考研数学题库精编 系列丛书

考研者→ 备战应考的良师益友
大学生→ 训练提高的最佳选择

概率论与数理统计题库精编

齐治平

经济类

讲指要
题型例析
练习题萃
自 检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

概率论与数理统计题库精编

（经　济　类）

齐　治　平

东　北　大　学　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计题库精编．经济类/齐治平．一沈阳：东北大学出版社，2000.3

（考研数学题库精编系列丛书）

ISBN 7-81054-480-2

Ⅰ．概… Ⅱ．齐… Ⅲ．①概率论-研究生-入学考试-解题②数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ．O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02558 号

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）

电话：（024）23890881　　传真：（024）23892538

沈阳市市政二公司印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　　字数：229 千字　　印张：8.875

2000 年 3 月第 1 版　　2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑：张德喜　郭爱民　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定价：13.00 元

前 言

根据国家教育部颁布的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》（经济类）的要求，结合作者多年的教学经验编写了这本书。

本书特点如下：

(1) 对重要概念、定理、公式进行了简明、扼要的精讲、总结、归纳。便于读者反复记忆和加强理解。

(2) 在每一单元里，精选了各种基本例题进行详解，分析解题思路，并归纳出解题方法，便于读者掌握和应用。

(3) 在每个单元之后都配有适当数量的训练题。在训练题的选择上，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有历届全国硕士研究生入学统考试题。读者可以借此进行基本训练，提高解题能力。

(4) 每章之后都配有 A，B 两套测试题。测试题的编排，注意到了难易结合，既有基本题，也有较难的综合题。读者借此可以检验对所学知识掌握的程度。

本书可以作为经济类硕士研究生入学考试的辅导教材，也可以作为财经类高等院校学生的学习参考书，同时也适于自学者阅读。

书中如有不妥之处，恳请读者指正。

编 者

2000 年元月

目　　录

第一章 随机事件和概率

第一单元 随机事件与样本空间

内容精讲指要

一、随机事件

在概率论中，把在相同的条件下可以重复进行，并且每次试验之前不能准确地预知将出现哪一个结果的试验称为随机试验.

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件称作随机事件，简称事件.

随机试验的每一个可能结果，称为样本点，或称为基本事件. 全体样本点的集合称为样本空间，记作 Ω.

随机事件是样本空间的子集，是样本点的某个集合. 在试验中当且仅当事件 A 所包含的某个样本点出现时，事件 A 才发生.

在每次试验中，必定发生的事件称为必然事件，必然事件应包含所有的样本点，因而记作 Ω. 在每次试验中，不可能发生的事件称为不可能事件，它不包含任何样本点，记作 $\varnothing$.

例如，从标号为 1，2，…，6 的六个球中任取一球，观察取出球的标号，这是一个随机试验. 以 ω_i 表示取得标号为 i 的球，则样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，可简记为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$.

再如，抽取一件产品，测试其使用寿命，是一个随机试验，用

ω_t 表示寿命为 t 小时，则样本空间 $\Omega=\{\omega_t | 0\leqslant t<+\infty\}$，或简记为 $\Omega=(0,\ +\infty)$.

二、事件的关系与运算

在一个随机试验中，有很多的随机事件. 为了从简单事件的规律去认识复杂事件的规律，有必要引进事件间的一些关系和有意义的运算，并给出运算定律.

1. 事件的包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $A\subset B$. 显然对任何事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

2. 和事件

"事件 A 和 B 至少有一个发生"，这一事件称为 A 与 B 的和(或并)，记作 $A\cup B$. 换言之，A 与 B 的和表示"或是 A 发生，或是 B 发生"的事件，它由所有"属于 A 或者属于 B"的样本点所构成.

和事件可以推广到 $n(n>2)$ 个事件的情况，n 个事件的和事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，表示"事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生"的事件，简记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 还可以推广到可数无穷多个事件的情况，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"A_1，A_2，…中至少有一个发生".

