3

进　　展

数　　学

数　　论

两年多来，数论各分支的研究工作都有进展。因限于篇幅，这里介绍我国数论工作者的部分成果。

王元、徐广善、张荣肖研究了高维数值积分的数论方法。他们给出一般分圆域 R_s 的整底联立丢番图逼近方法，并由此得到利用 R_s 求出的空间一致分布点列及其应用。

王元研究了代数数域上的加型方程。他得到：

1．若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 n 次代数数域 K 的 $2s$ 个非零全正整数，假定 $s \geqslant C_1(k, n, \varepsilon)$，则方程

$$\alpha_1\lambda_1^k+\cdots+\alpha_s\lambda_s^k-\beta_1\mu_1^k-\cdots-\beta_s\mu_s^k=0$$

有一组非寻常全非负整数解 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s, \mu_1, \cdots, \mu_s$ 适合于

$$\max_{i,j}(N(\lambda_i), N(\mu_j)) \ll m^{1/k+\varepsilon},$$

此处 $m=\max\limits_{i,j}(N(\alpha_i), N(\beta_j))$。

2．命 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 为 K 的一组整数，假定 $s \geqslant C_2(k, n, \varepsilon)$，则方程

$$\gamma_1 a_1 \varphi_1^k+\cdots+\gamma_s a_s \varphi_s^k=0$$

有一组解 $a_1, \cdots, a_s, \varphi_1, \cdots, \varphi_s$，此处每一个 $a_i=1$ 或 -1，而 $\varphi_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 为全非负整数，但不全为零，且满足 $\max\limits_i N(\varphi_i) \ll M^\varepsilon$，其中 $M=\max(1, |N(Y_1)|, \cdots, |N(Y_s)|)$。

在超越数理论方面，徐广善、于坤瑞和王连祥研究了 G 函数和 E 函数的性质。徐广善给出一类满足某微分方程组的 G 函数的线性形式的下界估计，并对估计式在超几何级数和椭圆积分方面给出一些应用。于坤瑞、王连祥应用 Mahler 方法得到满足某线性微分方程组的 E 函数组合的下界估计。这个估计式比以前得到的估计式较为一般化，也好一些。于坤瑞讨论了定义在代数数域上的 E 函数和 G 函数的性质，给出它们在代数点上的线性形式的下界估计。王连祥给出一类定义在 p-adic 数域 Q_p 的完备代数闭包上的 p-adic E 函数和 G 函数的多项式的代数点上的下界估计。他还给出一类定义在 p-adic 数域的完备代数闭包上的一般 p-adic F 函数，这类函数包括了 p-adic E 函数和 p-adic G 函数。

他估计了一类带秩的 p-adic F 函数的多项式在代数点上的值的下界。

朱尧辰研究了代数无关性的判别问题。设 s 个幂级数定义为

$$f_\nu(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{\nu,k}z^{\lambda_{\nu,k}}\quad,\ \nu=1,\ \cdots,\ s,$$

其中 $\alpha_{\nu,k}$ 是代数数，f_ν 的收敛半径为 R_ν，而 $\lambda_{\nu,k}$ 是增加得充分快的整数。朱尧辰给出关于 $\alpha_{\nu,k}$ 和 $\lambda_{\nu,k}$ 的一系列条件，证明了当这些条件被满足时，对任何代数数 $\theta_1,\ \cdots,\ \theta_s(0<|\theta_\nu|<R_\nu,\ \nu=1,\ \cdots,\ s)$ 而言，$f_\nu(\theta_\nu)$ $(\nu=1,\ \cdots,\ s)$ 是代数无关的；并且对于 t 个不同的代数数 $\theta_1,\cdots,\theta_t(0<|\theta_t|<|\theta_{t-1}|<\cdots<|\theta_1|<\min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s}R_\nu)$，$f_\nu(\theta_\mu)(\nu=1,\ \cdots,s;\ \mu=1,\cdots,t)$ 代数无关。他应用这些判别法考察了一些特殊数组的代数无关性。朱尧辰和任建华研究了一类缺项级数在有理点的超越性，给出用代数数逼近 e 和 e^π。朱尧辰将 Гельфонд 超越性判别法则推广到多变量的问题中去，并给出复数的代数无关判别法则。

柯召、孙琦在《群论、组合论和代数数论中一些不定方程》一文中介绍了在群论、组合论和代数数论的研究工作中提出的一些不定方程及某些未解决的问题。

柯召、孙琦研究了丢番图方程 $x^4-2py^2=1$。他们用初等方法证明了：当 p 为奇素数时，除 $p=3,\ x=7,\ y=20$ 外无其他整数解。孙琦研究了 Znám 问题，即对每一个整数 $n>1$，是否存在整数 $x_i>1(i=1,\ \cdots,\ n)$，使得对每一个 i，x_i 是 $x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n+1$ 的真因子。他得到：满足 Znám 问题的 n 个整数 $x_1,\ \cdots,\ x_n\ (1<x_1<\cdots<x_n)$ 的组数 $Z(n)$ 与不定方程

$$\frac{1}{y_1}+\cdots+\frac{1}{y_n}+\frac{1}{y_1\cdots y_n}=1\ (1<y_1<\cdots<y_n,\ n>1)$$

的解 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 的组数 $\Omega(n)$ 之间必成立不等式：

$$Z(n)\geqslant\Omega(n)-\Omega(n-1)>0。$$

从而解决了 Znám 问题。他同时给出构造性的结果。

柯召、郑德勋研究了 $a(x^2+y^2)+bz^2$ 表数的问题。他们得到在这种形式的实三元恒正二次型中，不存在表数相同而互不等价者。

孙琦、周小明研究了丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$，其中 a、b、c 是互不相同的素数。他们给出当 $q=p+2$，-2 模 q 的次数 l 满足 $3|l$，$f=p^2+p+1$ 是一个素数，且满足 $q^{p+1}\not\equiv1\pmod f$ 时，丢番图方程 $p^r+2=q^s$ 在 $r>1$ 或 $s>1$ 时无解。

孙琦、张明志解决了 Selfridge 问题，哪一些正整数 a、b 能够对所有的自然数 n 成立 $a^a-2^b|n^a-n^b$？他们证明了当 $0\leqslant b<a$ 时，只有 14 对 $(a,\ b)$ 成立上式，并且具体给出这 14 对数。孙琦、屈明华还研究了循环差集：设 v 是一个正整数，$D=\{a_1,\ \cdots,\ a_k\}$ 是模 v 的 k 个不同剩余的集，如果对每一个 $a\not\equiv0\pmod v$，同余式 $a_i-a_j\equiv a\pmod v$，$a_i,\ a_j\in D$ 恰有 λ 对解 $(a_i,\ a_j)$，则称 D 是一个参数为 v、k、λ 的循环差集。若以 $\Omega(v)$ 表示 v 的不同素因子的个数，他们完全解决了 $\Omega(v)=2$ 的情形。即得到：当 $2\nmid v$，$\Omega(v)=2$ 时，除去 $v=21$，$k=5$，$\lambda=1$ 存在差集 $\{3,\ 6,\ 12,\ 7,\ 14\}$ 其中每一个数均与 v 不互素外，任一个 v、k、λ 差集 D 至少含有一个数与 v 互素。

李复中研究了 Golomb 猜想：在任何有限域 $GF(p^n)$ 中必存在两个本原元。他证明了在一些特殊情况下 Golomb 猜想成立。

孙琦、万大庆研究方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{d_i}\equiv0\pmod 1,\ 1\leqslant x_i<d_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)\tag{1}$$

的可解性和解的个数。其中 $d_1, \cdots, d_n$ 是给定的正整数。他们还给出方程(1)无解的充分和必要条件。这个方程的可解性及解的个数问题在有限域上对角形方程的研究中起着重要作用。即如果方程(1)无解,则有限域上一类对角形方程解的个数可以立即定出。周国富、康继鼎还研究了丢番图方程 $\sum_{k=1}^{m} k^n=(m+1)^n$,证明在一些特殊情况下方程无解。

沈仲琦研究了数论变换。若有单位元的可易环 R 的 m 维序列

$$x^*_{k_1\cdots k_m}=\sum_{n_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum_{n_m=0}^{N_m-1} a^{(1)}_{k_1n_1}\cdots a^{(m)}_{k_mn_m}x_{n_1}\cdots x_{n_m}$$

是可逆的,且有循环卷积性质,则称为 R 上 m 维 CRT。他给出 R 上长为 $N_1N_2\cdots N_m$ 的 m 维变换是 R 上的 m 维 CRT 的充要条件及 R 上 m 维 DFT (离散Fourier变换)存在的充要条件。

