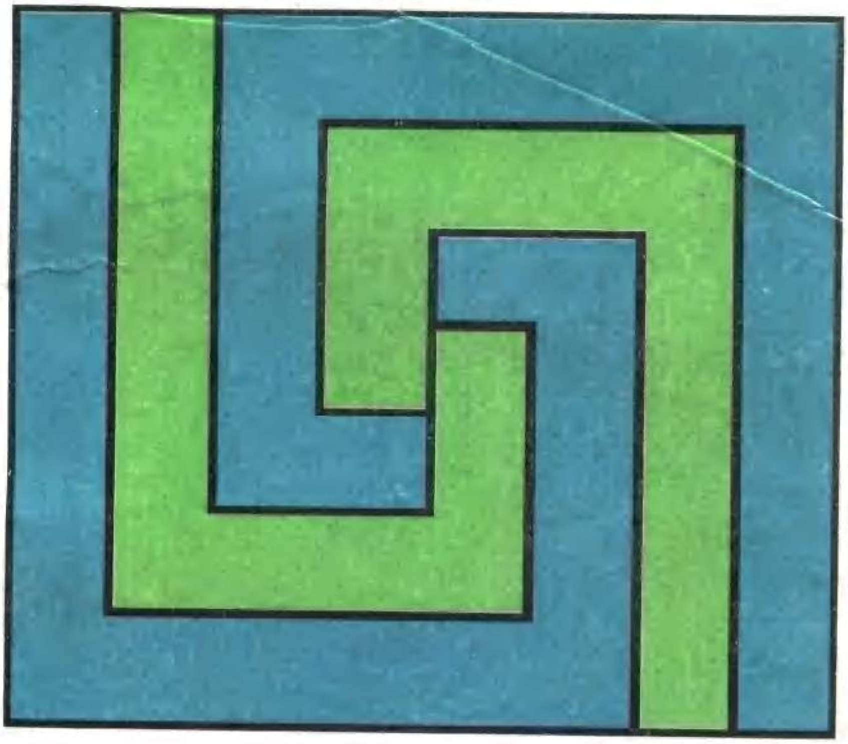
数学分析中的典型问题与方法

裴礼文



高等教育出版社

数学分析中的典型问题与方法

裴礼文

高等教育出版社

（京）112 号

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的典型问题与方法/裴礼文著. 一北京：高等教育出版社，1993.5（1998 重印）

ISBN 7-04-004098-0

Ⅰ.数… Ⅱ.裴… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00318 号

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 27 字数 650 000

1993 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 3 次印刷

印数 5 615—8 624

定价：25.10 元

内容提要

本书是为正在学习数学分析(微积分)的读者,正在复习数学分析(微积分)准备报考研究生的读者以及从事这方面教学工作的年轻教师编写的.

遵循现行教材的顺序，本书全面、系统地总结和归纳了数学分析问题的基本类型,每种类型的基本方法，对每种方法先概括要点,再选取典型而有相当难度的例题,逐层剖析,分类讲解。然后分别配备相应的一套练习. 旨在拓宽基础，启发思路，培养学生分析问题和解决问题的能力,作为教材的补充和延深. 此外,对现行教材中比较薄弱的部分,如半连续、凸函数、不等式、等度连续等内容,作了适当扩充。

全书共分 7 章、33 节、220 个条目、1200 个问题，包括一元函数极限、连续、微分、积分、级数;多元函数极限、连续、微分、积分.

本书大量采用全国部分高校历届硕士研究生数学分析入学试题、苏联高校竞赛题并参阅了 70 余种教材、文献及参考书,经过反复推敲、修改和筛选,在几代人长期教学实践的基础上编写而成. 选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性,对培养学生的能力极为有益,可供数学系各专业师生及有关读者参考.

