

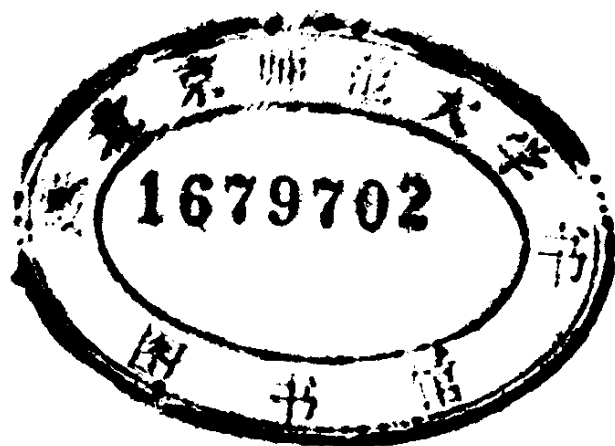
涡运动理论

童秉纲 尹协远 朱克勤 编著

中国科学技术大学出版社

涡运动理论

童秉纲 尹协远 朱克勤 编著



中国科学技术大学出版社

1994·合肥

(皖)新登字 08 号

图书在版编目(CIP)数据

涡运动理论/童秉纲 等编著.--合肥:中国科学技术大学出版社,

1994 年 10 月

ISBN7-312-00596-9

I 涡运动理论

I 童秉纲 等编著

Ⅱ ①涡运动 ②非定常流 ③流体力学

N O

凡购买中国科大版图书,如有白页、缺页、倒页者,由本社出版部负责调换

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026)

合肥丰航彩印厂印刷

全国新华书店经销

开本:880×1230/32 印张:9 字数:222 千

1994 年 10 月第 1 版 1994 年 10 月第 1 次印刷

印数:1-1500 册

ISBN7-312-00596-9 O·148 定价:9.80 元

前 言

涡运动是流体中最普遍存在的一种运动形式。研究涡运动的历史和流体力学的发展历史一样悠久。关于涡运动的若干著名定理是和流体力学的先驱如开尔文、亥姆霍兹等大师们的名字联系在一起。在流体力学研究中最先发展起来的无旋流动只不过是特定条件下的简化。即使在无旋流动的研究中也离不开涡的运动：例如，没有起动涡的概念就无法讲清楚机翼上速度环量是如何形成的；作为机翼基本理论的升力线和升力面理论正是建立在由附着涡与自由涡构成的两种涡旋系模型的基础之上的；点涡、线涡和面涡作为无旋流动的一种基本解而被广泛使用。普朗特创立的边界层理论把流体力学推进到一个新阶段，它揭示了涡量在物面上如何生成和扩散并汇集于物面附近的流域内的物理机制，解释了流动分离现象；而涡旋（集中涡）的生成是与流动分离密切相关的。至于说到湍流，现已认识到，湍流兼有随机性和拟序性，其基本结构之一是各种尺度的涡(eddy)，既有大量的随机的小涡构成背景流场，又有大尺度的拟序的涡结构在统计意义上存在。因此，在事实上，流体的运动是有涡运动，这些流动形态非常复杂，内容异常丰富。由于涡运动是非定常的和强非线性的，在过去的年代，要研究它们遇到了难以克服的困难，直到本世纪末叶，科学和技术已发展到这一步，使人们有可能深入研究这些复杂的涡运动，揭示其运动规律和物理机制，探求开发利用涡运动的有效途径。一方面，超高速巨型计算机、各种瞬态测量诊断手段和信息与图象处理技术等使人们能够显示和观察涡旋运动的非定常演化过程；另一方面，非线性科学的发展必然会给涡运动研究开阔新的思路 and 提供强大的工具。可以说，涡运动的研究一直是流体力学理论和应用研究中最具有挑战性的课题之一。

国内为适应现代流体力学的这一新进展,已有涡动力学的专著出版^[1,4],但我们感到出版一本系统深入地阐述涡运动的基本理论的论著仍旧是十分必要的。我们希望本书能成为从流体力学基础理论通向涡运动研究前沿之间的一座桥梁,以适应该学科蓬勃发展的需要。为此目的,作者根据多年来在中国科技大学近代力学系及中国科技大学研究生院(北京)讲授涡运动理论的讲稿,编撰此书出版。本书在选材上注意少而精;在讲解问题时力求做到条理清晰,概念明确,论述严谨,同时注意反映当代涡运动研究的新成果。对于那些经典性的基本内容,力求用现代的观点加以阐述。

