而不具有惯性系的对称性。

§5 罗伦兹变换

现在我们来寻找由惯性系K到惯性系K'的时空变换式。为简单起见设K系与K'系中二笛卡儿坐标系于某一瞬间原点重合，三个空间轴互相对应平行，K'系沿x轴正方向以速度V相对于K系做匀速直线运动。由相对性原理可以证明变换是线性的，即

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}t \\
y' &= y \\
z' &= z \qquad\qquad (1.7) \\
t' &= a_{21}x + a_{22}t
\end{aligned}
$$

（1.7）式必须满足间距不变的要求，即

$$c^2dt^2 - dx^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 \qquad (1.8)$$

将（1.7）式代入（1.8）式，由于dt^2与dx^2的任意性，若使（1.8）式成恒等式必须等式两端对应的系数相等。于是得到

$$
\begin{aligned}
a_{11}^2 - c^2a_{12}^2 &= 1 \\
a_{11}a_{12} - c^2a_{21}a_{22} &= 0 \qquad (1.9) \\
a_{12}^2 - c^2a_{22}^2 &= -c^2
\end{aligned}
$$

(1.9) 式中有四个未知量，但只有三个方程。为了使方程对未知量得定解，必须再找出另一个独立方程。利用K'系相对于K做匀速运动这一运动学条件，可以找到这一独立方程。设P点相对于K'系静止，则P点必相对于K系以速度V沿X轴正方向运动。从 (1.7) 式$dx'=0$得到

$$a_{11}dx+a_{12}dt=0$$

从上式得到$\frac{a_{12}}{a_{11}}=-V$，将它代入 (1.9) 式中并解之得

$$a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\quad a_{12}=\frac{-v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$a_{21}=\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\quad a_{22}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

由上式得到特殊罗伦兹变换为

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t-v/c^2\cdot x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (1.10)$$

由惯性系的对称性，(1.10) 式必存在逆变换，即K'系到K系的变换。它只需要将 (1.10) 式中的v换为 ($-$v)，立即可以得到

$$\begin{aligned} t &= \frac{t'+v/c^2\cdot x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad (1.11)$$

爱因斯坦相对性原理断言：一切物理方程对罗伦兹变换应该是

协变的。

罗伦兹变换的一个结果是长度收缩。设有等长的两个刚杆静止于K系中，如果一个杆相对于K系沿X轴正方向做匀速直线运动。对于这样一个运动的杆，如果用与杆一起运动的尺来量，则量得杆长的数值仍等于静止于K系中用K系中的尺去量得到的数值。因为运动的杆如果发生长度变化，则运动的尺也必按同比例变化。K'系中量得的杆长为$l_0 = x_2' - x_1'$，K系看此杆的长度为$l = x_2 - x_1$，于是从（1.11）式$t_1' = t_2'$得到

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (1.12)$$

（1.12）式表明从K'系的观点看K系中的杆是运动的，它的长度缩短了。反之从K系的观点看与K'系一起运动的杆缩短了。

§6 速度变换式

设一粒子在某一时刻以速度v相对于K系运动，其速度分量分别为

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$$

同一粒子相对于K'系速度分量分别为

$$v_x' = dx'/dt', \quad v_y' = dy'/dt', \quad v_z' = dz'/dt'$$

微分（1.10）式后三个式得

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - v/c^2 \cdot dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

从上面四个表达式得到下列速度变换公式