数学习题集

分析部分（第三册）

〔法〕E·阿祖莱　M·梅斯里　M·塞尔法蒂　著　刘绍祖　译

高等教育出版社

数学习题集

分析部分（第三册）

[法]E·阿祖莱　M·梅斯里　M·塞尔法蒂著

刘绍祖　译

高等教育出版社

内容提要

《数学习题集·分析部分》系根据法国高等教育出版社出版E·Azoulay等著Exercices de Mathématiques, Analyse译出，本书为第三册，据1972年第二版翻译。

本书共分六章，分别介绍了级数理论，复变数函数和概率论基础的一般知识，每一章首先是课程提要，然后是例题和习题，并附有简单解答。例题和习题中有一部分是法国大学的历年考试试题。

本书可供我国高等院校理工科及有关专业师生参考。

数学习题集

分析部分（第三册）

［法］E·阿祖莱 M·梅斯里 M·塞尔法蒂著

刘绍祖 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8 字数 192,000

1989年2月第1版 1989年11月第1次印刷

印数0001-2 240

ISBN 7-04-000872-6/O·336

定价 2.55元

序　　言

为什么要编一部新的习题集？为什么要在其中把不同的部类掺和起来，并且穿插着内容丰富而又出人意外的课程提要呢？我在翻阅这套习题集的第一册时，就不禁立即提出这些问题来。

经过思考，我觉得本书的尝试是符合教学本身的实践经验的．一堂数学习题课是怎样进行的呢？教师首先要向学生们重复课程的主要内容．无论是定义，还是概念，还是从它们引出的结论的叙述都要顾及．只有在这以后，教师才要学生做若干习题；然后应该由学生辨明是非，触类旁通，进行比较，也就是人们说的，把课程用于实践．

我以为这几册书可以促进这样一种学习方法．课程提要是全书的纲，它所占的比例是得当的，既不是公式的罗列，也不是详尽无遗的课程，习题是多样化而又循序渐进的．

本习题集也一定会引起学生们的兴趣；我希望他们在解题的时候，也享受作者们在选编本书时同样的乐趣．

阿祖莱、梅斯里和塞尔法蒂三位先生的这一著作一定能达到他们预期的目的，也就是说，帮助那些不畏独立工作、认真攻读的学生更好地消化在正式课程中学到的知识．

我预祝这部书在学生中广为流传，这才不辜负作者们编纂时的苦心．

南特理学院教授　维维埃(M • VIVIER)

前　　言

理学院不久前在教学结构方面经历了一场深刻的改革，特别是在预科，连名称和大纲都有所更改。因此，一部适应新大纲的工具书，可能会受到大学生们的欢迎。

我们确实努力要使这部习题集成为常用的工具。在其中搜集了课程中常见类型的应用题，学生通过解题可以很好地检验他的知识。我们还专门收进了一些比较特殊的问题。从我们的实际教学经验出发，对于那些为我们的学生不理解或理解不透的问题，都毫不犹豫地大大增加了习题的份量。

这部书有八册。头三册适用于数学物理系及物理化学系的一年级和二年级的分析课，也适用于高等数学班和某些工学院的预备班。

第四册与第五册都是代数方面的，包括集合代数（代数结构，常见的域和环）和线性代数，以及多项式的研究。

第六册和第七册是几何方面的内容，并附入一些适合上文已述水平学生的力学练习题。

最后一册包含了同全部课程有关的一般性问题，其中大部分都是大学学院和一些高等工程学院正式考试时拟定的题目。

每一章都有一个课程提要，接着是数量不等的有完整解法的例题，最后给出一些习题，并附有简要的解法或数字答案。

欢迎读者对本书提出意见、建议。

作　　者

第三册引言

在本册内，我们将会见到大学理科学位证书大纲中列入的分析的补充内容。前三章叙述级数的研究。首先是数项级数。在其中，我们试图在课程提要内清晰地提出种种研究方法，至于例题的编排顺序则是随意的。

