Lie群导引

陈仲沪

高等教育出版社

Lie 群 导 引

陈 仲 沪

高等教育出版社

（京）112号

图书在版编目（CIP）数据

Lie 群导引/陈仲沪编．—北京：高等教育出版社，1997
ISBN 7-04-005931-2

Ⅰ．Lie…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．Lie 群-群论　Ⅳ．0152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第20872号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张10.75　字数270 000
1997年7月第1版　1997年7月第1次印刷
印数0 001－1 382
定价 10.50 元

内 容 提 要

第一和第二章分别介绍了解析流形和拓扑群的基本概念，为第三章引进 Lie 群这一概念作准备. 第四章给出了 Lie 群的 Lie 代数并主要是通过指数映射给出了 Lie 群和 Lie 群的 Lie 代数之间的关系. 第五章利用指数映射给出了 Lie 子群和 Lie 子代数之间的关系. 第六章通过指数映射和伴随表示讨论了 Lie 群的自同构群和 Lie 代数的自同构群. 第七章通过同伦这一拓扑学的方法介绍了单连通覆盖 Lie 群，从而进一步讨论了 Lie 群和 Lie 群的 Lie 代数之间的关系. 第八章介绍了 Lie 群的左不变微分形式，它是 Lie 群的 Lie 代数的对偶，从而可引进 Lie 群的不变积分并初步介绍了幂零、可解和半单 Lie 群和 Lie 代数的一些基本性质. 第九章介绍了紧 Lie 群，它是一类重要的 Lie 群，为进一步更深入讨论 Lie 群和 Lie 群的表示论作准备.

本书可作为理科大学数学、物理和力学等有关专业的本科生和研究生的选修课教材和参考书.

编者的话

本书旨在为数学专业的研究生与高年级本科生提供Lie群的教科书,也可供有关专业的读者阅读.

本书假定读者已经熟悉线性代数并具备点集拓扑、抽象代数以及多元函数的最基本知识.本书每一节都有一些例题并安排了一些习题帮助读者理解其内容.

本书对有限维Lie群、Lie代数的一些重要概念如半单Lie群和半单Lie代数,可解、幂零Lie群和可解、幂零Lie代数,Cartan子代数,根系,Weyl群以及紧Lie群和紧Lie代数都作了介绍和初步讨论,为读者进一步研究上述内容以及相关内容打下基础,同时还提供了有关内容的一些参考书供读者参考.

在编写过程中,本书主要参考了下列著作:C. Chevalley *Theory of Lie groups I* Princeton University press, Princeton, 1946. P. M. Cohn *Lie groups* Cambridge University press. New York. London. 1957. 中译本:胡和生、黄正中译"李群",上海科技出版社,1960. A. S. Sagle R. E. Walde *Introduction to Lie groups and Lie algebras* Academic press. Inc. New York, 1973.

本书在编写过程中,得到了不少学者和专家的关心和支持,有些写法受导师严志达先生的深刻影响,许以超先生对本书的内容提出了许多宝贵的意见,依据这些意见作者对原稿作了相应的修改和补充,作者在此对他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,本书一定存在不少缺点和不足之处,期望得到读者的批评和指正,以便改进.

陈仲沪

1994.5.

目　录

第 一 章

解析流形

§1 解析流形

在这一章中我们介绍解析流形的一些基本知识，有些内容读者可参阅有关微分流形的专门著作.

我们首先回忆一下 m 个变量的解析函数这一概念：对 m 维欧氏空间$\mathbb{R}^m$ 的任一点 x，有坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，设$\mathbb{X}$ 为$\mathbb{R}^m$ 的一个开集，f 为定义在$\mathbb{X}$ 上的复值函数，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbb{X}$，我们说 f 在 a 点是**解析**的，如果有充分小正数 η 使得 $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m\mid |x_i-a_i|<\eta,1\leqslant i\leqslant m\}=U\subset\mathbb{X}$ 且 f 在 U 上能展开为一个绝对一致收敛的(x_i-a_i)，$i=1,2,\cdots,m$ 的幂级数. 如果 f 对于$\mathbb{X}$ 中的任一点 a 都是解析的，则称 f 为$\mathbb{X}$ 上的**解析函数**.