本书共九章。第一章是概论,扼要地介绍涡运动研究的内容和意义以及必要的预备知识,对若干物理概念着重作了阐述。第二章和第三章分别讲述涡量场运动学和动力学的总体特性,给出了若干积分不变量,这些内容在一般流体力学教材中很少涉及。第四章是涡旋流动结构的解析解,从这些解析解我们可以认识涡旋的几种典型流动特性。第五、第六和第七章分别叙述面涡、线涡和点涡系动力学。事实上,在自然界和工程中涡旋具有各式各样的形态,但是自由剪切层和柱状涡是两种普遍存在的典型形态。它们在无粘流中的简化模型即是面涡和线涡。另外,点涡系是许多相互平行的直线涡在不考虑本身的伸缩和弯曲情况下的进一步简化。非线性动力学系统理论为古老的点涡系动力学注入了新的生命力,当前,点涡系的混沌现象已成为非线性力学研究中的一个热点。对此,在第七章中作了必要的反映。第八章结合地球物理流体力学讲述旋转流体中的涡运动。在这里,涡运动受到两个特殊因素,流体斜压性和科氏力的支配,在理论和应用上都很重要。第九章是涡方法。由于涡运动的复杂性,在绝大多数情形下必须借助于数值解,涡方法在研究涡运动中有其独特的优点。在该章中还介绍了近年来确定性涡方法的进展。

本书可作为力学、应用数学、大气、海洋、环境和化工等领域的研究生、教师和科技工作者的一本有用的参考书。由于篇幅所限，一些重要的专题如剪切层的后期演化、钝体尾迹和涡旋的稳定性等都被割爱了，有兴趣的读者可参阅有关专著。

本书由童秉纲、尹协远和朱克勤编著，尹协远统编，最后经童秉纲审核定稿。由于作者水平所限，错误或不当之处在所难免，衷心期望读者批评指正。

庄礼贤教授和马晖扬教授阅读了本书手稿，提出了许多宝贵意见。孔祥言教授为本书提供了部分习题。中国科学技术大学出版社为本书出版给予了充分的支持和有效的合作。力学和机械工程系计算机机房罗丹同志为本书打印了全部书稿。在此，作者对他们表示衷心的感谢。

作 者

1994年5月

主要符号表

A	矢量势函数
a	半径、距离
c	波速; 声速
dl	微元线段
E_k	埃克曼数
(e_z, e_r, e_θ)	柱坐标系下的单位矢量
F	作用力
Fr	旋转流体的弗劳德数
f	彻体力
f_c	科氏力
f_c	离心力
$f(r/\sigma)$	形函数
$f_o(r)$	光滑函数
g	重力
H	哈密顿函数(7.5.1节)
$H(t)$	螺旋度
$h(r, t)$	螺旋度密度
I	流体的冲量
$i(r)$	脉冲外力冲量
(i, j, k)	直角坐标系下的单位矢量
$K(r)$	核函数
$K_o(r)$	非奇异核函数
k	曲率
k_c	科氏参数
L	力矩

L	弥散长度(3.4.2节)
M	流体的冲量矩
Ma	马赫数
p	压强
$Q(t)$	拟熵
$R=r-r'$	两点间的有向距离
R	曲率半径
Re	雷诺数
Ro	罗斯比数
r	矢径
S	面积;空间域围面
s	弧长
T	动能
t	时间
(t, n, b)	自然坐标系
U	平移速度;来流速度
$V(u, v, w); V(V_z, V_r, V_\theta);$	速度矢量及其在直角坐标系、柱坐标系中的分量
V	体积
$\mathcal{V}$	空间域
$W(Z)$	复速度势
$Z=x+iy$	复平面上坐标
Γ	速度环量
γ	面涡强度
γ	比热比
$\Delta=\nabla^2$	拉普拉斯算子
$\delta(r)$	狄拉克函数
δ	涡核半径

$\zeta(t)$	复平面上质点位置
Θ	胀度
$\chi(\alpha, t)$	迹线的拉格朗日表示法
ν	运动粘性系数
Π	力的势函数
ρ	密度; 或 $\rho = k^2$ (6.3.1 节)
σ	涡量流率
σ	截断参数; 密度相对变化
τ	挠度; 相似变数 (5.4.1 节)
Φ	能量耗散率
φ	速度势
Ψ, ψ	流函数
ψ	波函数 (6.2 节)
Ω	刚体旋转角速度
ω	涡量
ω^h	涡量近似值