代　　序

《数学分析》是高等院校数学类各专业的主干课之一．它对于许多后续课程的学习乃至作为科研工作基本功的训练都起着非凡的作用．如何掌握好该课的基本内容并能熟练地运用其中的基本技巧对每个学生来说都是至关重要的．就解题而言，许多习题的解答学生是能够看懂的，但他们的主要问题在于：这些方法是怎样想出来的？也就是说，学生所需要的：除想知道这些题怎样去求解或证明外，更希望了解解题的思想过程，学会思想方法．

裴礼文同志所编写的《数学分析中的典型问题与方法》，系统地汇集了《数学分析》各个部分的一些典型例题和习题，并着重于分析解题的思路和方法，因此是较好地针对学生的需要而编写的．目前我国已出版有类似的书籍(其中不乏很好的著作)，但或者标准过高、题目过深，远远超出大学基础课的要求，或者解答十分详细，而对解题思想叙述得不够．本书编写中力图兼顾学生对这两方面的实际要求．这里大量选用了按《数学分析》教学大纲要求的题目(例如，许多高等院校硕士研究生的入学试题、苏联高校竞赛试题等)，并进行分析讲解．因此，本书的出版，对广大青年学生是非常有益的；对从事《数学分析》教学工作的教师来说，也是极有参考价值的．

路见可

1988年3月于武汉大学

笔者的话

《数学分析》课是数学系各专业的一门重要基础课。它对许多后续课程有直接影响，关系到整个数学系教学的成败，关系到学生素质培养. 数学系的师生历来十分重视数学分析课的教学，投入了巨大的劳动. 在教学实践中，我们深深体会到，学生们学习和掌握教材的基本知识困难并不大，但要灵活运用所学的知识去分析问题和解决问题就感到困难，甚至不知如何着手. 为培养学生分析问题和解决问题能力，以前也出版了大量的好书，但仍不能满足学生的要求. 分析其原因，有些书主要讲一般难度的问题，有些又跟平时教学内容距离较远. 在同学们掌握了教材的基本知识后，若能有一本帮助学生巩固、加深、提高、扩大所学知识的书，用难度更高的问题(最好用研究生入学试题)对学生进行训练，对数学分析中的问题与方法进行全面系统的总结和分类指导，告诉读者应该如何去分析和解决问题，这对培养学生的思维能力与独立工作的能力，从根本上强化已学知识，提高学生的素质十分必要.

基于这种需要，我们集中了好几年的时间，将全国各高校历届硕士研究生数学分析入学试题进行了一次全面整理，逐题分析研究，比较分类. 这些题目多数具有相当的难度，但仍在教学大纲要求范围之内. 其中不少题目出自名家之手. 经过我们反复推敲后修改和筛选出的题目有着很强的典型性，灵活性，启发性，趣味性和综合性. 它们理当看成是数学分析教学发展提高的一个组成部分. 用这些题目来训练学生，对培养学生的能力极为有益. 但这些题目毕竟十分零散，还不足以全面概括数学分析中的基本类型和方法. 因此，我们又参阅了国内外70余种教材、文献和参考书，

分析比较了上万道题目，包括我们教学过程中积累的题目．从中精选了约1200题作为讲解和剖析各类型的例题和练习．其中研究生入学试题及苏联高校竞赛题约占总数的一半．另外，本书还对现行教材中比较薄弱的部分进行适当扩充讲解，如函数上、下极限，上、下半连续，凸函数，不等式，等度连续等等．本书希望对学有余力，特别是优秀学生，以及对任课老师的教学工作有所帮助和裨益．

全书共分7章33节，约220个小条目，中心问题是向读者回答：数学分析的每个单元到底有哪些基本问题？每类问题各有哪些基本方法？每种方法又有哪些富有代表性，典型性，又有相当难度，值得向大家推荐的好例题和练习？这些题目在一般教科书中难以找到，有相当难度，但又能被大学生所接受和掌握．其难度相当于研究生入学考试中的难题与次难题．

为了方便阅读，特别为了一、二年级学生在学完一个单元之后可以立即转入到本书的学习，本书内容的编排基本上与现行教材平行，甚至一一对应．可以作为课堂教学的补充和延续．

基于编写本书的上述宗旨，我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解．全书以解题方法为中心，每段先对所解问题的方法以“要点”的形式进行概括性的阐述，然后由浅入深地安排一套一套的例题，对具体方法和精神实质，进行一层一层地剖析和讲解．并不断深化发展，逐步形成概念，让读者从变化中领会其不变的东西．顺藤开花，让题题有它自己的位置、作用和品尝价值．

优秀学生非常关心“题目是怎么想出来的”？据此，在讲解问题时，我们特别着重于问题的分析，阐明解题的思路，使读起来感到亲切自然，学了能用．

总之，为了紧密地配合教材和教学，结合同学们的实际，联系

研究生入学考试，我们在总结数学分析中的基本问题与方法，选材、编排、以及问题的解法、写法上，下了很大工夫.