其次我们回忆一下欧氏空间之间的解析映射：设 $\mathbb{R}^m$ 和$\mathbb{R}^n$ 分别为 m 维和 n 维欧氏空间，它们的坐标系分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 设$\mathbb{X}$ 和$\mathbb{X}'$ 分别为$\mathbb{R}^m$ 和$\mathbb{R}^n$ 的开集，f 是$\mathbb{X}$ 到$\mathbb{X}'$ 的映射，对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{X}$，我们有

$$y_j(f(x))=f_j(x)=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_m),j=1,2,\cdots,n,$$

显然 $f_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为定义在$\mathbb{X}$ 上的实值函数. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbb{X}$，我们称 f 在 a 点是**解析**的，如果对所有 $j=1,2,\cdots,n$，f_j 在 a 点是解的. 如果对$\mathbb{X}$ 中每一点 a，f 在 a 点是解析的，则称 f 在$\mathbb{X}$ 上是**解析**的.

设 M 为拓扑空间，U 是 M 的一个开集，σ 是 U 到 n 维欧氏空间

$\mathbb{R}^n$的某一个开集$\mathbb{X}$的同胚映射，则(U,σ)称为M**的局部坐标系**，我们称(U,σ)的**维数为**n.

设$p \in M$，若$p \in U$，则(U,σ)称为p**点的局部坐标系**且$x_i(p) = (\sigma(p))_i, 1 \leqslant i \leqslant n$称为$p$**点的第**$i$**个局部坐标**，$(x_1(p), x_2(p), \cdots, x_n(p))$称为$p$**点的局部坐标**. M的所有局部坐标系构成的集合记为$\widetilde{\mathscr{D}}_M$或$\widetilde{\mathscr{D}}$（当$M$给定时），$\widetilde{\mathscr{D}}_M$的任一子集称为$M$的**局部坐标族**.

设(U,σ)和(V,τ)为拓扑空间M的两个局部坐标系，若$p \in U \cap V$且$\sigma\tau^{-1}$和$\tau\sigma^{-1}$分别在$\tau(p)$和$\sigma(p)$是解析的，则称(U,σ)和(V,τ)在p点是**解析相关**的，记为$(U,\sigma) \overset{A}{\underset{p}{\leftrightarrow}} (V,\tau)$；若$U \cap V = \varnothing$或者$(U,\sigma)$和$(V,\tau)$在$U \cap V (\neq \varnothing)$中每一点都是解析的，则称$(U,\sigma)$和$(V,\tau)$是**解析相关**的，记为$(U,\sigma) \overset{A}{\leftrightarrow} (V,\tau)$，容易证明$\overset{A}{\underset{p}{\leftrightarrow}}$为一等价关系：若$(U,\sigma) \overset{A}{\underset{p}{\leftrightarrow}} (V,\tau)$且$(V,\tau) \overset{A}{\underset{p}{\leftrightarrow}} (W,\gamma)$，则$\sigma\tau^{-1}$和$\gamma\tau^{-1}$在$\tau(p)$是解析的，且$\tau\sigma^{-1}$和$\tau\gamma^{-1}$分别在$\sigma(p)$和$\gamma(p)$是解析的，所以$\sigma\gamma^{-1} = (\sigma\tau^{-1})(\tau\gamma^{-1})$和$\gamma\sigma^{-1} = (\gamma\tau^{-1})(\tau\sigma^{-1})$分别在$\gamma(p)$和$\sigma(p)$是解析的，因此易证$\overset{A}{\underset{p}{\leftrightarrow}}$为等价关系.

(1.1.1)定义 设M为Hausdorff空间，n为非负整数且$\mathscr{C} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha), \alpha \in I\}$为$M$的局部坐标族，如果对任意$\alpha \in I$，$(U_\alpha, \sigma_\alpha)$的维数为$n$且$\mathscr{C}$满足以下条件：

A.1 **覆盖性** $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = M$，

A.2 **相关性** 若$(U,\sigma), (V,\tau) \in \mathscr{C}$，则$(U,\sigma) \overset{A}{\leftrightarrow} (V,\tau)$，

A.3 **极大性** 若$(W,\gamma) \in \widetilde{\mathscr{D}}_M$，$(W,\gamma) \overset{A}{\leftrightarrow} (U_\alpha, \sigma_\alpha)$，对所有$\alpha \in I$，则$(W,\gamma) \in \mathscr{C}$，就称$\mathscr{C}$为$M$**的解析结构**且$(M,\mathscr{C})$称为$n$**维解析流形**，当$\mathscr{C}$给定或自明时，简称$M$为**解析流形**. 若$M$有一满足A.1的局部坐标族，则$(M,\mathscr{C})$称为**流形**. 以下定理对构造解析流形是十分有用的.