姚琦、楼世拓证实了 Chowla-Cowles 关于 Apéry 数的四个猜想。

在解析数论方面,陈景润改进了 Goldbach 数的例外集的估计。凡能表为两个奇素数之和的偶数称为 Goldbach 数,用 $E(x)$ 记不超过 x 的 Goldbach 数的例外集的元素个数。他给出 $E(x)$ 的上界估计式,得到 $E(x)=O(x^{0.96})$。这个结果改进了陈景润、潘承洞 1979 年所证明的 $E(x)=O(x^{0.99})$。

陆鸣皋讨论了当 Riemann-ζ 函数的零点密度假设成立的情况下,h 取何值时,在区间 $(x, x+h]$ 中必存在 Goldbach 数的问题。他证明了当 x 充分大时,h 可以取 $C(\varepsilon)\log^{7+\varepsilon}x$($\varepsilon$ 是任意正数,$C(\varepsilon)$ 为常数)。关于 Goldbach 数的无条件结果,姚琦、楼世拓得到:当 x 充分大,$h\geqslant x^{(17/227)+\varepsilon}$ 时,在区间 $(x, x+h]$ 中存在 Goldbach 数,从而改进了 Harman 在 1983年证明的 $h\geqslant x^{(1/10)+\varepsilon}$。

陆鸣皋还研究了完整三角和的估计。他证明了完整三角和

$$S(q, f(x))=\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i f(x)/q}$$

的上界可以估计为

$$|S(q, f(x))|\leqslant e^{Ck}q^{1-1/k}。\tag{2}$$

这里 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$,$a_0, a_1, \cdots, a_k, q$ 是整数且 $(a_1, \cdots, a_k, q)=1$;$C=2.33$。陆鸣皋、丁平证明 $C=2$ 时(2)式成立。单墫给出素变数三角和的一个估计式。他证明当 a, q 是正整数,$(a, q)=1$,α 是实数,$k>1$,ε 是任意实数,而且,$|\alpha-q^a|-<q^{-2}$ 时成立

$$\sum_{n<k} e(\alpha p^k)\ll N^{1+\varepsilon}(q^{-1}+N^{-1/2}+N^{-k}q)2^{1/2k-2}。$$

谢盛刚研究了 k 生素数问题。他证明了对于任意给定的正整数 $k, a_1, \cdots, a_k$ 和整数 $b_1, \cdots, b_k$,使 $f(n)=\prod_{i=1}^{k}(a_in+b_i)$ 没有固定素因子,则存在无穷多个整数 n 使 $\prod_{i=1}^{k}(a_in+b_i)$ 有至多 r_k 个素因子。当 $k\geqslant17$ 时 $r_k\geqslant k\log\nu_k+k+\frac{0.0139}{k}$,其中 ν_k 是只与 k 有关的常数,并有 $\nu_k/k\sim2.44\cdots$。他还给出 $k\leqslant16$ 时 γ_k 的数值。当 $k\geqslant4$ 时,改进了 Halberstam 和 Richert 的结果。关于推广的孪生素数问题,谢盛刚将 Halberstam、陈景润和潘承洞的方法结合起来证明了若 a_1、a_2 是给定的正整数,b_1、b_2 是给定整数,而且 $(a_1n+b_1)(a_2n+b_2)$ 没有固定素因子,则存在无穷多个正整数 n 使 $(a_1n+b_1)(a_2n+b_2)$ 有至多 3 个素因子。

陆鸣皋用 Rosser 筛法代替 Brun 筛法得到在广义 Riemann 猜想成立的假设下,模 p 的最小原根 $g(p)=O(m^{4+\delta}\log^2p)$。这里 p 是素数,以 $\nu_1(n)$ 记 n 的不同素因子的个数,$m=$

$\nu_1(p-1)$。陆鸣皋还研究了 s 阶两两正交拉丁方的最大数目 $N(s)$。他得到：存在常数 s_0，当 $s>s_0$ 时有 $N(s)\geqslant s^{10/143}-2$。这改进了 1974 年 Wilson 得到的 $N(s)\geqslant s^{1/17}-2$。

杨照华用 Rosser 筛法代替 Brun 筛法讨论了 n 维格 Λ 中任意 $n-1$ 个向量 $c_1, \cdots, c_{n-1}$，得到：对任意实数 N ($\geqslant 2$)必存在 Λ 中的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得 $|\alpha_i-Nc_i|=O(\log^{2+\varepsilon}N)$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$。这改进了 1975 年王元得到的结果 $|\alpha_i-Nc_i|=O(\log^3N)$。姚琦应用 Iwaniec 关于 Rosser 筛法余项的改进证明了 $|\alpha_i-Nc_i|=O(\log^2N\log\log^2N)$。

在区间 $[n^2, (n+1)^2]$ 中是否存在素数的问题是数论中的著名猜想。1979 年 Heath-Brown 和 Iwaniec 将两个相继素数之差 $d_n=p_n-p_{n-1}$ 的上界估计为 $d_n\leqslant p^{11/20+\varepsilon}$。楼世拓、姚琦改进了他们的方法，从而证明了 $d_n\leqslant p^{35/64}$。应用这种方法在一些其他数论问题上也可以得到改进。

1974 年 Montgomery 与 Vaughan 在研究大筛法时讨论了一般形式的 Hilbert 不等式，单墫改进了他们的结果，简化了他们的证明。

裴定一研究权为整数的 Eisenstein 空间。设 f 是 Γ 上权为 k 的模形式且满足 $f(r(z))=\omega(d_r)j(r, z)^kf(z)$，这里 ω 是模 N 的特征，$\omega(-1)=(-1)^k$，d_r 表示 r 的右下角元素，$j(r, z)=cz+d$。这样的模形式 f 构成的线性空间 $M_k(N, \omega)$ 及其中歧点型模形式子空间 $S_k(N, \omega)$，在 Petersson 内积意义下 $S_k(N, \omega)$ 在 $M_k(N, \omega)$ 中正交补子空间记作 $\varepsilon_k(N,\omega)$。他给出 $\varepsilon_k(N, \varepsilon)$ 的一组基，该基内每个模形式的 Fourier 展开式都是明显地给出的，而且它们的系数都是代数数。

此外，还有许多数学工作者研究了数论的一些问题。例如张益唐、王炜讨论了 Riemann-ζ 函数的零点密度，宣体佐、蔡天新还讨论了一些数论函数的和式的估计等。

（楼世拓）

单复变函数论

单叶函数 1984 年国际上在单叶函数方面的最重大成果就是Bieberbach猜想的解决。de Branges 所解决的事实上是 Милин 猜想，从而导致了包括 Bieberbach 猜想在内的七个猜想的解决。de Branges 的这一证明已被 FitzGerald 和 Pommerenke 所简化，他们的简化证明以 The de Branges Theorem on Univalent Functions 为题在国际数学界流传。

我国在单叶函数方面的研究是在陈建功教授的指导和影响下发展起来的，近年来，队伍空前壮大，成果累累，今拟对 1983 年以来的情况作一扼要介绍。

在单叶函数一般性质的研究方面，任福尧[1]在连续函数空间上应用连续线性泛函的表示定理，改进和推广了著名的 FitzGerald 不等式、Bazilevič 不等式以及 Hayman 正则性定理。对于单位圆外亚纯函数的反函数，任福尧[1]建立如下定理：若 $w=F(\zeta)=\zeta+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^{-n}\in\Sigma'$，$G(w)=F^{-1}(w)=w+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_nw^{-n}$，$\log\dfrac{G(w)-G(w')}{w-w'}=\sum\limits_{p,q=1}^{\infty}\lambda_{pq}w^{-p}w'^{-q}$，则 $\left|\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\lambda_{mn}x_mx_n\right|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left|x_n+\sum\limits_{m=n+2}^{\infty}B_n^{(-n)}x_m\right|^2$，其中 $B_n^{(-K)}$ 由 $[G(w)]^{-K}=w^{-K}+\sum\limits_{n=K+2}^{\infty}B_n^{(-K)}w^{-n}$ 确定。

在系数估计方面，胡克[2]对族 $S(\alpha)$ 内的函数证明了：若 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S(\alpha)$，

则 $|a_n|<\sqrt[n]{(P+\sqrt{(1+P)\sqrt{A}-P)}/(1+P)}$，其中 $P=\alpha^2/(1-\alpha^2)$，$A=\max\left\{209/140,\right.$
$C^7-P\left(\sqrt{\frac{209}{140}}-\frac{7}{6}\right)^2$，$\left.\left[C^{16}-P\left(C^7-\frac{209}{140}\right)^2\right]^{1/2}-P\left(\sqrt{\frac{209}{140}}-\frac{7}{6}\right)^2\right\}$，$C\doteq 1.0657$。对于系数限制下的 Bieberbach 猜想，胡克、邓声南、叶中秋[3,4]得到：当 $|a_2|<1.68$ 或 $|a_3|<2.4$ 时，均有 $|a_n|<n$ $(n=7,8,\cdots)$；当 $|a_2|<1.7$ 且 $n>15$ 时，有 $|a_n|<n$。