3. 积事件

"事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$，或简记作 AB. AB 意味着既是 A 发生又是 B 发生，它所包含的样本点是那些既属于 A 也属于 B 的点.

积事件也可以推广到 $n(n>2)$ 个事件的情况. n 个事件的积事件 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示"A_1，A_2，…，A_n 同时发生"的事件，可

记作$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. 还可以推广到可数无穷多个事件的情况，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件A_1，A_2，…同时发生.

4. 差事件

“事件 A 发生且事件B 不发生”，该事件称为 A 与B 的差事件，记作 $A-B$. 它是由那些属于 A 但不属于B 的样本点所构成.

5. 互不相容(互斥)

如果事件 A 与事件B 不能同时发生，则称 A 与B 互不相容，或说互斥. 此时 $AB=\varnothing$，也就是说 A 和B 没有共同的样本点.

6. 对立事件(逆事件)

事件$\Omega-A$ 称为A 的对立事件(逆事件)，记作 $\bar{A}$. 它表示“A 不发生”的事件，$\bar{A}$ 包含Ω中不属于 A 的所有样本点. 在一次试验中，有关系：

$$A\cup\bar{A}=\Omega,\quad A\bar{A}=\varnothing$$

这说明 A 与$\bar{A}$ 不能同时发生，但 A，$\bar{A}$ 必出现其中一件.

事件的关系和运算如图 1-1 所示.

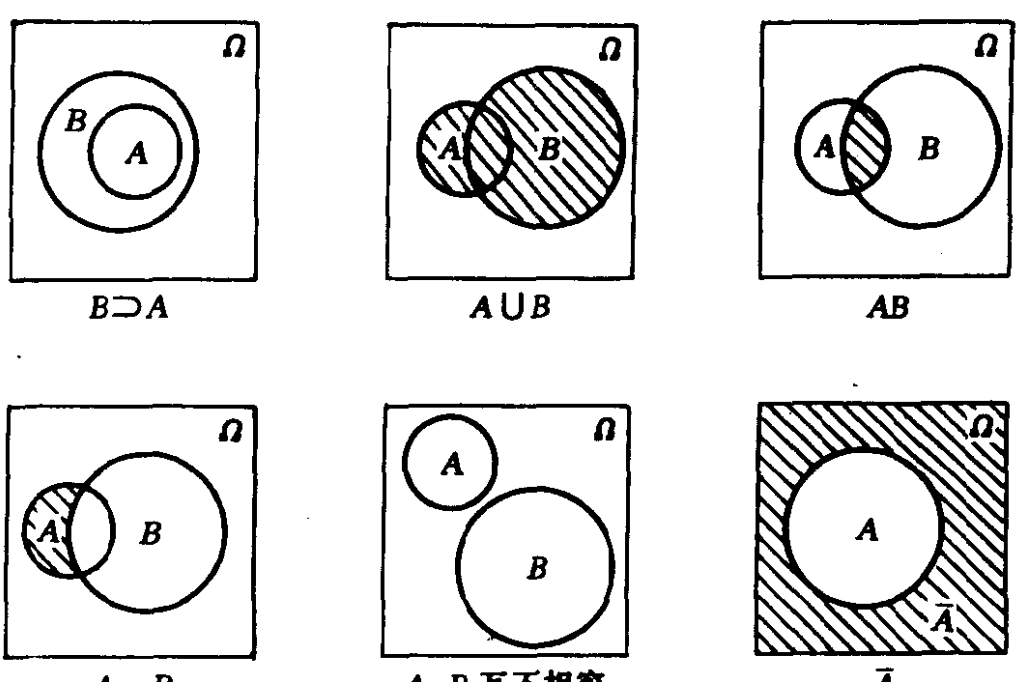

图 1-1

事件的运算满足下列规则：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4)德摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

德摩根律可以推广到任意多个事件的场合.