(1.1.2)定理 设M为Hausdorff空间，$\mathscr{D} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha), \alpha \in$

$I\}$ 为满足 A.1 和 A.2 的 M 的局部坐标族，则存在唯一的 M 的解析结构 $\mathscr{C}$ 使得 $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$.

证明 令 $\mathscr{C}=\{(V,\tau)\in\widetilde{\mathscr{D}}_M|(V,\tau)\overset{A}{\leftrightarrow}(U_\alpha,\sigma_\alpha)$，对所有 $\alpha\in I\}$. 显然 $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$. 由于 $\mathscr{D}$ 满足 A.1，所以 $\mathscr{C}$ 也满足 A.1.

设 $(U,\sigma),(W,\gamma)\in\mathscr{C}$，若 $U\cap W=\varnothing$，则 $(U,\sigma)\overset{A}{\leftrightarrow}(W,\gamma)$. 若 $U\cap W\neq\varnothing$，设 $p\in U\cap W$，由 $\mathscr{D}$ 满足 A.1 知有 $(V,\tau)\in\mathscr{D}$ 使得 $p\in V$. 显然 $(U,\sigma)\underset{p}{\overset{A}{\leftrightarrow}}(V,\tau)$ 且 $(V,\tau)\underset{p}{\overset{A}{\leftrightarrow}}(W,\gamma)$，由 $\underset{p}{\overset{A}{\leftrightarrow}}$ 为等价关系知 $(U,\sigma)\underset{p}{\overset{A}{\leftrightarrow}}(W,\gamma)$. 这对任意 $p\in U\cap V$ 成立，所以 $(U,\sigma)\overset{A}{\leftrightarrow}(V,\tau)$. 因此 $\mathscr{C}$ 满足 A.2. 若 $(W,\gamma)\in\widetilde{\mathscr{D}}_M$ 且对所有 $(V,\tau)\in\mathscr{C}$，$(W,\gamma)\overset{A}{\leftrightarrow}(V,\tau)$，则 $(W,\gamma)\overset{A}{\leftrightarrow}(U_\alpha,\sigma_\alpha)$，对所有 $\alpha\in I$. 因此 $(W,\gamma)\in\mathscr{C}$，这就证明了 $\mathscr{C}$ 满足 A.3. 唯一性是显然的，定理获证.

由于(1.1.2)，我们可以用 $(M,\mathscr{D})$ 表示 $(M,\mathscr{C})$.

设 $(M,\mathscr{D})$ 为解析流形，$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\sigma_\alpha),\alpha\in I\}$，设 M' 为 M 的开子空间，若 $U_\alpha\cap M'=U'_\alpha\neq\varnothing,\alpha\in I$，则令 σ'_α 为 σ_α 在 U'_α 上的限制，令 $\mathscr{D}'=\{(U'_\alpha,\sigma'_\alpha),\alpha\in I'\}$，其中 $I'=\{\alpha\in I|U'_\alpha\neq\varnothing\}$. 不难证明 M' 为一 Hausdorff 空间且 $\mathscr{D}'$ 为满足 A.1 和 A.2 的 M' 的一个局部坐标族，因此 $(M',\mathscr{D}')$ 为一解析流形，称为 M 的一个**开子流形**，有时 $\mathscr{D}'$ 记为 $\mathscr{D}_{M'}$，开子流形对构造解析流形是有用的.