在对称单叶函数的研究方面，马万仓得到：对单叶奇函数第四项系数，有 $|a_7^{(2)}|<1.053$。蒋南宁证明：对实系数 p 次对称单叶函数第四项系数，有 $|a_{3p+1}^{(p)}|\leqslant\frac{2}{2p}+\frac{8(p+1)^6}{2p^3(3p^2+3p+1)}$，刘书琴证明：对 p 次对称单叶函数第四项系数，有 $|a_{3p+1}^{(p)}|\leqslant\frac{4(A^2+BC)^{3/2}}{\sqrt[2]{3}\,ACp^3}$，其中 $A=3p+2$，$B=p^2+2p+2$，$C=3p^2+2p+1$。

在某些特殊单叶函数族的研究方面，吴卓人[5]对 ρ 级星象函数族 S_ρ^* 进行了研究，他得到：若 $\alpha>0$，$r\geqslant0$，$0\leqslant\rho<1$，$g_p(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_{pn+1}^{(p)}z^{pn+1}\in S_\rho^*$，$f_p(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{pn+1}^{(p)}z^{pn+1}$ 在 $|z|<1$ 内解析，且满足 $(\alpha+\gamma)f(z)^\alpha=z^{1-\gamma}[z^\gamma g(z)^\alpha]$，则 $f_p(z)$ 必在圆盘 $|z|^p<R=R_p(\alpha,\gamma,\rho)$ 内属于 S_ρ^*，其中 R 满足 $(\alpha(1-2\rho)-\gamma)R^3-2(p+\alpha(1-\rho))R+\alpha+\gamma=0$。他对 Bazilevič函数族证明了类似的定理。刘礼泉[6]提出了 β 级的 α-凸函数族 $J(\alpha,\beta)$ 的概念，证明了 $J(\alpha,\beta)$ 中如下的从属原理：$[f(z)/z]^{1-\alpha/2}f'(z)^{\alpha/2}\prec 1/(1-z)^{1-\beta}$，得到了函数模和 $\alpha\geqslant1$ 时导函数模的精确界限。此外，他还得到了 $J(\alpha,\beta)$ 中系数泛函 $|a_3-\mu a_2^2|$ $(-\infty<\mu<+\infty)$ 的精确最大值。马万仓则建立了 $J(\alpha,\beta)$ 中如下的从属原理：$zf'(z)/f(z)\prec zK_\beta'(\alpha,z)/K_\beta(\alpha,z)$，得到了关于 $J(\alpha,\beta)$ 的精确的偏差性质和星形级，从而证明了 Miller 猜想。他还指出：这些偏差性质等结论都可推广到相应的对称单叶函数族中。对于 β 型的 α 级星象函数族 $\varphi^*(\alpha,\beta)$，马万仓建立了几种从属关系。利用这些从属关系，他彻底解决了 $\varphi^*(\alpha,\beta)$ 的函数模、导函数模等一系列偏差性质和某些限制下的旋转定理，以及覆盖定理和系数泛函 $|a_3-\mu a_2^2|$ 的最大值等问题。对于函数族 $\mathscr{F}^{(+)}$，李继闵[7]得到了函数属于它的充要条件，建立了它的偏差定理、掩盖定理、旋转定理、凸形界限等一系列映照性质。

在系数模之差的估计方面，胡克[8]给出了 Hayman 定理的一个简化证明。他还证明了以下的结果：若 $f(z)\in S$，p 是实数，设 $\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^p=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(p)z^n$，则当 $1/4<p<1$ 时有 $||D_n(P)|-|D_{n+1}(p)||\leqslant An^{1/2T(p)-1)}\log^{3/2}n$ $(n=2,3,\cdots)$，和 $\sum_{k=1}^{n}||D_k(P)|-|D_{k+1}(p)||k^{1-p}\leqslant An$ $(n=2,3,\cdots)$，其中 A 是绝对常数，$T(p)=(4p-1)t(p)/(2p+t(p))$，$t(p)=(\sqrt{2}P-1)^2$。若 $f(z)\in S(\alpha)$，则有 $\left|\left|D_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|-\left|D_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right|\leqslant An^{-1/2-1/300+\varepsilon}$，其中 ε 是任意小的正数，A 是仅依赖于 ε 的常数；当 $1/2<p\leqslant1$ 时，则有 $\sum_{k=1}^{n}||D_k(p)|-|D_{k+1}(p)||k^{2(1-p)}\leqslant An$ $(n=2,3,\cdots)$。

在亚纯单叶函数的研究方面，马万仓建立了 $S(q)$ 族（在 $z=q$ 处有一极点的单叶函数所组成的族）函数与 S 族函数的关系，他利用 S 族函数变分函数的构造给出了一种构造 $S(q)$ 族函数变分函数的方法，使变分法这一强有力的方法可用于亚纯单叶函数族 $S(q)$ 的研究。由此，他建立了 $S(q)$ 族中极值问题的极值函数所满足的 Schiffer 微分方程。

在单叶函数的开始多项式研究方面，命 $\sigma_n^{(p)}(z)=z+\sum_{\nu=1}^{n}a_{p\nu+1}^{(p)}z^{p\nu+1}$ 是 p 次对称单叶

函数的开始多项式，胡克、潘一飞[9]和叶树森证明了一切$\sigma_n^{(p)}(z)$在圆盘$|z|<\sqrt[p]{\frac{p}{2(p+1)}}$ ($p=1, 2, \cdots, 5$)内是星形的。叶树森[10]还证明了当$f_p(z)\in S_p^*$时，它的开始多项式在圆盘$|z|<\sqrt[p]{\frac{p}{2(p+1)}}$是星形的。 （刘书琴）

[1] Ren Fu-yao, *Chth. Ann. Math.*, **4B**, 4(1983) 425

[2] Hu Ke, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87** (1983) 487

[3] 胡克等，《科学通报》，**28**，3(1983)189

[4] 胡克等，《江西师范学院学报》，1(1983) 1

[5] 吴卓人，《数学学报》，**27**，3(1984)394

[6] 刘礼泉，《数学学报》，**26**，2(1983)179

[7] 李继闵，《纯粹数学与应用数学》，**1**，1(1984)

[8] 胡克，《科学通报》，**29**，14(1984)894

[9] 胡克，潘一飞，《数学研究与评论》，4 (1984)41

[10] 叶树森，《江西师范大学学报》，1 (1984)

值分布论　在亏量的研究方面，D. Drasin 证明了在 1929 年由 F. Nevanlinna 提出的如下猜想：设$f(z)$是级λ有穷的亚纯函数，若$\sum\limits_a\delta(a, f)=2$，则 1) λ是$1/2$的整数倍；2) 亏值个数$\nu(f)\leqslant 2\lambda$；3) 亏量$\delta(a, f)$是$1/\lambda$的整数倍；4) 亏值是渐近值。

F. Osgood 证明了：若$f(z)$是超越亚纯函数，$a(z)$是满足$T(r, a(z))=o\{T(r, f)\}$的亚纯函数，则$\sum\limits_{a(z)}\delta(a(z), f)\leqslant 2$。

张广厚[1]得到：设$w=f(z)$是下级为μ的亚纯函数，$z=g(w)$是$f(z)$的反函数。记$g(w)$的判别直接超越奇点个数为l，$f(z)$的亏值个数为p，其中l'个亏值同时是$g(w)$的直接超越奇点。若$\sum\limits_a\delta(a, f)=2$，则$p-l'+l\leqslant 2\mu$。

杨乐[2]得到：设$f(z)$为有穷级亚纯函数，则对任意δ ($0<\delta<1$)，使$\Delta_{1)}(a, f)>\delta$的复数a仍构成有穷μ测度集，从而$f(z)$的 Valiron 拟亏值为 Hausdorff 零测度集。

在奇异方向的研究方面，张庆德、杨乐[3]得到：设$f(z)$为有穷正级λ的亚纯函数，则至少存在一条方向H：$\arg z=\theta_0$，对任何$\varepsilon>0$，任意复数a、$b(\neq 0)$及任意正整数k，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\{n(r, \theta_0, \varepsilon, f=a)+n(r, \theta_0, \varepsilon, f^{(k)}=b)\}}{\log r}=\lambda。$$

张广厚[4]得到：设$f(z)$是下级为μ的整函数，q是$f(z)$的 Julia 方向个数，l为判别的有穷渐近值个数，p为有穷亏值个数，其中l'个亏值同时又是渐近值，若$q<+\infty$，则有$p-l'-l\leqslant 2\mu$。

吕以辇、张广厚[5]得到：设$f(z)$是亚纯函数，若满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r)}{(\log r)^2}=+\infty,\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r)}{\log r}=\mu<+\infty,$$