目 次

前 言	I
主要符号表	V
第一章 概论	1
1.1 绪言	1
1.1.1 涡量场	1
1.1.2 涡量的物理意义	3
1.1.3 涡旋	6
1.1.4 研究涡运动的意义	7
1.2 运动学关系	9
1.2.1 流场的描述	9
1.2.2 运动学基本方程	12
1.3 动力学方程和能量方程	13
1.3.1 N-S 方程	13
1.3.2 涡量动力学方程	14
1.3.3 速度环量动力学方程	17
1.3.4 能量方程	18
第二章 涡量运动学特性	19
2.1 给定涡量和胀量确定速度分布	19
2.1.1 命题的唯一性问题	20
2.1.2 速度分解和速度积分表达式	22
2.1.3 几个问题的讨论	25
2.1.4 速度积分公式(续)	30
2.2 涡量矩守恒	32

2.3	速度远场渐近特性·····	36
2.4	二维涡量场的运动学特性·····	39
2.4.1	二维毕奥-萨伐尔速度公式·····	40
2.4.2	涡量矩守恒特性·····	41
2.4.3	速度远场渐近特性·····	42
2.5	螺旋度·····	44
第三章	涡量动力学特性·····	47
3.1	亥姆霍兹涡量定理·····	47
3.2	涡量场的冲量和冲量矩·····	50
3.2.1	涡量和脉冲外力的冲量·····	50
3.2.2	流体的冲量·····	51
3.2.3	冲量的时间变化率·····	53
3.2.4	流体的冲量矩·····	54
3.3	涡量场的动能和能量耗散·····	56
3.3.1	动能及其时间变化率·····	56
3.3.2	能量的耗散·····	58
3.3.3	拟熵的物理意义·····	59
3.3.4	湍流中的拟熵·····	60
3.4	二维涡量场动力学特性·····	62
3.4.1	流体的冲量·····	62
3.4.2	流体的冲量矩·····	64
3.4.3	流体的动能·····	65
3.4.4	小结·····	66
3.5	涡量在固壁面上的生成及扩散·····	67
3.5.1	一个简单例子·····	67
3.5.2	壁涡量和壁涡量流率·····	70
3.6	作用在物体上的流体动力·····	73

第四章 涡旋流动的若干精确解	76
4.1 引言	76
4.2 点涡和兰金涡	77
4.2.1 点涡	77
4.2.2 兰金涡	79
4.3 奥辛涡和泰勒涡	81
4.4 有轴向流的定常轴对称涡	88
4.4.1 伯格(Surgers)涡	89
4.4.2 苏利文(Sullivan)涡	92
4.5 希尔球涡	94
 第五章 面涡及其演化	 100
5.1 面涡上的相容关系	100
5.2 二维面涡自诱导运动的 Birkhoff-Rott 方程	104
5.2.1 Birkhoff-Rott 方程	104
5.2.2 B-R 方程的精确解	105
5.3 机翼尾涡面卷起的近似模型	107
5.3.1 流动的物理图象	107
5.3.2 具有椭圆环量分布的面涡	108
5.3.3 集中涡的近似模型	110
5.4 面涡的卷起和集中涡的形成	111
5.4.1 卡登(Kaden)螺线	111
5.4.2 参数确定	114
5.4.3 相似性解和高阶近似	117
5.5 面涡的线性和非线性演化	119
5.5.1 开尔文-亥姆霍兹(K-H)不稳定性	120
5.5.2 奇点的形成	124

5.5.3 数值试验	127
第六章 涡索和线涡	131
6.1 三维线涡的自诱导运动	131
6.2 非线性薛定谔方程	135
6.3 涡索的孤立波解	138
6.4 涡环	143
6.4.1 轴对称涡环的数学表述	143
6.4.2 薄核涡环(直接法)	148
6.4.3 任意涡量分布涡环的传播速度(能量法)	152
第七章 点涡系动力学	157
7.1 点涡系动力学的经典理论	157
7.1.1 无界流体中的点涡运动	157
7.1.2 边界和背景流场对点涡系运动的影响	163
7.2 点涡系静力学问题	165
7.3 点涡系稳定性分析	173
7.3.1 正多边形点涡系的稳定性	173
7.3.2 卡门涡街的稳定性	175
7.4 点涡系的相似解	177
7.5 点涡系的混沌	181
7.5.1 点涡系的哈密顿(Hamilton)系统	182
7.5.2 不可积性和混沌	184
7.5.3 半圆内两个点涡的运动	186
第八章 旋转系统中的流体运动	190
8.1 引言	190