设 M 为拓扑空间，如果 M 的每一点都有一个紧的邻域，则称 M 为**局部紧空间**；如果 M 的每一点 x 的任意邻域都包含 x 的连通邻域，则 M 称为**局部连通**的.

n 维欧氏空间是局部连通的且是局部紧的. 如果 $\mathbb{X}$ 是 n 维欧氏空间的开集，对于 $\mathbb{X}$ 中任一元素 x 的任一邻域 $U_x,U_x\subset\mathbb{X}$，一定包含 x 的连通邻域 $V_x,V_x\subset U_x$；并且 x 一定有一个紧邻域 $W_x\subset\mathbb{X}$，由于同胚映射保持连通性和紧性，所以我们得到

(1.1.3)命题 设 $(M,\mathscr{D})$ 为解析流形，则 M 是局部连通的并

且也是局部紧的．

显然(1.1.3)中的结论不但对解析流形是对的，而且对流形也是对的，任一解析流形是局部连通的这一性质我们在讨论 Lie 群的单连通覆盖群时将用到，有关讨论可见第七章§3.

如果我们假定解析流形 M 满足第二可数公理，即 M 有可数基，由于 M 是 Hausdorff 空间，而由(1.1.3)可知 M 是局部紧的，那么 M 一定是仿紧的．对于仿紧的解析流形我们可以引进形式积分和测度，有关讨论可见第八章§3.

(1.1.4)例

(1)　n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 为一 Hausdorff 空间．令 $U=\mathbb{R}^n$ 且 I 为 $\mathbb{R}^n$ 的恒同映射，显然 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集且 (U,I) 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个局部坐标系．令 $\mathscr{D}=\{(U,I)\}$. 不难证明 $\mathscr{D}$ 满足 A.1 和 A.2，所以 $\mathscr{D}$ 唯一决定 $\mathbb{R}^n$ 的一个解析结构使得 $\mathbb{R}^n$ 为一解析流形．

(2)　设 n 为一正整数，以 $(a_{ij}), a_{ij}\in\mathbb{R}, i,j=1,2,\cdots,n$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 $n\times n$ 矩阵，令

$$GL(n,\mathbb{R})=\{A=(a_{ij});a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,2,\cdots,n,\det A\neq 0\}.$$

由于所有 $\mathbb{R}$ 上的 $n\times n$ 的矩阵可以看成 n^2 维欧氏空间，则 $GL(n,\mathbb{R})$ 是 n^2 维欧氏空间的开子空间．所以 $GL(n,\mathbb{R})$ 可以定义为 n^2 维欧氏空间的一个开子流形，因此 $GL(n,\mathbb{R})$ 为解析流形．

(3)　设 $M=S^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1^2+x_2^2=1\}=\{e^{i\xi},0\leqslant\xi<2\pi\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

由 $\mathbb{R}^2$ 为 Hausdorff 空间知 S^1 也是一 Hausdorff 空间．令 $U_1=S^1-\{e^{i\cdot 0}\}, U_2=S^1-\{e^{i\cdot\pi}\}$，且令

$$\sigma_1:U_1\to(0,2\pi):e^{i\theta}\to\theta,\sigma_2:U_2\to(\pi,3\pi):e^{i\eta}\to\eta.$$

在 $U_1\cap U_2$ 中，如果 $e^{i\theta}=e^{i\eta}$，则

$$\eta=\theta+2k\pi=\begin{cases}\theta+2\pi, & 0<\theta<\pi,\\ \theta, & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}\tag{1.1.a}$$

显然 η 是 θ 的解析函数，θ 也是 η 的解析函数，因此 (U_1,σ_1) 和 (U_2,σ_2) 解析相关．令 $\mathscr{D}=\{(U_i,\sigma_i),i=1,2\}$. 则 $\mathscr{D}$ 覆盖 S^1 且是解

析相关的 S^1 的局部坐标族，因此 $(S^1,\mathscr{D})$ 为一解析流形(参见图 1.1).