紧接着的一章“函数项级数，幂级数”是按照前述水平用经典方式叙述的。虽然有一些研究函数项级数一致收敛性的例题，但是，在本章内，按照这样水平，主要的研究对象仍然是比较特殊的幂级数问题；这时，很多一致收敛性问题都可用初等方法解决。函数项级数的研究以关于傅里叶级数的一章而告结束。课程提要中列出了一个简单的关于傅里叶展开式的存在定理。这个定理的假设条件在求展开式的例题中恒能被满足。我们认为适当的是，在这里不但没有强调，而且根本找不到关于傅里叶展开式的收敛速度的说明，也没有引入平方平均值收敛概念；如果将来傅里叶级数的研究有可能在这水平上（还要考虑到教学大纲的广度）更好地加以阐明的时候，那末在以后的修订版本中再来介绍这一概念或许是适当的。

狭义分析的最后一章专讲复变数函数。正则函数、半纯函数概念，以及这样函数的积分都已给以充分的说明。在例题里，除了与使用留数定理有关的经典问题外，我们全面地增加了范例，以便尽可能使学生对复变数函数、单值的正则函数或解析的函数有一个明确的概念。我们认为把这一章安排在大学第一阶段学习是一个成功的改革，这部分内容过去是准备给学习第二阶段数学的学生讲授的。类似地修改教学大纲以便把这部分

课程介绍给专业数学班[①]看来也是合乎愿望的。

本册的最后一章转向概率论的研究。按照第一阶段的教学大纲，我们也是在初等形式下来介绍这一部分内容的。学生们在这个领域里最初遇到的困难，通常是由于概率思想的引进（一般说来，这种引进是太迟了）与学生们的充满直观判断的心理状态互相冲突所致。直观判断往往并不正确或者至少是不充分的。因此在这一章里，除了有概率理论的一般公理的说明外，还详细说明了（离散的或非离散的）随机变数概念，随机变数的分布函数，密度函数以及分布函数的各阶矩的研究，等等。教学大纲排除了多维随机变数的研究。最常用的概率的分布律是借助各种各样的例题来提出的，重复试验问题的研究也是这样做的。

在这一章之前，安排了题为“组合代数”的一章是很自然的，因为我们在这里所考虑的各种计算题目构成了第十七章内容的一个基础。而且就这些题目本身来说，学生们在本课程头几周完成他们的练习题时也会涉及到。

---

① 译者注：这是法国中学里专门为投考理工学院的学生所设的班级。

目　录

第十二章

数项级数

收敛性。

设 U_n 是一实数或复数序列。我们说一般项为 U_n、并记作 $\{U_n\}$ ① 的级数是**收敛的**，若

$$s_N = \sum_1^N U_n$$

当 $N \to +\infty$ 时有有限极限，在相反情况下，则说它是**发散的**。

s_N 是级数的部分和，当 s_N 的极限存在时，称此极限是该级数的和：

$$s = \sum_1^\infty U_n.$$

在收敛情况下，我们称

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty U_k$$

为级数的 n 级余部。

收敛的必要条件.

要使一级数收敛必须

当 $n \to +\infty$ 时，$U_n \to 0$.

这个条件不是充分的。因此我们只能说，若 U_n 不趋于零，则

① 译者注：在中文书中不管级数是否收敛通常都把它记成 $U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$ 或 $\sum_{n=1}^\infty U_n$。

级数发散.

几何级数.

一般项是这种形式

$U_n = aq^{n-1}$（a:第一项；q:公比；a 与 $q \in \boldsymbol{R}$ 或 C），

其部分和的值为：

$$s_n = \sum_0^n U_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

若 $|q|<1$，则这种级数收敛并有和

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

若 $|q| \geqslant 1$，则级数发散.

正　项　级　数

（从某一项起始）

基本性质.

要使一正项级数收敛，必须而且只须它的部分和是上有界的.

交换性与结合性.

——交换性：以任何方式排列正项级数的诸项既不改变它的性质，也不改变可能的和.

——结合性：以任何方式重新聚集正项级数的诸项而加以结合既不改变它的性质，也不改变可能的和.

从一收敛正项级数中选出的任何级数都是收敛的.

正项级数收敛性的判别准则.

A）比较定理.