则$f(z)$至少存在一条 Nevanlinna 方向。

张庆德得到：有穷正级亚纯函数的每一条 Borel 方向都是 Nevanlinna 方向，而无穷级亚纯函数至少存在一条 Nevanlinna 方向。

林群得到：设$f(z)$是亚纯函数，若在角域$\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$内满足$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{T(r,\Omega(\varphi_1,\varphi_2))}{(\log r)^2}=\infty$，则或者$\arg z=\varphi_1$，$\arg z=\varphi_2$中至少有一条是 Julia 方向；或者$\Omega(\varphi_1, \varphi_2)$内至少存在一条 Nevanlinna 方向。若满足$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{T(r)}{(\log r)^2}=\infty$，则$f(z)$至少存在一条 Nevanlinna 方向。

金路得到：设$f(z)$为λ级 ($0<\lambda<\infty$)整函数，$a_j(z)$为ρ_j级整函数($j=0, 1, 2, \cdots,$

$k-1$)，方程 $R(w)=w^{(k)}(z)+\sum_{j=0}^{k-1}a_j(z)w^{(j)}(z)=0$ 的任一个基本解组 $h_l(z)(l=1, 2, \cdots, k)$ 分别为 ρ_l^* 级整函数。若 $\max(\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}; \rho_1^*, \rho_2^*, \cdots, \rho_k^*)<\lambda$，则至少存在一个方向 H: $\arg z=\theta_0$，对任意 $\varepsilon>0$，及任意复数 α, β $(\alpha a_0(z)\not\equiv\beta)$，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\{n(r, \theta_0, \varepsilon, f=\alpha)+n(r, \theta_0, \varepsilon, R(f)=\beta)\}}{\log r}=\lambda。$$

庞学诚得到：设 $f(z)$ 为 $\rho(0<\rho<\infty)$ 级亚纯函数，$\rho(r)$ 为它的精确级，$U(r)=r^{\rho(r)}$，又设 $S\{\rho(r)\}=\{\varphi(z), \varphi(z)$ 是满足 $T(r, \varphi)=o\{T(r, f)\}$ 的亚纯函数$\}\cup\{\infty\}$，则 $f(z)$ 至少存在一条关于 $S\{\rho(r\}$ 的 Borel 方向，并举例说明了 Borel 方向不一定是关于 $S\{\rho(r)\}$ 的 Borel 方向。

在正规族的研究方面，杨乐[6]得到：设 n, k 为两正整数，且 $n\geqslant k+4$，a 为一有穷复数，又设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数，$\alpha_j(z)(j=1, 2, \cdots, k-1)$ 在 D 内正则。若对于任意 $f(z)\in\mathscr{F}$，$f^{(k)}_{(z)}+\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j(z)f^{(j)}_{(z)}-af^n_{(z)}$ 在 D 内不取一有穷值(或有一重级 $\geqslant\left[\dfrac{n}{n-(k+3)}\right]$ $+1$ 的重值)，$f(z)$ 有一有穷非零的 $k+1$ 级重值，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规。

李松鹰[7]得到：设 $\mathscr{F}$ 为在区域 D 内亚纯的函数族，p 为 $\geqslant5$ 的整数，a、b 为两有穷复数，$a\neq0$。若对 $\mathscr{F}$ 中每一个 $f(z)$ 满足 $f'(z)-a\{f(z)]^p\neq b$，则 $\mathscr{F}$ 为正规族。

在代数体函数的研究方面，何育赞、肖修治[8]研究了高阶代数微分方程 $\sum_{(i)}a_{(i)}(z)u^{i0}\cdots(u^{(n)})^{i_n}=\sum_{i=1}^{k}a_i(z)u^i/\sum_{j=0}^{l}b_j(z)u^j$ 在复域中大范围单值亚纯解和有限多分支解的存在性定理，其中 $\{a_{(i)}(z)\}$，$\{a_i(z)\}$ 和 $\{b_i(z)\}$ 为亚纯函数。他们获得了精确形式的 Malmquist 型定理，并得到一类代数微分方程代数体函数解的增长性估计。

吕以辇、顾永兴[9]得到：设 $f(z)$ 是有穷正级 λ 的 ν 值亚纯代数体函数，则必存在一方向 B: $\arg z=\theta_0$，使对任意给定的 ε，$0<\varepsilon<\pi/2$，及任意复数 a，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r_1, \theta_0, \varepsilon, f=a)}{\log r}=\lambda,$$

至多除去 2ν 个例外值 a。

吕以辇[10]得到：设 $f(z)$ 为 ν 值亚纯代数体函数。若 $f(z)$ 满足 $\overline{\lim}\dfrac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$，则至少存在一条方向 J: $\arg z=\theta_0$，使得对任意给定的 ε，$0<\varepsilon<\pi/2$，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r, \theta_0, \varepsilon, f=a)}{\log r}=\infty。$$

至多除去 2ν 个例外值 a。若 $f(z)$ 是亚纯函数，则至多除去 2 个例外值 a。

在亏函数的研究方面，李庆忠、叶亚盛得到：设 $f(z)$ 为下级 μ 有穷的整函数，$a(z)$ 为满足 $T(r, a(z))=o\{T(r, f)\}$ 的亚纯函数。若 $\sum_{a\neq\infty}\delta(a(z), f)=1$，则 $f(z)$ 的级与下级 μ 相等，且为正整数。

金路、戴崇基得到：设 $f(z)$，$a(z)$ 同上，若 $\sum_{a\neq\infty}\delta(a(z), f)=1$，则 i) $f(z)$ 的亏函数个数 $\nu(f)\leqslant\mu$; ii) 亏函数的亏量 $\delta(a(z), f)$ 是 $1/\mu$ 的正整数倍。

林群得到：设 $f(z)$，$a(z)$ 同上，则 $\sum\delta^{1/3}(a(z), f)<+\infty$。

张庆德、庞学诚得到：设 $f(z)$ 为 λ 级 $(0<\lambda<\infty)$ 亚纯函数，记 p 为 $f(z)$ 的精确亏函数个

数，q_k 为 $f_{(z)}^{(k)}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$的 Borel 方向个数，$f_{(z)}^{(0)}=f(z)$，则 $p\leqslant\min\{q_0, q_1, q_2, \cdots\}$。

庞学诚、汝敏得到：设 $f(z)$ 为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$级整函数，$p$ 是精确亏整函数个数，$q_k(k=0, 1, 2, \cdots)$同上，则 $p\leqslant 1/2\min\{q_0, q_1, q_2, \cdots\}$。

他们还得到：设 $f(z)$ 为 $\lambda(0<\lambda<\infty)$级亚纯函数，若 $\delta^*(\infty, f)=1-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N(r, f)}{U(r)}=1$，则有 $p\leqslant 1/2\, q$。这里 p 为 $f(z)$ 的精确亏函数个数，q 表示 $f(z)$ 与其各级导数的公共 Borel 方向。

林群、戴崇基得到：设 $f(z)$ 为下级有穷的整函数，$a(z)$ 为满足 $T(r, a(z))=0\{T(r,f)\}$ 的整函数，若 $\sum\delta(a(z), f)=1$，则有 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{T(r, f)}{\log M(r, f)}=\dfrac{1}{\pi}$。

在函数分解的研究方面，H. J. Fuchs 和宋国栋首先举例指出 Ozawa 提出的猜想——设 $F(z)$ 为整函数，$P_k(z)$ 是 k 次多项式，$g_k(z)$ 是整函数，若对 $k=q$ 和 $k=n_j$ 有 $F(z)=P_k(g_k(z))$，其中 $(q, n_j)=1$，$n_j|n_{j+1}$，$j=1, 2, \cdots$，则 $F(z)$ 必具形式 $F(z)=ae^{H(z)}+b$ 或 $F(z)=a\cos\sqrt{H(z)}+b$，这里 a、b 为常数，$H(z)$ 为整函数——在一般情况下不正确，然后证明了当 $\{n_j\}$ 增长得不太快时，猜想成立。

宋国栋、杨重骏得到：设 $\mathscr{F}=\{\phi(z), \phi(z)$ 是满足 $w^{(n)}+a_{n-1}(z)w^{(n-1)}+\cdots+a_0(z)w+a(z)=0$ 的超越亚纯函数$\}$，其中 $a_i(z)$ $(i=0, 1, \cdots\cdots n-1)$与 $a(z)$ 是有理函数。若 $\phi_j(z)\in\mathscr{F}$，$P_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$是有理函数，则 $F(z)=\sum\limits_{j=1}^{m}h_j(z)\phi_j(z)$ 和 $F_{(z)}^{(k)}(k=1, 2, \cdots)$ 都是拟素的。