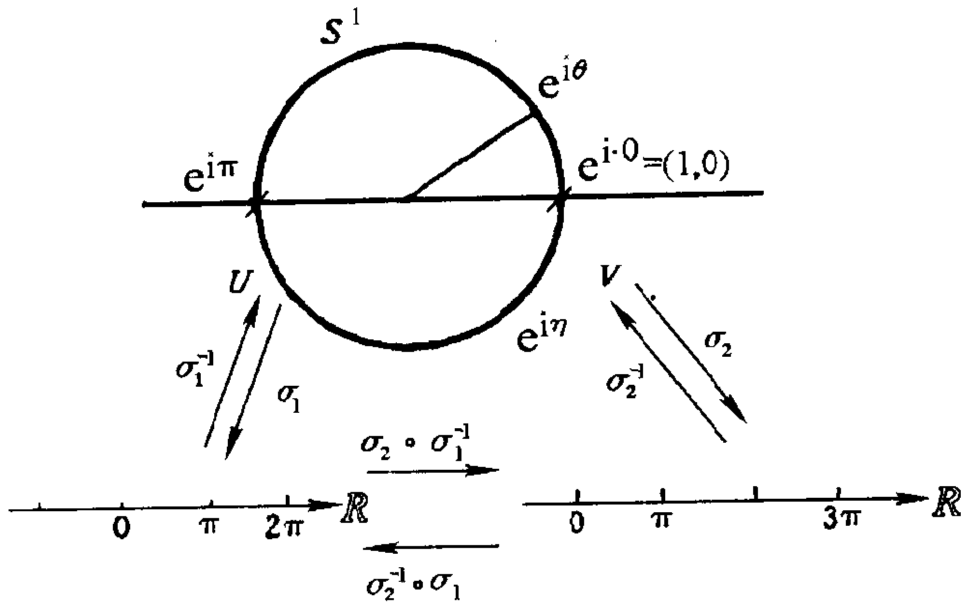

图 1.1

(4)　设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=a^2,a>0\}$. 令 $S_1=\{(x,y,z)\in S^2\mid z>-a\},\sigma_1:S_1\to\mathbb{R}^2:(x,y,z)\to$

$$\left(\frac{ax}{a+z},\frac{ay}{a+z},0\right),$$

$S_2=\{(x,y,z)\in S^2\mid z<a\},\sigma_2:S_2\to\mathbb{R}^2:(x,y,z)\to$

$$\left(\frac{ax}{a-z},\frac{ay}{a-z},0\right).$$

不难证明 (S_1,σ_1) 和 (S_2,σ_2) 为 S^2 的局部坐标系．设

$$u=\frac{ax}{a+z},v=\frac{ay}{a+z},(z>-a);$$

$$\bar{u}=\frac{ax}{a-z},\bar{v}=\frac{ay}{a-z}(z<a).$$

不难验证以下公式

$$\bar{u}=\frac{a^2u}{u^2+v^2},\bar{v}=\frac{a^2v}{u^2+v^2};u=\frac{a\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2},v=\frac{a\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}.$$

由以上公式知 (S_1,σ_1) 和 (S_2,σ_2) 是解析相关的. 显然

$$S^2=S_1\cup S_2.$$

因此 $\mathscr{D}=\{(S_1,\sigma_1),(S_2,\sigma_2)\}$ 覆盖 S^2 且是解析相关的 S^2 的局部坐标族，由(1.1.2)知 $\mathscr{D}$ 决定了 S^2 的一个解析结构．

(5) 令 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to x^3$. 显然，$(\mathbb{R},\sigma)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个局部坐标系，$\mathscr{D}'=\{(\mathbb{R},\sigma)\}$ 覆盖 $\mathbb{R}$ 且是解析相关的 $\mathbb{R}$ 的局部坐标族，由于 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 点不可导，所以 $\mathscr{D}=\{(\mathbb{R},I)\}$ 和 $\mathscr{D}'=\{(\mathbb{R},\sigma)\}$ 确定的 $\mathbb{R}$ 的解析结构不相同．

(6)设 $(M,\mathscr{D}_M)$ 和 $(N,\mathscr{D}_N)$ 为解析流形，考虑集合 $M\times N=\{(x,y)\mid x\in M,y\in N\}$. 设 $\mathscr{T}_M$ 和 $\mathscr{T}_N$ 分别为拓扑空间 M 和 N 的所有开集构成的集合．令 $\mathscr{T}=\{U\times V;U\in\mathscr{T}_M,V\in\mathscr{T}_N\}$. 在 $M\times N$ 中可以引进以 $\mathscr{T}$ 为基的拓扑结构使得 $M\times N$ 为一拓扑空间. 不难证明这时 $M\times N$ 仍为一 Hausdorff 空间．设

$$\mathscr{D}_M=\{(U_\alpha,\sigma_\alpha),\alpha\in I\},\mathscr{D}_N=\{(V_\beta,\tau_\beta),\beta\in J\}.$$