8.1.1	旋转流体中的科氏力和离心力	190
8.1.2	分层流体中的浮力效应	193
8.2	基本方程	196
8.2.1	几种形式的基本方程	196
8.2.2	旋转流体的相似性参数	198
8.3	地转流动	200
8.3.1	大气层中的地转流动近似	201
8.3.2	泰勒-普劳德曼(Taylor-Proudman)定理	202
8.3.3	热成风	203
8.4	埃克曼(Ekman)层	204
8.5	旋转流体的波动现象	208
8.5.1	匀速旋转流体中的惯性波	209
8.5.2	科氏参数变化时的罗斯比(Rossby)波	211
第九章	涡方法	214
9.1	二维涡方法	214
9.1.1	二维无粘流的涡方法	215
9.1.2	粘性流的涡方法	220
9.2	三维涡方法	226
9.3	边界条件问题	231
9.4	改进计算效率和离散精度的若干措施	235
9.4.1	格子涡(VIC)方法	235
9.4.2	多极子展开法	237
9.4.3	涡元疏密失调的调整	239
9.5	涡方法在非定常流动中的应用	241
习 题		246

参考文献.....	260
1 书目	260
2 论文	261
名词索引.....	268

第一章 概 论

1.1 绪 言

本书叙述涡运动的原理, 这里说的涡包括涡量场和涡旋. 从其形态而言, 可以认为, 涡量场是一种分布涡, 而涡旋是集中涡. 下面分别叙述涡量场、涡旋以及研究涡运动的意义.

1.1.1 涡量场

为了给出涡量的定义, 需要回顾流体力学教科书中的亥姆霍兹速度分解定理^[2-4]. 流场中某点 P 的邻域内任一点 Q 上的速度 V 可用泰勒级数表示为

$$V = V_P + \delta r \cdot \nabla V \quad (1.1.1)$$

此处 δr 和 ∇V 分别为 Q 点相对于 P 点的位置矢量和速度梯度张量. ∇V 还可分解为对称张量 e 和反对称张量 Ω . 式(1.1.1)化为

$$V = V_P + \delta r \cdot e + \delta r \cdot \Omega \quad (1.1.2)$$

其中

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.3)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.1.4)$$

现分别说明 e 和 Ω 的意义.

首先, 已经清楚, 对称张量 e_{ij} 按其物理意义即为**应变速率张量**. 当 $i=j$ 时, e_{ii} 表示沿对角线上三个正应变速率分量之和, 也就是流体的体积应变速率, 可表示为

$$e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta \quad (1.1.5)$$

这里 Θ 称为**胀量**(expansion), 表示 P 点邻域内流体体积的相对变化速率. 当 $i \neq j$ 时, e_{ij} 表示剪切应变速率的各个分量.

其次, 反对称张量 Ω_{jk} 可以与单位全反对称三阶张量 ϵ_{ijk} 缩并而得到一个与 Ω_{jk} 对应的矢量:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \Omega_{jk} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ikj} \frac{\partial V_j}{\partial x_k}) \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = (\nabla \times \mathbf{V})_i \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

这里引出了**涡量** ω 的数学定义为

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} \quad (1.1.7)$$

于是式(1.1.2)的最后一项可写为

$$\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \omega \times \delta \mathbf{r} \quad (1.1.8)$$

由此可见, 涡量可理解为流体微团绕其中心作刚性旋转的角速度之两倍. 关于涡量的物理意义, 将在 1.1.2 节中作进一步阐述.

据上所述, 从运动学的角度, 我们可以将流动分为两类: 具有涡量的流场称为**有旋流动**; 仅具有应变速率的流场称为**无旋流动**, 也称**势流**.

另外, 从动力学角度来分析, 涡量场通常又和粘性流动存在着对应关系. 例如物面的边界层、分离流区、尾迹区等粘性流动, 必然分布着涡量或一个个涡旋. 这两者之间的联系来源于: 涡量和应变速率都是由流场的速度梯度造成的; 速度梯度大, 应变速率和涡量一般也大. 流体的粘性应力大小取决于应变速率, 特别是剪切应变速率的大小. 因此涡量场和粘性流自然存在因果关系. 不过, 对于高雷诺数 Re 流动, 由于粘性扩散不显著, 特别在无界流场条件下, 涡运动可以按无粘流动计算.