（戴崇基）

[1] 张广厚，《中国科学》A辑，4(1983) 293
[2] 杨乐，《数学学报》，27，2(1984)249
[3] 张庆德，杨乐，《中国科学》A辑，11(1983)982
[4] 张广厚，《中国科学》A辑，9(1983)775
[5] 吕以辇，张广厚，《中国科学》A辑，3(1983)215
[6] 杨乐，《中国科学》A辑，1(1983)21
[7] 李松鹰，《福建师大学报(自然科学版)》，1(1984) 153
[8] 何育赞，肖修治，《中国科学》A辑，6(1983)514
[9] 吕以辇，顾永兴，《科学通报》，28，5(1983)264
[10] 吕以辇，《数学学报》，27，3(1984)367

多复变函数论

自 1981 年以来国内多复变函数论的研究成果主要集中在齐性空间，复几何和有界域的函数论等方面。

齐性空间，特别是齐性有界域的研究是国内多复变函数论学者的传统研究方向，这几年在这方面又有较大的进展。И. И. Пятецкий-Шапиро 在六十年代引进了 Siegel 域的概念并证明任一有界齐性域必解析同构于一齐性 Siegel 域，而齐性 Siegel 域是以仿射齐性锥为底构造出来的。钟家庆和陆启铿[1]则证明了任何仿射齐性锥可实现为正定对称方阵锥的一个子锥，且给出了该子锥的充要条件。许以超[2, 3]对他所引进的 N-Siegel 域作了进一步研究，建立了 N-Siegel 域和描述齐性 Siegel 域的 S-代数之间的关系，计算了 N-Siegel 域全纯截曲率与其上、下界的一个估计。他在对方型锥完全分类的基础上给出了共轭方型锥的完全分类，从而给出了对偶方型锥上第一类齐性 Siegel 域的完全分类[4]。他在另一篇论文[5]中证明了齐性有界域必全纯同构于一个 S. Bergmann 意义下的表示域[6]。陆启铿[7]给出了 S. Bergmann 表示域的精确定义，同时也给出了有界域到表示域的全纯同构的显式表示，

而且证明从有界域到目标域的全纯同构若以这个显式表示式表示，则其目标域必是表示域。

钟家庆和殷慰萍[8]通过构造3类非自对偶但仿射齐性的锥 V_1、V_2 和 V_3 构造了第一类 Siegel 域 S_1、S_2 和 S_3，以及第2类 Siegel 域 W_1、W_2 和 W_3，他们证明 S_i $(i=1, 2, 3)$ 和 $W_i(i=1, 2, 3)$都是齐性的，同时又给出了使$S_i(i=1, 2, 3)$非对称的条件，从而构造了三类非对称齐性 Siegel 域。接着他们[9]对大部分 $S_i(i=1, 2, 3)$和 $W_i(i=1, 2, 3)$构造了它们的扩充空间。殷慰萍[10~12]在这些基础上计算了上述非对称的 $S_i(i=1, 2, 3)$上的 Bergmann 核函数、Bergmann 度量和华(罗庚)度量，同时指出 $S_i(i=1, 2, 3)$的华度量是 $R_{\rm I}$ ($R_{\rm I}$ 是第一类典型域，这里的 $S_i(i=1, 2, 3)$都是 $R_{\rm I}$ 的子流形）的华度量在其上的限制，而对 Bergmann 度量则不然。另外，钟家庆[13]计算了第二类典型域 $R_{\rm II}$ 的扩充空间 $G_{\rm II}(2n, n)$和第三类典型域 $R_{\rm III}$ 的扩充空间 $G_{\rm III}(2n,n)$的上同调群，且给出了这两个紧 Kähler 流形的上同调群的一组基。

近年来多复变函数论的研究中复几何的研究越来越引起大家的注意与重视。1983年在华沙举行的国际数学家大会上，美国哈佛大学的肖荫堂就应邀作了题为"复几何的若干最近进展"的一小时报告。国内在复几何方面的研究也是近几年来新开展起来的，已有一些成果。陆启铿[14]证明了一个具非负(正)截曲率的 Kähler 流形的每点截曲率的最大(小)值必在全纯截曲率上达到。这个结果可以使不少以截曲率为条件的关于具非负(正)截曲率的 Kähler 流形的定理约化为以全纯截曲率为条件的定理。杨洪苍和陈志华[15~17]对非 Kähler 的 Hermite 流形的几何进行了研究，得到若干 Myers 型定理、Liouville 型定理和 Schwarz 引理，对于 Kähler 流形上的 Schwarz 引理，他们证明了若 $f: M\to N$，是从完备 Kähler 流形 M 到 Hermite 流形 N 的全纯映射，且 M 的 Ricci 曲率具有下界 R，N 的全纯截曲率具有负上界 C，同时N的双全纯截曲率非正，则 $f^*dS_N^2\leqslant\dfrac{R}{C}dS_M^2$。这个结果可以视作是 Yau S. T. 的 Schwarz 引理[18]的一个改进。他们[19]还就 Hermite 几何与 Stein 流形之间的关系进行研究，证明了若 M 是一个单连通完备 Hermite 流形，O 是 M 上一个定点，$\rho(z)=\operatorname{dist}(O, Z)$，以 $|T|$ 表示挠率形式的范数，则当 M 的截曲率非正($\leqslant -C^2$)和 $|T|<1/\rho$ ($|T|\leqslant C$)时，M 是一个 Stein 流形。余其煌[20]得到了 Kähler 流形之间的有限全纯映射的 Liouville 型定理。

多复变函数论的早期研究是从复欧氏空间的有界域上的全纯函数开始的，但是在过去相当长的一段时期中，对有界域及有界域上的函数论的研究在国际上较为沉寂。近十年来，随着多复变函数与偏微分方程、调和分析、微分几何等学科的相互影响与渗透，有界域与有界域上函数论的研究又再度引起国际上不少多复变函数论研究者的重视，国内也有越来越多的学者从事有界域与有界域上的函数论的研究。这几年国内在这方面已发表的成果主要是在边值问题与积分表示方面。钟同德[21]证明若 D 是一个有光滑边界的有界域，f是在 D 上全纯 $\bar{D}$ 上连续的函数，g 是在 ∂D 上满足 Lipschitz 条件的函数，$K(z, \zeta)$是 Bochner-Martinelli 核，则 $f_g(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)g(\zeta)K(z, \zeta)ds$ 依然是 D 上全纯 $\bar{D}$ 上连续的函数。他[22]给出了用 Bochner-Martinelli 定义的奇异积分方程可以化为 Frodrom 积分方程的条件。陈叔瑾[23, 24]在他所定义的多面体域上对可微分函数与外微分形式建立了名之为 Leray-Stokes 的积分表示式。他[25, 26]对具有光滑边界 ∂D 的有界域上的一类 Cauchy-Fantappie 积分建立了 Plemlj 公式。上面这些结果中涉及的奇异积分主值都是按通常意义的收敛求得

的，而何文华[27]则讨论超球面上的由Cauchy核定义的奇异积分方程在 L^p 收敛意义下的主值，他借助全连续算子的理论得出该奇异积分方程在 L^p 空间中有解的条件。

多复变函数中求奇异积分主值的最通常的方法是挖去一个以奇点为心的充分小半径的球，然后通过极限来求得，上面引述的涉及奇异积分的主值都是按这个通常的方法进行的。龚昇和史济怀[28]指出由于多复变函数有界域的边界的拓朴结构与几何结构远较单复变函数中的有界域边界复杂，因此对于不同形状的挖去区域，会求得完全不同的积分主值。他们就强拟凸域由Henkin-Ramirez核和Stein-Kerzman核定义的Cauchy积分主值，在"椭球"和"矩形"的挖去区域下，计算出了不同的主值，并且讨论了相应的奇异积分方程。他们[29]进一步对典型域 R_{IV} 和 R_I 的特征流形 L_{IV} 和 L_I 计算了由Henkin-Ramirez核和Stein-Kerzman核定义的Cauchy极分在"椭球"和"矩形"的挖去区域下的主值和相应的Plemelj公式，并且指出对于较好的核，例如对Bochner-Martinelli核所定义的奇异积分来讲，其主值与挖去的区域无关。史济怀和龚昇[30]在 $\mathscr{C}^n$ 的超球面上给出了高阶奇异积分的Hadamard主值的定义，并得到了相应的Plemelj公式，他们[31]又进一步对超球面上用Cauchy积分定义的函数的导数函数的边值问题进行了讨论，借助上述他们所引进的Hadamard主值，得到了相应的Plemelj公式。

自1981年以来，除了上面引述的这些多复变函数研究成果以外，还有一些与多复变函数或是内容上或是方法上有关联，例如钟家庆关于正定Hermite锥上的Siegel-Godement变换的结果，陈广晓和王世坤的旋转群上的调和分析的研究，余其煌，杨洪苍和陈志华关于调和映射的Liouville定理和Schwarz引理的研究。