令 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha\times V_\beta,\sigma_\alpha\times\tau_\beta),\alpha\in I,\beta\in J\}$；

$$\sigma_\alpha\times\tau_\beta:U_\alpha\times V_\beta\to\sigma_\alpha(U_\alpha)\times\tau_\beta(V_\beta):(p,q)\to(\sigma_\alpha(p),\tau_\beta(q)).$$

不难证明 $\mathscr{D}$ 覆盖 $M\times N$ 且是解析相关的 $M\times N$ 的局部坐标族，所以 $(M\times N,\mathscr{D})$ 为一解析流形，它称为解析流形 $(M,\mathscr{D}_M)$ 和 $(N,\mathscr{D}_N)$ 的**乘积**，记为 $(M\times N,\mathscr{D}_M\times\mathscr{D}_N)$．

设 $(M_1,\mathscr{D}_1),(M_2,\mathscr{D}_2),\cdots,(M_n,\mathscr{D}_n)$ 为解析流形，类似地可定义 $\mathscr{D}$ 使得 $(M_1\times M_2\times\cdots\times M_n,\mathscr{D})$ 为一解析流形，它称为解析流形 $(M_1,\mathscr{D}_1),(M_2,\mathscr{D}_2),\cdots,(M_n,\mathscr{D}_n)$ 的**乘积**．记为 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_n$（或记为 $(M_1\times M_2\times\cdots\times M_n,\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2\times\cdots\times\mathscr{D}_n)$）．

习　题

1. 证明 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间不是一维流形．

2. 证明例(6)中的 $\mathscr{D}$ 覆盖 $M\times N$ 且是解析相关的 $M\times N$ 的局部坐标族．

3. 设 $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间能定义为一维流形吗？为什么？

4. 证明 $GL(n,\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开集（提示证明 $\mathbb{R}^{n^2}\setminus GL(n,\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的闭

集). 从而 $GL(n,\mathbb{R})$ 为$\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子流形，问解析流形 $GL(n,\mathbb{R})$ 的维数是多少？

5. 设 $S^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$，$n>2$，问 S^n 是 n 维解析流形吗？

§ 2 解析流形上的实函数

设 $(M,\mathscr{D})$ 为解析流形，$T \subset M$. 设 f 为 T 到$\mathbb{R}$ 内的一个映射，则称 f 是定义在 T 上的**实函数**，记 $T = \mathrm{Dom}(f)$. 以 $F(T)$ 表示所有定义在 T 上的实函数所构成的集合.

设 $f \in F(T)$，设 $p \in M$，如果有 p 的开邻域 W 和 $(U,\sigma) \in \mathscr{D}$，$p \in U$ 使得 $W \subset T$ 且 $f \circ \sigma^{*-1}$ 在 $\sigma(p)$ 是解析的，其中 $\sigma^* = \sigma|_{U\cap W}$，则称 f **对于** (U,σ) **在** p **点是解析的**. 如果 f 对于 $\mathscr{D}$ 中某一个 (U,σ) 在 p 点是解析的，则称 f **在** p **点是解析的**. 以下我们要证明上述定义和 (U,σ) 选择无关. 事实上，若 $(V,\tau) \in \mathscr{D}$，$p \in V$，令 σ^* 和 τ^* 分别为 σ 和 τ 在 $U \cap W \cap V \neq \varnothing$ 上的限制，显然 $\sigma^* \tau^{*-1}$ 在 $\tau(p) = \tau^*(p)$ 是解析的. 由 f 对于 (U,σ) 在 p 点是解析的可知 $f \circ \sigma^{*-1}$ 在 $\sigma(p) = \sigma^*(p)$ 点是解析的，因此 $f \circ \tau^{*-1} = f \circ \sigma^{*-1} \circ \sigma^* \circ \tau^{*-1}$ 在 $\tau(p) = \tau^*(p)$ 是解析的. 这就证明了 f 对于 (V,τ) 在 p 点是解析的.

设 U 为 M 的开集，若 $f \in F(U)$ 且在 U 中每一点都是解析的，则称 f 为 M 的解析函数，所有 M 的解析函数构成的集合记为 $A(M)$，当 M 给定或自明时，记 $A(M)$ 为 A.