基本题型例析

【例 1-1】 袋中装有 2 只白球和 1 只黑球，今从袋中依次任意地摸出两球. 设球是编号的，白球编为 1，2 号，黑球编为 3 号. 用一数对(i, j)表示第一次摸得 i 号球，第二次摸得 j 号球. 写出试验的样本空间，并写出下列事件所包含的样本点：A =“第一次摸得黑球”；B =“第一次摸得白球”；C =“两次都摸得白球”；D =“第一次摸得白球，第二次摸得黑球”.

【解】 试验的样本空间为

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$；

$A=\{(3,1),(3,2)\}$；$B=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}$；

$C=\{(1,2),(2,1)\}$；$D=\{(1,3),(2,3)\}$.

【例 1-2】 在 1，2，3，4 四个数中可重复地先后取两个数，写出这个随机试验的样本空间及事件 A =“一个数是另一个数的 2 倍”，B =“两个数组成既约分数”中的样本点.

【解】 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),$
$(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$；

$A=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$；

$B=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),$
$(3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 3)\}.$

【例 1-3】 设 A, B, C 为 3 个事件，则一些事件的表示方法如下.

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：

$$A\bar{B}\bar{C} \text{ 或 } A-B-C \text{ 或 } A-(B\cup C);$$

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生：$AB\bar{C}$ 或 $AB-C$；

(3) 三个事件都发生：ABC；

(4) 三个事件至少有一个发生：$A\cup B\cup C$；

(5) 三个事件发生一个：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(6) 三个事件至少发生二个：$AB\cup AC\cup BC$；

(7) 三个事件发生二个：$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$；

(8) 三个事件不多于二个事件发生：$\overline{ABC}$；

(9) 三个事件不多于一个事件发生：$\overline{AB\cup AC\cup AB}$.

【例 1-4】 掷一粒骰子的试验，观察出现的点数，事件 A 表示"出现偶数点"；B 表示"出现点数小于 4"；C 表示"出现小于 5 的奇数点". 用集合的列举表示法表示下列事件：Ω, A, B, C, $A\cup B$, $A-B$, $B-A$, AB, AC, $\bar{A}\cup B$.

【解】 $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$；　$A=\{2,\ 4,\ 6\}$；

$B=\{1,\ 2,\ 3\}$；　$C=\{1,\ 3\}$；

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$；　$A-B=\{4,\ 6\}$；

$B-A=\{1,\ 3\}$；　$AB=\{2\}$；

$AC=\varnothing$；　$\bar{A}\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$.

【例 1-5】 一个工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($1\leqslant i\leqslant n$). 用 A_i 表示下列事件：

(1) 没有一个零件是次品；

(2) 至少有一个零件是次品；

(3) 仅有一个零件是次品；

(4) 至少有两个零件不是次品.

【解】 (1) $A_1A_2\cdots A_n$;

(2) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$;

(3) $\overline{A}_1A_2\cdots A_n\cup A_1\overline{A}_2\cdots A_n\cup\cdots\cup A_1A_2\cdots\overline{A}_n$;

(4) $A_1A_2\cup A_1A_3\cdots\cup A_{n-1}A_n$.

【例 1-6】 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标($i=1,2,3$). 试用文字叙述下列事件: $A_1\cup A_2$; $\overline{A}_2$; $A_1\cup A_2\cup A_3$; $A_1A_2A_3$; A_3-A_2; $\overline{A_1\cup A_2}$; $\overline{A}_1\overline{A}_2$; $\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; $\overline{A_2A_3}$; $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

【解】 $A_1\cup A_2=$“前两次至少有一次击中目标”;

$\overline{A}_2=$“第二次射击未击中目标”;

$A_1\cup A_2\cup A_3=$“三次射击中至少有一次击中目标”;

$A_1A_2A_3=$“三次射击都击中了目标”;

$A_3-A_2=$“第三次击中但第二次未击中目标”;

$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A}_1\overline{A}_2=$“前两次射击都没有击中目标”;

$\overline{A}_2\cup\overline{A}_3=\overline{A_2A_3}=$“后两次射击至少有一次未击中目标”;

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3=$“三次射击至少有两次击中目标”.