本书是笔者在武汉大学数学系为高年级学生讲授《数学分析(III)》，《数学分析方法》所写讲义的基础上编写的. 原讲义讲授过三届. 全国各地来的十几名进修教师听过这门课，他们和一些借阅了本书手稿的同学一致认为，这些材料非常精采，解法很有启发性，读后印象极深，可以收到事半功倍的效果. 我系教师黄象鼎同志，在教学中广泛采用了本书的内容，他认为，书中的材料对学习数学分析的学生，对学过数学分析的高年级学生，乃至对研究生以及担任分析习题课的老师都很有参考价值. 内容耐读，余味甚强，有些问题点到为止，恰到好处.

本书吸收了我系几代人的教学经验，尤其在编写过程中得到我的老师，全国数学教材编审委员会委员路见可教授亲切指导，他不仅逐字逐句的批阅了全书，还为本书撰写了代序.

自 1985 年以来，本书多次得到高等教育出版社文小西同志的指教，他的许多宝贵意见，成为本书的指导思想和修改依据. 另外在编审加工过程中，又幸得他极为精细、"浩瀚"的工作，使本书大为增色.

本书还得到辽宁师范大学数学系王长庆先生，我系前辈吴厚心教授的指教和帮助. 在编写过程中得到系领导的亲切关怀和支持.

在此谨向以上各位老师、同志和朋友表示衷心的感谢，对所参考的书籍(见参考书目录)的作者，对所选题目的作者，表示深切的谢意.

最后对审阅本书的徐森林教授为本书所作的热忱肯定及宝贵意见，表示衷心感谢！对高教出版社的同志们为本书出版付出的辛

勤劳动表示感谢．没有他们的支持，本书是不可能与读者见面的。

阅读本书时，对每道题务请坚持**先做再看**的学习方法．

由于水平和时间限制，书中一定还有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

裴礼文

1988.4.于武汉大学

符　号

集合符号

$\mathbf{N}$　全体自然数组成的集合$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Z}$　全体整数的集合.

$\mathbf{Q}$　全体有理数的集合.

$\mathbf{R}$　全体实数的集合.

∂E　集合E的边界点组成的集合.

$U(x_0,\delta)$　点x_0的δ邻域$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

$U_0(x_0,\delta)$　点x_0的空心δ邻域$U_0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)U(x_0,x_0+\delta)$

M_1M_2　点M_1、M_2所联之线段.

$N(M_0)$　点M_0全体邻域组成之集合.

逻辑符号

$\forall$　对于任意给定的　(当用在符号"$\exists$"之前时).

　对于所有的　(当用在命题最后时).

$\exists$　至少存在一个.

$A\Longrightarrow B$　A的必要条件为B.

$A\Longleftarrow B$　A的充分条件为B.

$A\Longleftrightarrow B$　A的充分必要条件为B.

分析符号

$\nearrow$　单调增加(不一定严格).

$\searrow$　单调减小(不一定严格).

严$\nearrow$　严格增加.

严$\searrow$　严格减小.

$\to$　趋向于.

$\not\to$　不趋向于.

$\rightrightarrows$　一致收敛于.

$\not\rightrightarrows$　不一致收敛于.

代数符号

$(a_{ij})_{n\times m}$ 矩阵：$\underset{n\times m}{(a_{ij})}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$\det(a_{ij})$　矩阵(a_{ij})的行列式.

$\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$　有时表示雅可比矩阵$\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}}$，有时表示雅可比行列式

$\det\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$，以上下文定.

$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$　以 A_x,A_y,A_z 为分量的三维向量.

目　　录