设 $p \in M$，以 A_p 表示所有在 p 点有定义的 M 的解析函数所构成的集合.

设 $f_i \in F(T_i)$，$T_i \subset M$，$d_i \in \mathbb{R}$，$i = 1,2$. 若 $T = T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$，令

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 : T \to \mathbb{R} : q \to \alpha_1 f_1(q) + \alpha_2 f_2(q),$$

$$f_1 f_2 : T \to \mathbb{R} : q \to f_1(q) f_2(q).$$

特别地,若 $f_1,f_2 \in A_p, p \in M$,则 $p \in T \neq \varnothing$ 且 $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, f_1 f_2 \in A_p$,即

(1.2.1)命题 设 $(M,\mathscr{D})$ 为解析流形且 $p \in M$,在上述运算下,A_p 是$\mathbb{R}$上的**结合代数**.

若 U 为 M 的开集,我们定义 $A(U) = \{f|_U | f \in A(M)\}$. 不难证明 $A(U) \subset A(M)$.

设 $(U,\sigma) \in \mathscr{D}, \sigma(U) = \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$,其中 n 为$(M,\mathscr{D})$的维数. 如果$\mathbb{X}$的坐标系为$(x_1,\cdots,x_n)$,为方便起见,我们记$(U,\sigma) = (U,x_1,\cdots,x_n) = (U,x)$;对 $i = 1,2,\cdots,n$,令

$$x_i: U \to \mathbb{R}: q \to x_i(\sigma(q)) = x_i(q),$$

其中 $x_i(\sigma(q))$ 为 $x = \sigma(q)$ 的第 i 个坐标. 显然 $\mathrm{Dom}(x_i) = U$ 且 $x_i \in A(M), 1 \leqslant i \leqslant n$,称 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 为$(U,\sigma) = (U,x_1,\cdots,x_n) = (U,x)$ 的第 i 个**坐标函数**. $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 也可看为定义在$\mathbb{X}$上的函数

$$x_i: \mathbb{X} \to \mathbb{R}: \sigma(q) = x \to x_i(\sigma(q)).$$

设 $f \in F(T), T \subset M$. 若$(U,\sigma) = (U,x_1,\cdots,x_n) \in \mathscr{D}$ 且 $U \cap T \neq \varnothing$,则对任意 $q \in U \cap T$, $f(q)$ 可表示为 $f(q) = f \circ \sigma^{-1} \circ \sigma(q) = f_\sigma(x_1(q),x_2(q),\cdots,x_n(q)) = f_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)(q)$,其中 $f_\sigma = f \circ \sigma^{-1} \in F(\sigma(U \cap T)), \sigma(U \cap T) \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$且最后一个等式中的 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 是$(U,\sigma) = (U,x)$ 的坐标函数,由上式得到 f 对$(U,\sigma) = (U,x)$ 的**表达式**

$$f = f_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f_\sigma(x). \tag{1.2.a}$$

当 $(U,\sigma) \in \mathscr{D}$ 给定或自明时,记 f_σ 为 f.

设 $(V,\tau) = (V,y_1,\cdots,y_n) = (V,y) \in \mathscr{D}$ 且 $T \cap V \neq \varnothing$, f 对(V,τ) 的 表达式为

$$f = f_\tau(y_1,\cdots,y_n) = f_\tau(y), \qquad (1.2.a)'$$

其中 $f_\tau = f \circ \tau^{-1} \in F(\tau(V \cap T)), \tau(V \cap T) \subset \mathbb{Y} \cap \mathbb{R}^n$,设 $W = U \cap V \neq \varnothing$,由(1.2.a) 和(1.2.a)$'$, 对坐标函数有

$$\begin{cases} x_i = \psi_i(y_1,\cdots,y_n) = \psi_i(y), 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i = \varphi_i(x_1,\cdots,x_n) = \varphi_i(x), 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{1.2.b}$$

其中 $\varphi_i \in A(\sigma(W)), \psi_i \in A(\tau(W)), i = 1,2,\cdots,n$. (1.2.$b$) 称为 $(U,\sigma) = (U,x)$ **和** $(V,\tau) = (V,y)$ **的坐标变换公式**. 若 $T' = T \cap U \cap V \neq \varnothing$, 由 (1.2.$a$), (1.2.$a$)$'$ 和 (1.2.b) 可知在 $\sigma(T')$ 和 $\tau(T')$ 上有

$$\begin{cases} f_\sigma(x) = f_\sigma(\psi_1(y),\cdots,\psi_n(y)) = f_\tau(y), \\ f_\tau(y) = f_\tau(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)) = f_\sigma(x). \end{cases} \tag{1.2.c}$$

(1.2.c) 称为 f **的表达式的坐标变换公式**.