【例 1-7】 在数学系学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

【解】 (1) $AB\overline{C}=$“选出的学生是三年级男生,但不是运动员”.

(2) 在运动员都是三年级男生的条件下，$ABC=C$.

(3) 在运动员全是三年级学生时，$C\subset B$.

(4) 在三年级学生全是女生，而其他年级的学生全是男生时，$\overline{A}=B$.

【例 1-8】 靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 r_1，r_2，$\cdots$，r_{10}，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$. 以事件 A_k 表示命中点在半径为 r_k 的圆内，叙述下列事件的意义：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$； (2) $\bigcap\limits_{k=1}^{8}A_k$； (3) $\bar{A}_1A_2$.

【解】 (1)命中点在半径为 r_6 的圆内；

(2) 命中点在半径为 r_1 的圆内；

(3) 命中点在半径为 r_1 与 r_2 的圆环内.

【例 1-9】 下列各式说明什么包含关系?

(1) $AB=A$, (2) $A\cup B=A$, (3) $A\cup B\cup C=A$.

【解】 (1) $AB=A\Leftrightarrow AB\subset A$ 且 $A\subset AB$.

由 $A\subset AB\Rightarrow A\subset A$ 且 $A\subset B$，于是 $A\subset B$.

(2) $A\cup B=A\Leftrightarrow A\cup B\subset A$ 且 $A\subset A\cup B$.

由 $A\cup B\subset A\Rightarrow B\subset A$.

(3) $A\cup B\cup C=A\Leftrightarrow A\cup B\cup C\subset A$ 且 $A\subset A\cup B\cup C$.

由 $A\cup B\cup C\subset A\Rightarrow B\cup C\subset A$

【例 1-10】 如果 x 表示一个沿数轴作随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系.

$A=\{x\mid x\leqslant 20\}$； $B=\{x\mid x>3\}$；

$C=\{x\mid x<9\}$； $D=\{x\mid x<-5\}$；

$E=\{x\mid x\geqslant 9\}$.

【解】 各事件的情况如图 1-2 所示.

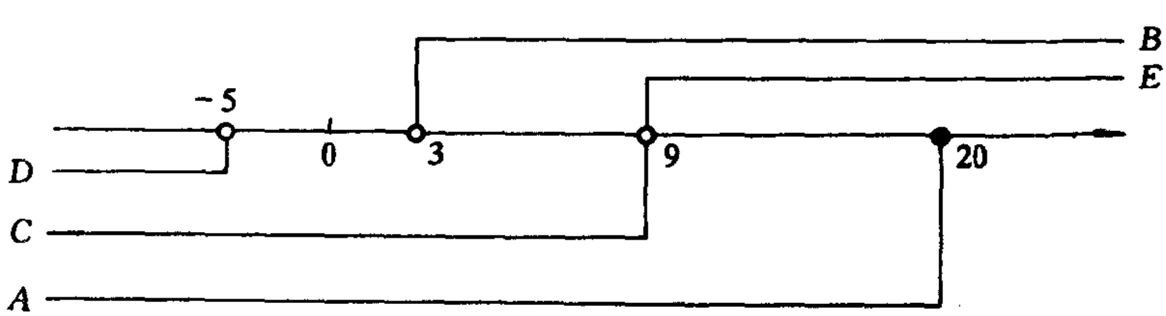

图 1-2

由图可见，$D\subset C\subset A$，$E\subset B$；D 与 B，D 与 E 互斥；C 与 E 为对立事件；B 与 C，B 与 A，E 与 A，A 与 C，A 与 D，C 与 D，B 与 E 都是相容的.