（陈志华）

[1] 钟家庆，陆启铿，《数学学报》，**24**(1981)116
[2] 许以超，《数学学报》，**24**(1981)99
[3] 许以超，《科学通报》，**28**(1983)592
[4] 许以超，*Scientia Sinica*, **24** (1981) 1
[5] 许以超，*Scientia Sinica*, **A26** (1983) 25
[6] S. Bergmann, *Math. Ann.*, **102** (1926) 430
[7] 陆启铿，*Proceedings of the* 1981 *Hangzhou Conference*, Birkhäser (1984) 199
[8] 钟家庆，殷慰萍，《数学学报》，**24**(1981)587
[9] 钟家庆，殷慰萍，《数学学报》，**24**(1981)614
[10] 殷慰萍，《数学学报》，**24**(1981)753
[11] 殷慰萍，《数学学报》，**24**(1981)765
[12] 殷慰萍，《数学学报》，**24**(1981)879
[13] 钟家庆，《数学学报》，**24**(1981)931
[14] 陆启铿，《中国科学》，**A26**(1983)787
[15] 杨洪苍，陈志华，*Proceedings of the* 1981 *Hangzhou Conference*, Birkhäser (1984) 99
[16] 陈志华，杨洪苍，《数学学报》，**27**(1984)632
[17] 杨洪苍，陈志华，《数学学报》，**24**(1981)945
[18] Yau S. T., *Amer. J. of Math.*, **100** (1978) 197
[19] 陈志华，杨洪苍，《中国科学》，**A26** (1983) 887
[20] 余其煌，*Proceedings of the* 1981 *Hangzhou Conference*, Birkhäser (1984) 117
[21] 钟同德，《厦门大学学报》，**22**(1983)127
[22] 钟同德，《厦门大学学报》，**20**(1981)1
[23] 陈叔瑾，《科学通报》，**21**(1982)1292
[24] 陈叔瑾，《厦门大学学报》，**22**(1983)416
[25] 陈叔瑾，《科学通报》，**19**(1981)1157
[26] 陈叔瑾，《厦门大学学报》**23**(1984)267
[27] 何文华，《数学杂志》，**4**(1984)127
[28] 龚昇，史济怀，《数学年刊》，**3A**(1982) 483
[29] 龚昇，史济怀，*Chin. Ann of Math.*, **4B** (1983) 467
[30] 史济怀，龚昇，*Chin. Ann of Math.*, **4B**(1983) 307
[31] 史济怀，龚昇，*Chin. Ann of Math.*, 5B (1984) 21

拓 扑 学

点集拓扑学 度量化问题是点集拓扑学的中心课题之一，然而一个拓扑空间是否可度量化往往要借助于某些集论假设才能搞清楚。不久以前，G. Kozlowski等在CH之下证明了存在不可度量化的全正规流形，同时M. E. Rudin又在MA＋¬CH之下证明了每个全

正规流形都是可度量化的。由于CH与 MA+$\neg$CH都独立于ZFC,所以全正规流形是否可度量化在 ZFC 中是不可判定的。Moore 空间的度量化问题也是引人注目的。最近戴牧民在 $2^{\omega}<2^{\omega_1}$ 之下证明了某种正规 Moore 空间(满足所谓 Dccc 条件)是可度量化的。对于各种紧性、局部紧性、仿紧性、可分性以及 Lindelöf 等性质的讨论也经常是在利用集论假设的情况下得到更好的结果。P. Simon 构造出了一个紧 Fréchet 空间的例子，它的平方不是 Fréchet 空间,这是绝对性结果；如果利用MA,则可得出更强的结果：B. Šapirovski 等造出了 ω 的两个紧化，它们都是 Fréchet 空间，但它们的乘积不是 Fréchet空间。王国俊证明了每个势小于 2^{ω} 的可数紧 Urysohn 空间是列紧的，周浩旋则利用 MA 把 Urysohn 分离性减弱为T_2。特别是关于 $\beta\omega$ 的性态,在 ZFC 中知之甚少,但在 CH 之下却得出了丰硕的成果。其中在关于P点的研究方面，杨守廉于最近证明了在CH之下存在不以 P 点为下界的非P点。值得注意的是，点集拓扑学的理论也丰富了公理化集论的内容。1981年，S. Broverman等证明了“ω^*与ω_2^*非共绝对”与CH等价。最近戴牧民证明了“每个势小于或等于 2^{ω}的有 Calibre ω_1 的T_2 空间可分”也与 CH等价。1982年。F. D. Tall 证明了“每个全正规局部紧空间是集体正规的”与 ZFC相容。这些都表现了点集拓扑学对集论的反作用。

点集拓扑学中更多的课题是不涉及集论假设的。在有关覆盖性质的探讨方面，吴利生关于等紧性与弱覆盖性质的研究、蒋继光关于仿紧性与可度量性的研究、朱俊关于拟仿紧性的研究、龙冰关于覆盖性与分离性的研究以及钟宁关于 θ 可膨胀性的研究等都是最新的成果。在映射理论方面，最近高国士证明了“若f是正规等紧空间上的闭映射，则f是紧覆盖映射”，这改进了 E. Michael 的结果。在广义度量空间理论方面，师维学基于 M. Itō等人的工作研究了具有 σ几乎局部有限基的拓扑空间。戴锦生与王成堂证明了存在非正规、可弱度量化的拓扑空间。值得提出的是，近年来在拓扑空间理论方面新概念错综复杂、新空间层见叠出，高国士在整理、探索其共同性质的基础上建立了若干一般性定理。基数函数是近年来又一热门课题。刘晓石利用函数 $qL(X)$改进了 Arhangelski 不等式，孙叔豪又进一步加强了这些结果。阮勇斌对于 T_3 空间X在条件“遗传弱 θ-可加细”或“遗传集体正规”的条件下证明了 $O(X)^{\omega}=O(X)$。在近性空间方面,杨占波给出了P-N空间与Proximity空间范畴同构的直接证明。傅沛仁在函数空间引入了 Proximity。李厚源等研究了超空间的乘积与仿紧性。此外，在S-闭空间理论方面，王国俊把 S-闭性与绝对闭性统一了起来。陈必胜引入了仿 S-闭空间理论。蒲义书等引入了强 S-闭空间概念。胡庆平在这方面也得出若干结果。在半拓扑性质的研究中，杨忠强给出了最强拓扑的几个构造式并研究了最弱拓扑的存在性，证明了 T_1^*、几乎正则、$T_{2\frac{1}{2}}$、极不连通性以及 S-闭性等都是半拓扑性质，较大地改进或加强了 S. G. Crossley等人的结果。

还应提到与点集拓扑学紧密相关的别具风格的研究，如刘立榆关于有界轨道理论的研究、周作领关于无周期点的圆周自映射的研究、李邦河与冯汉桥利用非标准方法对紧度的研究、王尚志与李伯渝关于序拓扑的研究、杨安洲与郑崇友对无穷集上拓扑个数的研究以及赵东升与杨忠强关于 Scott 拓扑的研究等。

形论与范畴拓扑近年来得到了充分的发展。关于前者,已有了K. Borsuk 与J. Dydak等人的专著。而 P. T. Johnstone 的 *Topos* 一书则可看作是后者的代表作。

最年轻而充满朝气的分支或许要算 Fuzzy 拓扑学了。继 B. Hutton 与R. Lowen等人关于无点化的著名工作之后，蒲保明与刘应明的文章为有点化研究打开了局面。最近刘应

明在分析了Fuzzy邻属关系的基础上进一步肯定了引入重域概念的合理性。在度量化问题方面，梁基华与刘应明先后改进了B. Hutton与M. A. Erceg等人的理论，使之渐趋成熟。Fuzzy紧性是又一重要的基本理论。由王国俊提出的良紧性理论已取得广泛的承认。刘应明的Stone-Čech紧化、彭育威的Fuzzy函数空间中的紧开拓扑以及金长泽的Fuzzy局部紧性等都是以良紧性为基础展开讨论的。如何把良紧性推广到L-Fuzzy拓扑空间一直是个吸引人的课题，在这方面王国俊与李中夫都做过有趣的工作。如今成功的推广已分别由赵东升与彭育威在研究了Fuzzy格的代数性态之后独立地得到。在Fuzzy仿紧性的研究方面，罗懋康得到了若干深刻的结果。有一类叫作由分明拓扑空间导出的Fuzzy拓扑空间具有许多良好的性质。王戈平等对分明拓扑空间与Fuzzy拓扑空间中诸如闭包算子与内部算子等相应理论之间的关系作了细致的分析。郑崇友、赵东升与王国俊等则分别对所谓O-连通性、O_q-连通性以及r-连通性等进行了研究。