以下命题是容易证明的.

(1.2.2)命题 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维解析流形, $f \in F(T), T \subset M$, 则 $f \in A(M)$ 当且仅当对任意 $(U,\sigma) \in \mathscr{D}, U \cap T \neq \varnothing, f_\sigma \in A(\sigma(U \cap T))$.

(1.2.3)命题 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维解析流形, $f \in F(T), T \subset \mathbb{R}^m$, m 为一正整数且 $p \in M$. 设 $f_i \in F(T_i), p \in T_i \subset M, i = 1, 2,\cdots,m$. $f_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 在 p 点解析且 $f_i(p) = a_i, 1 \leqslant i \leqslant m$. 如果 $f \in A_a, a = (a_1,a_2,\cdots,a_m) \in T \subset \mathbb{R}^m$, 则 $f(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 在 p 点解析, 其中

$$f(f_1,f_2,\cdots,f_m): \bigcap_{i=1}^{n} T_i \to \mathbb{R}: q \to f(f_1(q),f_2(q),\cdots,f_m(q)).$$

特别地, 当 $m = n$, 设 $(U,\sigma) = (U,x) = (U,x_1,\cdots,x_n) \in \mathscr{D}$, $p \in U$ 且 $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ 为 $(U,\sigma) = (U,x) = (U,x_1,\cdots,x_n)$ 的第 i 个坐标函数, 则 $f = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 p 点解析.

习 题

1. 证明命题(1.2.1), (1.2.2)和(1.2.3).
2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ 问 $f \in A(\mathbb{R}^1)$ 吗? 为什么?
3. 设 $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}: t \to t^3$. 问 $f \in A(\mathbb{R}^1)$ 吗? 为什么?

§ 3 切向量和余切向量

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，$v=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i\in\mathbb{R}$，$i=1,\cdots,n$. 在 a 点沿方向 v 的**切向量** L_v 可定义为：

$$L_v=\Sigma_{i=1}^n\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x=a}. \tag{1.3.a}$$

显然对于任意在 a 点可微函数 f,g 和实数 α,β 有 $L_vf\in\mathbb{R}$ 且 L_v 满足以下性质：

(1) $L_v(\alpha f+\beta g)=\alpha L_vf+\beta L_vg$,

(2) $L_v(fg)=L_vf\cdot g(a)+f(a)L_vg$.

我们将上述欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的切向量这一概念推广到解析流形上.

(1.3.1)定义 设 $(M,\mathscr{D})$ 为一解析流形，$p\in M$，设 L 为 A_p 到 $\mathbb{R}$ 的映射，若 L 满足以下条件，则称 L 为 p 点的一个**切向量**：

(L.1) $L(af+bg)=aLf+bLg,f,g\in A_p,a,b\in\mathbb{R}$,

(L.2) $L(fg)=Lf\cdot g(p)+f(p)Lg,f,g\in A_p$.

p 点的所有切向量构成的集合记为 $T(M,p)$. 以下我们在 $T(M,p)$ 中定义加法和数乘.

设 $L,L_1,L_2\in T(M,p),\alpha\in\mathbb{R}$， 令

$$L_1+L_2:A_p\to\mathbb{R}:f\to L_1f+L_2f;\alpha L:A_p\to\mathbb{R}:f\to\alpha(Lf).$$

对任意 $f,g\in A_p$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}(L_1+L_2)(af+bg)&=L_1(af+bg)+L_2(af+bg)\\&=aL_1f+bL_1g+aL_2f+bL_2g\\&=a(L_1+L_2)f+b(L_1+L_2)g\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(L_1+L_2)(fg)&=L_1(fg)+L_2(fg)\\&=L_1f\cdot g(p)+f(p)L_1g+L_2f\cdot g(p)\\&\quad+f(p)L_2g\end{aligned}$$