【例 1-11】 指出下列各式成立的条件：

(1) $ABC=A$； (2) $A\cup B\cup C=A$； (3) $A\cup B=\bar{A}$； (4) $AB=\bar{A}$.

【解】 (1) 因为总有 $ABC\subset A$，所以 $ABC=A \Leftrightarrow A\subset ABC \Leftrightarrow A\subset BC \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $A\subset C$.

(2) 因为总有 $(A\cup B\cup C)\supset A$，所以 $A\cup B\cup C=A \Leftrightarrow A\supset(A\cup B\cup C) \Leftrightarrow A\supset(B\cup C)$，从而当 $A\supset B$ 且 $A\supset C$ 时，有 $A\cup B\cup C=A$.

(3) $A\subset A\cup B=\bar{A}$，又因 $A\bar{A}=\varnothing$，仅当 $A=\varnothing$ 时才能有 $A\subset\bar{A}$，但 $\bar{A}=A\cup B=\varnothing\cup B=B$，故 $B=\Omega$. 由此，仅当 $A=\varnothing$，$B=\Omega$ 时等式(3)成立.

(4) $\bar{A}=AB\subset A$，又因 $A\bar{A}=\varnothing$，仅当 $\bar{A}=\varnothing$ 时，才能有 $\bar{A}\subset A$，从而 $A=\Omega$；由 $AB=\Omega B=B$ 及 $AB=\bar{A}=\varnothing$ 知 $B=\varnothing$，由此仅当 $A=\Omega$，$B=\varnothing$ 时(4)式成立.

方法归纳 事件之间的关系和事件的运算很重要，在讨论问题时，或在以后的概率计算中，常用到一些结论，需要熟练掌握. 用文式图有利于分析和理解事件之间的关系和运算. 事件间的关系和运算类同于集合论中集合间的关系和运算，比照讨论往往很方便. 以下给出一些常用结论.

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(2) $AB\subset A\subset A\cup B$，$A-B\subset A\subset A\cup B$；

(3) $\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\cup A=A$；

(4) $A\cap\bar{A}=\varnothing$，$A\cup\bar{A}=\Omega$；

(5) $(A-B)\cup A=A$，$(A\cup B)\cap A=A$；

(6) $A-B$(或 $A\bar{B}$)与 AB 互不相容，且 $A=(A-B)\cup AB$ 或 $A=AB\cup A\bar{B}$.

(7) $A-B$(或 $A\overline{B}$), $B-A$(或 $\overline{A}B$), AB 两两互不相容, 且 $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB$.

除上述各结论外, 还要熟悉事件的运算所满足的交换律、结合律、分配律和德摩根定律.

同步训练题萃

1-1 写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点:

(1) 将一枚均匀硬币抛两次: $A=$"第一次出现正面"; $B=$"两次出现同一面"; $C=$"至少有一次出现正面".

(2) 一个口袋中有 5 只外形完全相同的球, 编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 从中同时取 3 只球, 球的最小号码为 1.

(3) 在 1, 2, 3, 4 四个数中可重复地取两个数, 一个数是另一个数的 2 倍.

(4) 将 a, b 两个球随机地放到三个盒子中去, 第一个盒子中至少有一个球.

(5) 10 件产品中有一件废品, 从中任取两件得一件废品.

(6) 一个口袋中有 2 只白球、3 只黑球、4 只红球, 从中任取一球: $A=$"得白球"; $B=$"不得红球".

(7) 两个口袋各装一个白球与一个黑球, 从第一袋中任取一球记下其颜色放入第二袋, 搅匀后再从第二袋中任取一球, 两次取出的球具有相同的颜色.

(8) 掷两颗骰子:

$A=$"出现的点数之和为奇数, 且恰好其中有一个 1 点";

$B=$"出现的点数之和为偶数, 但没有一颗骰子出现 1 点".

1-2 在经济系学生中任选一名学生, 令事件 A 表示被选学生是男生, 事件 B 表示该生是三年级学生, 事件 C 表示该生是运动员.