近两年来人们逐渐把力量投入到对L-Fuzzy拓扑空间的研究中，这就首先要求搞清楚Fuzzy格的代数结构。在这方面刘应明关于Fuzzy格上的保并增值自映射的研究不仅对探讨Fuzzy一致结构是必需的，而且有其自身的代数趣味。这对多值逻辑的研究也是有用的。最近王国俊与杨忠强利用所谓极小族与极大族的理论清楚地刻划出了Fuzzy格的构造。考虑到分明集X上的全体L-Fuzzy集按包含顺序构成一个完全分配格，王国俊近年来相继提出了关于“广义拓扑分子格”与“完全分配格上的点式拓扑”的完整理论。在这种非常一般的框架之下，分明拓扑学与L-Fuzzy拓扑学理论都成了它的特例。值得注意的是，与拓扑学中传统的以开的概念为主体的研究相反，这里闭的概念占有主导的地位。同时由于一般不必存在逆序对合对应，重域概念已无法使用，取而代之的是适用范围更广的远域理论。沿此方向何明提出拟网概念以在更广的意义下讨论格上的拓扑问题。刘应明与何明对格之间的映射进行了深入的研究，提出了完全分配格上的诱导映射理论。作为经典映射与Fuzzy映射的合理推广，王国俊提出并系统地研究了序同态理论。另外，赵东升在研究拟一致连续序同态时提出了几个很有用的算子。拓扑分子格的乘积理论是较难入手的研究课题，最近樊太和从范畴角度出发对此进行了深入的探讨。令人兴奋的是，刘晓石与孙国正最近分别展开了对拓扑分子格中基数不等式的研究，得出了许多有趣的结果，几乎所有为集论拓扑工作者所关心的基数不等式都可以在广泛得多的新理论中进行探讨。而且由于富有代数色彩，就使得这方面的工作具有特别诱人的前景。　　　　（**王国俊**）

代数拓扑学　自1978年以来，我国学者在代数拓扑学和微分拓扑学方面发表了不少文章和专著，取得了较好的成绩，这里仅就笔者所知，择要简述如下。

在代数拓扑学方面，吴文俊发表了一系列关于他称之为I^*-度量的文章，发展和改造了Sullivan的极小模理论，揭示了I^*-度量下较常见的代数拓扑函子，如同调函子、同伦函子等的种种优越性。他这些工作的一个特点是特别强调理论的构造性和可计算性。如给出了de Rham定理的一个构造性的证明，证明了I^*-度量对多种几何作法（如纤维方法）的可计算性。他还给出了I^*-度量的公理化处理和具体计算方法。这些工作使得I^*-度量的理论有可能从仅能处理无挠的情形推广至有挠(torsion)的情形。

在不动点类理论方面，我国数学家作出了重要贡献。江泽涵总结了他和姜伯驹、石根华在六十年代的成果，撰写了《不动点类理论》一书(1979年)。姜伯驹建立了尼尔生式的周期点类理论，证明了：对于闭曲面的自同胚，尼尔生数恰是同痕类中的最少不动点数，而

对于负欧拉数的曲面的自映射，尼尔生数一般小于同伦类中的最少不动点数，从而澄清了关于尼尔生数等于最少不动点数的猜测。姜伯驹还在他在美国几所大学讲学的基础上，写出了《尼尔生不动点理论讲义》一书，在美国出版(1983年)。尤承业给出了纤维映射的尼尔生数等于纤维空间与底空间的尼尔生数的乘积的充分必要条件。

周学光研究了广义同调群和它的系数的关系，推广了Hattori-Stong等的结果。

吴振德在一系列文章中研究了实数、复数和四元数的Stiefel流形的KO-群和J-群，以及某些透镜空间和Dold流形的J-群。特别是，对复投影空间 CP^n 的 J-群，当 $5\leqslant n\leqslant 9$ 时，得到了完整的结论。

张素诚在用同调运算改造J. H. C. Whitehead的 A_2^2 上同调环的理论方面取得成功。沈信耀在他先前引入的一序列同伦数值不变量的基础上，发现了它们对表达某些同伦群的母元和阶的应用，并在某些特殊情形下，找到了它们满足的关系。

何伯和研究了从球面到欧氏空间的连续映射，推广了Borsuk-Ulam定理。

虞言林将Ganss-Bonnet公式从可微的情形推进到组合的情形。

(李邦河)

微分拓扑学 周学光研究了几乎闭微分流形的嵌入问题，给出了k-连通几乎闭流形能整齐嵌入某些欧氏空间的一个充分必要条件及其若干具体应用。郭景美在这一方面作了进一步的推进。

李邦河在一系列文章中，对微分流形M到微分流形N的浸入进行了详细的研究。特别是发现了在流形到欧氏空间的浸入中不曾出现过的新现象，第一个给出了并接着又给出了若干个 $\pi_1(N^M, f)$ 作用非平凡的例子，纠正了过去的文献中对这个问题的错误认识。他与美国拓扑学家F. Peterson合作证明了：任意连续映射$f: M^k\to N^{2k-1}$必同伦于浸入。

李邦河还研究了可平行流形的切标架场与球的同伦群中的元素的关系；给出了代数结(algebraic knot)可平行的充分必要条件以及模2 Milnor数的同伦不变性等。

(李邦河)

概 率 论

近几年来，国内在马氏过程、鞅论、点过程、随机分析、极限理论及其他若干方面取得了一些成果。

王梓坤将Dynkin和Vanderbei最近提出的连续强马氏过程随机波的概念扩展到右连续强马氏过程上，并对对称稳定过程和布朗运动求出了随机首波和末波的分布，以及它们到达时差的分布。王还研究了二参数Ornstein-Uhienbeck过程，重点讨论了与单参数情形的区别。吴荣研究了d维布朗运动末遇时的分布，以及它的一种特殊逆转过程的泛函极限与矩等问题，讨论了生灭过程的泛函分布、边界问题以及由边界点所产生的漂移过程的有限维联合分布等问题。周性伟研究了布朗运动在$[0, t)$中状态0的末遇时$\gamma_0(t)$与$[0, \gamma_0(t)]$中的过程极值及达到极值的时间等的联合分布。赵忠信研究了长方体内布朗运动的初出分布与Dirichlet问题。李志阐推广了由Doob提出的随机Dirichlet问题解的唯一性定理，给出了相当一般的条件。葛余博研究了某状态集首达时之前的穿过次数，得出了一类有关的概率公式。

侯振挺、郭青峰从新的角度，进一步研究了齐次可列马氏过程构造论中的定性理论。

对任给的一个Q矩阵，找到了其一切Q过程(或一切非最小Q过程)应归属已知的二十种类型中那一种的判准。杨向群构造了在单流出(单流入)时全部满足向后(向前)方程组的Q过程和在双有限情形时的全部Q过程，并对逼近马氏链进行了研究，构造了逼近最小Q过程以及一类非粘性Q过程的轨道。陈木法、郑小谷将侯振挺关于可列状态空间全稳定Q过程的存在唯一性定理推广到一般的抽象空间。陈木法研究了有限流出Q过程的有势性和可逆性问题，给出了这类Q过程的构造，以及有限流出各有关有势Q过程的存在性准则和唯一性判准。

钱敏平、钱敏系统地研究了离散时间参数马氏链的不可逆性与环流的关系。他们与钱诚讨论了连续时间参数马氏链的不可逆性与环流的关系，用计算行列式方法建立了与化学反应中Hill环流理论的关系。他们还研究了马氏链的流量分布——跳周率及按概率意义的分解。严士健、陈木法将钱敏引进的离散参数马氏链的环流分解推广到连续参数情形，证明了在某些条件下，环流分解是几乎稳定的。郭懋正、吴承训研究了双边生灭过程概率流的环流分解，研究了不断的双边生灭过程的遍历性质，且对一切遍历情形得到了不变测度的表达式。龚光鲁、钱敏平研究了二阶微分算子生成的非最小马氏过程的可逆性，在此基础上，龚又研究了关于不变测度及一维扩散过程的一些问题。

胡迪鹤研究了 Hilbert 空间和一般抽象空间上马氏过程的一般概念和强遍历性。邓永录研究了 Banach 空间上马氏过程的可加泛函以及马氏过程的n可乘泛函伴随转移概率变换。陈木法等研究了所谓的λ_n不变测度。郑小谷将 Feller 边界理论推广到一般抽象空间。林元烈给出了纯跳跃马氏链切截后分布的某些性质。郑学侠讨论了利用有界连通区域上平均算子定义的一类马氏链的极限性质。

严士健、陈木法、丁万鼎应用抽象场论的工具，研究了一类一般的无穷质点马氏过程的有势性同可逆性的关系，得到了较圆满的结果。曾文曲讨论了自旋变相过程和广义排他过程的可逆性。李世取研究了一类混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性。