若从某一项开始，$0 \leqslant U_n \leqslant V_n$，且级数 $\{V_n\}$ 收敛，则级数

$\{U_n\}$ 也收敛。

若从某一项开始，$0\leqslant V_n\leqslant U_n$，且级数 $\{V_n\}$ 发散，则级数 $\{U_n\}$ 也发散。

B）一般项的等价性.

若 U_n 与 V_n 是二正项级数的一般项且

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时}\quad U_n\sim V_n,$$

则级数 $\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$ 具有相同性质。这个结果说明了使用比较级数的理由.

C）柯西判别准则.

若从某一项开始，

$$\sqrt[n]{U_n}\leqslant k<1,\ \text{则级数收敛},$$

$$\sqrt[n]{U_n}\geqslant 1,\qquad \text{则级数发散}.$$

特别是，我们有柯西法则：若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=l\begin{cases} l<1,\ \text{则级数收敛}, \\ l>1,\ \text{则级数发散}, \\ l=1,\ \text{则为不定情况}. \end{cases}$$

可是，若 $\sqrt[n]{U_n}$ 是从比 1 大的值趋于 1 的，则有发散情况出现.

当 U_n 包含 n 次幂时应用这个判别准则更方便.

D）达朗贝尔判别准则.

若从某一项开始，

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\leqslant k<1,\ \text{则级数收敛},$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\geqslant 1,\qquad \text{则级数发散}.$$

特别是，我们有达朗贝尔法则：若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l\begin{cases}l<1, & \text{则级数收敛,}\\ l>1, & \text{则级数发散,}\\ l=1, & \text{则为不定情况.}\end{cases}$$

然而，若$\frac{U_{n+1}}{U_n}$是从比 1 大的值趋于 1 的，则出现发散情况．这个判别准则用于 U_n 包含乘积或阶乘的情况时更方便．

注意：若$\frac{U_{n+1}}{U_n}\to l$，则$\sqrt[n]{U_n}\to l$．其逆一般不真．

E）**杜阿迈判别准则**．

这个判别准则改进了在

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\to 1_{-0}\ (\text{不定情况})$$

的情况下的达朗贝尔判别准则．

若我们能将$\frac{U_{n+1}}{U_n}$转变成如下形式

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{1+\frac{a_n}{n}}\quad (a_n>0)$$

且若从某一项开始，$a_n>k>1$，则级数收敛，若从某一项开始，$a_n\leqslant 1$，则级数发散．

特别是，若

$$a_n\to l\begin{cases}l>1, & \text{则级数收敛,}\\ l<1, & \text{则级数发散,}\\ l=1, & \text{则为新的不定情况.}\end{cases}$$

F）**同一个积分的比较**．

若 f 是正值、递减函数，且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$，则一般项为 $U_n=f(n)$ 的级数与积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 具有同样性质（这就是说，它们同时收敛，或同时发散）①．在发散情况下，表达式

① 这个性质在例题 28 中已给以示范讲解．

$$s_n=\sum_1^n U_n \text{ 与 } \int_a^n f(x)dx$$

为等价无穷大.

在收敛情况下，我们可以给出级数余部的界限：

$$R_n<\int_n^{+\infty} f(x)dx.$$

例：一般项为

$$U_n=\frac{1}{n}$$

的级数（调和级数）发散（因为积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$不存在）.

此外

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \text{与} \quad t_n=\int_1^n\frac{dx}{x}=\operatorname{Log} n$$

是等价无穷大.

G）**比较级数.**

1）几何级数（见前）.

2）黎曼级数．我们有结果：

$$\boxed{U_n=\frac{1}{n^a}\begin{cases}a>1 & \text{收敛}\\ a\leqslant 1 & \text{发散}\end{cases}} \quad (a\in \boldsymbol{R}).$$

3）伯特兰 (Bertrand) 级数：

$$\boxed{U_n=\frac{1}{n^a(\operatorname{Log} n)^\beta}\begin{cases}a>1 & \text{收敛，}\forall\beta\\ a=1 & \begin{cases}\text{收敛，若 }\beta>1\\ \text{发散，若 }\beta\leqslant 1\end{cases}\\ a<1 & \text{发散，}\forall\beta.\end{cases}}$$

4）指数级数：

$$U_n(x)=\frac{x^n}{n!},\ \forall x \text{ 收敛（于 } e^x\text{）}.$$

注意：斯特林公式.

这个公式给出当 $n\to+\infty$ 时与 $n!$ 等价的无穷大. 我们有：当 $n\to\infty$ 时，

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\ e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}.$$

它可用于级数的一般项包含阶乘时的情况.

H) $n^{\alpha}U_n$ 法则.

若存在这样的数 $\alpha>1$ 使得从某一项开始 $n^{\alpha}U_n<A$，则级数 $\{U_n\}$ 收敛.

若存在这样的数 $\alpha\leqslant1$ 使得从某一项开始 $n^{\alpha}U_n>B>0$，则级数 $\{U_n\}$ 发散.

特别是，这法则可应用于当 $n\to+\infty$ 时 $n^{\alpha}U_n\to l\neq0$ 的情况. 若 $\alpha>1$ 则级数收敛，若 $\alpha\leqslant1$ 则级数发散。

任意实数项或复数项级数

我们称一般项为

$$V_n=|U_n|$$

的级数是模级数。记号 $|U_n|$，按照（实的或复的）情况，表示绝对值或模.

绝对收敛性.

若一般项为 $V_n=|U_n|$ 的级数收敛，则一般项为 U_n 的级数也收敛，而且我们说它是绝对收敛的. 若模级数发散，则我们对一般项为 U_n 的级数丝毫不能预言什么.

半收敛性.

若一般项为 $|U_n|$ 的级数发散，但一般项为 U_n 的级数收

敛，则我们说后一级数是半收敛的①.

对于具有任意符号的实数项级数，我们不再能应用交换性. 然而我们可以把级数的各项分成一些有限项数的组而分别合并起来（但条件是一般项趋于零）. 另一方面，我们也不再能应用比较定理或关于一般项的等价性的定理.

对于具有形式为 $z_n=U_n+iV_n$ 的复数项的级数，其中 U_n，$V_n\in\boldsymbol{R}$，我们有性质：

一般项为 z_n 的级数在而且只在级数 $\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$ 收敛时才收敛.

若以 $|z_n|=\sqrt{U_n^2+V_n^2}$ 为一般项的级数收敛，则 $\{z_n\}$ 绝对收敛.

两级数之和（实的或复的情况）.

——二绝对收敛级数之和是绝对收敛的；

——一绝对收敛级数与一半收敛级数之和是半收敛的；

——二半收敛级数之和是收敛的，但我们不能预言它是否绝对收敛或半收敛.

两级数之积.

我们称一般项 z_n 由

$$z_0=U_0V_0,\quad z_1=U_1V_0+U_0V_1,\cdots,$$

$$z_n=U_0V_n+U_1V_{n-1}+\cdots+U_nV_0$$

得到的级数为已给二次数 $\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$ 的积级数.

定理.

二绝对收敛级数的积级数是绝对收敛的，且以二级数之和的积为其和.

交错级数.

① 译者注：在中文书中往往叫做"条件收敛的".

这是一些实数项级数，其一般项，从某一项开始，交错地是正的和负的。

关于交错级数的基本定理.

要使一交错级数收敛，只须它的一般项的绝对值递减地趋于零.

例：由此定理可知，一般项为 $U_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 的级数是半收敛的. 这是交错调和级数.

我们可以证明，n 级余部的绝对值小于所略去的第一项的绝对值，也就是说

$$|S-S_n|=|R_n|<|U_{n+1}|,$$

此外，$S-S_n$ 与所略去的第一项 U_{n+1} 同号（不是近似或过剩近似）.

阿贝尔法则.

若 U_n 可被转变为这样形式

$$U_n=a_nb_n$$

且：

a) $\left|\sum_{1}^{n} b_k\right| \forall n$ 是有界的；

b) $a_n\geqslant 0$ 并当 $n\to\infty$ 时递减地 $a_n\to 0$，则级数 $\{U_n\}$ 是收敛的.

无穷乘积

设 a_n 是一实数或复数序列. 我们说，一般因子为 a_n 的无穷乘积收敛，若序列

$$p_1=a_1,\ \ p_2=a_1a_2,\cdots,\ \ p_n=a_1a_1\cdots a_n$$