程乾生、许承德研究了由矩阵测度F形成的$L^2(F)$空间的强结构性质和多维平稳过程的强分解性质。徐业基研究了平稳高斯过程的谱函数估计的渐近性质。

梁之舜研究了 Delphic 半群在随机点过程中的若干应用。他和黄之瑞研究了利用F函数定义的广义更新过程的一些基本性质。

近二十多年来，随着鞅论的深入研究，鞅论逐渐独立于随机过程一般理论的研究，而成为现代概率论中一个重要分支。严加安对指数鞅的一致可积问题作了统一处理，推广和改进了 Novikov、Kazamaki 等人的工作。他给出了开集上局部鞅的合理定义，解决了鞅论中一个较基本的问题。他还给出了关于σ域流$(\mathscr{F}_t)$的所有鞅为连续的充要条件。汪嘉冈讨论了一类指数鞅的一致可积性。严加安、何声武、郑伟安研究了一类取值于R^n的连续半鞅以及取值于一黎曼流形的局部鞅的渐近行为。郑研究了局部鞅的绝对值特征。他与何声武讨论了一类半鞅的局部时特征。胡迪鹤研究了 Banach 代数中的鞅变换。龙瑞麟研究了鞅的两类空间，以及关于鞅的加权Φ不等式。

随机微分方程及其他随机分析的研究，是近几年迅速发展的课题，我国数学工作者也取得了一些结果。胡宣达、俞中明从向量 Ляпунов 函数出发，研究了一般 Itô方程解的样本轨道的条件稳定性和随机有界性，随机 Ляпунов 函数的存在性以及 Itô方程解的指数稳定性，黄志远研究了抽象拓扑可测空间中的随机积分理论以及随机微分方程广义解的比较

定理。马志明对J. Jacod提出的关于随机整值测度的两个猜测给出了否定的回答。聂赞坎统一了严加安及Гальчук等人考虑过的有关半鞅的两种随机微分方程，给出了解存在唯一的充分条件，他还考虑了n维参数强鞅的随机积分。司徒荣等讨论了非凸最优随机控制存在的必要条件、极大值原理以及具有随机漂移脉冲信号的功率谱的计算。

极限理论的研究源远流长，在本世纪三四十年代，曾经是概率论研究的中心问题之一，取得了一系列重大的研究成果，使之成为概率论中较成熟的一个分支。近几年来国内的研究方向主要包括弱相依序列或随机场的极限理论、强弱不变原理以及独立和等方面。

殷涌泉得出了强平稳过程大数法则的指数收敛速度。苏明理得到了高斯过程最大值的重对数律。程士宏研究了平稳序列次序统计量中项的极限分布，并把它推广到连续参数的情形，研究了平稳过程在高水平上度过的时间。他还研究了多维次序统计量边秩和中间秩的极限定理。苏淳研究了m相依随机场的Berry-Esseen界限。林正炎研究了平稳m相依序列、平稳强混合序列(包括方差无界情形)的中心极限定理和弱不变原理。陆传荣、林正炎研究了泛函型强不变原理，给出了处理某些类型统计量问题的两种方法。孙志刚研究了Gauss序列部分和及缺项三角级数的布朗运动逼近，后者改进了Philipp和Stout在这方面的工作，达到了他们猜测的阶。陆传赉、陆传荣研究了极限定理的随机转移。林正炎、陆传荣、陆传赉还研究了二元函数加权和、函数空间中功率和以及误差方差估计的不变原理。许重光改进了鞅不变原理成立的充分条件，得出了一些新的必要条件。他还讨论了一类平稳序列谱函数估计的不变原理。

白志东、苏淳研究了多维无穷可分分布的勒贝格分解及其谱测度之间的关系。他们解决了关于多维分布不可分问题的一个Linnik问题，白独立解决了另一个Linnik问题。苏、白给出了无穷可分分布成为绝对连续的一个充分条件，举例推翻了1942年Hartman-Wintner的一个定理。白系统地研究了L_α族分布问题。他还给出了满足Lip-ψ的用特征函数表示的充要条件。缪柏其、白志东研究了多维分布尾性状与其特征函数之间的关系。苏淳证明了给定矩条件下非一致估计的最佳界限。缪柏其、赵林城研究了稳定律的矩。方开泰研究了占有问题及其中心极限定理。谢盛荣研究了iid序列、平稳序列的极限收敛性以及极限分布吸引场等问题。吴智泉、王向忱、杨小云等在抽象空间的极限理论研究方面取得了一些结果。

时间序列是当前很受重视的一个方面。它在概率论、数理统计和运筹学中都有各自不同的研究方向。近年来国内概率统计界也很重视这一领域的研究，取得了不少可喜的成果。王寿仁、安鸿志、汤加豪研究了一个简单平稳双线性过程的分布。安鸿志、陈兆国和Hannan研究了ARMA多维平稳过程协方差函数阵列的性质，线性平稳过程的自回归逼近，周期图的最大值。安、陈研究了方差无穷时自回归参数的最小绝对偏差估计的收敛性。安鸿志研究了预报误差方差估计的渐近性质。陈兆国讨论了周期图纵坐标的分布。汪嘉冈研究了时间序列线性模型的估计问题。范金城、吴可法研究了平稳时间序列的最近邻分类准则。

在概率不等式方面，刘坤会解决了Moran猜想。安鸿志、陈兆国解决了Laslett猜想。

在其他方面，沈士镒综合了国际上近年内研究的一系列多网络系统，给出了信源不相关条件下的编码基本定理和具有边信息的信源编码定理，从而对分组卷积码给出了一种可实现的译码方法。沈士镒、戴昌钧、王公恕、张箴、孟庆生等还研究了概率论在通信科学

中的其他应用。孙祖宝等研究了用最大熵谱分析法提取周期信息的问题。董泽清、林元烈研究了平稳无后效流的特性及其在有关排队系统中的应用。张万琪、姜启源、林元烈讨论了考虑保证率约束的马氏决策规划。汪培庄、张文修简化了随机集及其模糊落影分布的定义，研究了有关性质。乐惠玲、张文修研究了 R^n 上随机闭集与随机闭凸集的性质。陶宗英、丁立峰等对公认的量子力学数学基础——冯·诺依曼概率论提出了两点质疑。

此外，在专著出版方面，近年来出版了严加安的《鞅论导引》，胡迪鹤的《分析概率论》和《可数状态的马尔科夫过程论》，安鸿志、陈兆国、杜金观、潘一民的《时间序列的分析与应用》。

(白志东　赵林城)

数理统计学

参数估计　参数估计是数理统计学的一个基础性的分支，近年来国内得到了一些新的结果。

成平研究了多参数同时估计的容许性，得到相当一般的结果，并用以处理包括多个位置参数的 Pitman 估计在内的一些例子。成平、吴启光综合二次损失之下容许估计的已有结果，给出了更一般的充分条件。成平、吴启光、李国英研究了二阶原点矩二次估计的容许性。吴启光研究了一阶和二阶矩同时估计的容许性，在矩阵损失下回归系数线性估计的容许性，一种方式设计的随机效应模型中方差分量以及未知方差情形统计控制问题中的容许估计等问题，得出了一些充要条件和充分条件。王静龙在二次型损失之下，得出了协方差阵最佳仿射同变估计的改进估计。

吴传义、朱力行证明了单参数指数族均值的 UMVUE 的方差或为某一 Bhattacharyya 下界，或为一串 Bhattacharyya 下界的极限。吴对多参数指数族研究了同一问题。陈桂景、陈希孺证明了对某些双边截断型分布族，参数的 UMVUE 不存在。成平研究了一般的位置与刻度参数的 minimax 置信区间，陶波则研究了均匀分布参数的序贯 minimax 估计问题。另外，卢昆亮研究了多元回归系数的估计的 Bahadur 渐近有效性。

统计判决理论　陈桂景、陈希孺在某些一般且自然的条件之下，证明了在同变性限制之下，所有基于充分统计量的判决函数的类仍构成一个本质完全类。陈家鼎在对参数空间、样本空间、行动空间以及损失函数等的相当广泛的条件下，严格处理了 Bayes 判决的存在性问题，其适用范围可拓广到过程统计和某些非参数统计问题。郑忠国对多元正态总体协方差阵已知的情形，在二次损失之下，找到了一类广义先验密度，使其对应的广义 Bayes 估计即为均值的 minimax 估计。他还讨论了这些估计的容许性，以及均值的限制性 Bayes 估计问题。

在经验 Bayes (EB) 估计方面，陈希孺解决了 Singh 1979 年关于一维连续指数族参数 θ 的 EB 估计的收敛速度的一个猜测。这个猜测断言，即使当先验分布族的支撑局限于有界区间内，损失为平方损失时，这一速度也达不到 $O(1/n)$。他还讨论了平方损失下一维离散参数指数族参数的几种 EB 估计的渐近最优 (a. o.) 性。方兆本把这个结果推广到参数的多项式的情形，陶波则进一步推广到参数的连续函数的情形，构造了相应的 a. o. EB 估计。陈希孺还研究了平方损失下二项分布参数 EB 估计这一较为特殊的情形，得出了为使参数 a. o. EB 估计存在，先验分布族必须满足的条件和充分条件。韦来生、方兆本、李