DUOYUANZHILIANGKONGZHI

多元质量控制

钱仲侯　王成斌　孟玉珂　著

中国铁道出版社

多 元 质 量 控 制

钱仲侯　王成斌　孟玉珂　著

中 国 铁 道 出 版 社
1 9 9 5 年・北京

(京)新登字063号

内容简介

本书是在完成国家自然科学基金项目“多元质量控制的原理与方法”研究的基础上写成的。本书全面阐述了多元质量控制的原理与方法，建立了各种工序控制模型，且各种数学模型都比较实用，有良好的可操作性。主要包括预备数学知识、均值向量控制图、多元离差控制图、均值向量与协差阵联合控制图、多元单值控制图、多元累积和控制图、关于多元离散情况的处理方法、关于多元数据相依情况的处理方法等内容。

本书适合于质量管理工作者、质量管理科研人员及相关院校师生阅读。

多元质量控制
钱仲侯　王成斌　孟玉珂　著
*
中国铁道出版社出版发行
(北京市东单三条14号)
责任编辑　熊安春　封面设计　薛小卉
各地新华书店经售
北京市顺义县燕华印刷厂印

开本:850×1168毫米 1/32 印张:7.5 字数:191千
1995年12月　第1版　第1次印刷
印数:1—1,500册

ISBN7-113-02080-1/F·155　定价:9.20元

前　言

产品和服务质量是物质文明和社会进步的主要标志之一。当今激烈的市场竞争，归根到底也是质量之争。凡久负盛誉、稳固占有市场的企业，没有不是靠质量战略制胜的。中央领导同志曾反复强调“必须把质量提到突出的位置上来。”树立质量第一观念、走质量效益型的经营之路是实现经济腾飞的关键。

质量是一个永恒的课题。改进产品和服务质量是一项系统工程，一靠科学技术，二靠管理。全面质量管理(TQM)是现代企业赖以生存和发展的主要支柱。在全面质量管理中，统计质量控制(SQC)占有极其重要的地位。可以毫不夸张地说：不运用统计概念和统计方法，就不会有现代质量管理。

从运用统计方法的角度看，统计质量控制可以区分为一元质量控制和多元质量控制。经典的休哈特控制图及以后出现的种种非休哈特控制图和验收抽样，都属于一元质量控制的范围；它研究的对象主要是单一质量特性的控制问题。多元质量控制则把多元分析方法同工序控制和抽样检验结合起来，使统计质量控制具有更强大的生命力。我们知道，任何一种产品或服务都有若干项可以测定的质量特性。从经济角度考虑，对于主要的质量特性应当严加控制，使之符合规格要求；对于次要的则放宽控制，甚至不予控制。但一般说来，主要质量特性也往往不止一个，因而必须对两个或两个以上的质量特性同时进行控制。比如：对一个铸件、锻件、冲压件往往要同时控制几个主要几何尺寸；对一种化学试剂或合金要同时控制若干种组分，等等。此时被控制的各变量构成多元分布，而且由于随机波动的基本性质，一般都服从多元正态分布。可以证明(本书第二章我们将给出证明)，无论诸变量间是否存在相关关系，都不能用对各变量的分别控制代替对诸变量的联合控制。因为在一定的显著水平下，两者的控制域不同，用前者代替后者会出现过

控和欠控两种报警错误。多元质量控制正是对多个质量特性同时加以统计控制的一种统计方法和技术。

多元质量控制的概念最早是由Hotelling在40年代提出的。他基于二元正态变量建立了T^2统计量,对飞机轰炸瞄准的质量(脱靶量)进行监控。50年代后,Jackson,Ghare,Torgersen,Montgomery,Wadsworth等进行了更广泛的研究,特别是Alt在70～80年代的几篇论文对多元质量控制体系的形成起了重要作用。但由于数据处理和建模中涉及求逆矩阵或高阶行列式,用手工处理非常麻烦,所以直到70年代微型计算机兴起后,多元质量控制方法才开始走向实际应用。进入80年代以后,随着微机的普及,加上国际经济中质量竞争的推动,使多元质量控制有了较快的发展。迄今,在应用数理统计学和质量管理学中,多元质量控制已经成为一个独立的分支,日益显示出它巨大的生命力。

多元质量控制,或者更确切地称为多元统计质量控制,是以多元统计分析为基础的一门实用技术。从某种意义上说,一元质量控制是多元质量控制的特例,多元质量控制具有比一元质量控制更为广泛的实用范围和经济价值。随着微机的普及,多元质量控制在机械、电子、轻工、纺织、化工、冶金、食品等行业中都已崭露头角,发挥出良好作用。无疑,推行多元质量控制是改善和强化统计质量控制的一个重要方面。

本书是在作者多年来从事质量管理教学的实践经验和科研成果基础上编写的。书中第一章主要介绍读者应当具备的数学知识并研究一些与多元质量控制密切相关的专门问题,为阅读以后各章打好基础。大家知道,计量值休哈特图有两种基本类型:一种用来控制分布的集中趋势,最常用的是$\overline{X}$图;另一种用来控制分布的离中趋势,最常用的是R图和S图。因为分布的均值和方差互不相关,彼此不能相互提供任何信息,所以两者必须结合使用。与休哈特图相类似,多元控制图也有两种基本类型:一种用来控制均值向量,另一种用来控制离差。二者也同样互不相关,所以这两种图也必须结合使用。本书从第二章至第五章依次讨论均值向量控制图、多元离差控制图、均值向量与多

元离差联合控制图及多元单值控制图。为了提高对异常干扰的检出能力，第六章讨论了多元累积和控制图。以上二～六章构成本书的基本内容。第七章和第八章分别研究在多元工序控制中多元离散情况的处理和多元相依数据的处理。这些都是一般多元控制问题的扩展，拓宽了多元质量控制的应用范围。书中附录1“工序能力分析”原为武汉工业大学刘朝荣教授为本书撰写的第九章，由于习惯和使用上的方便，一些符号、体例与本书所写各章不尽一致，为全文保持其原貌，以附录形式收录，刘教授对工序能力分析的研究起步早，研究系统全面，颇有造诣。附录所载他的研究成果弥补了本书在这方面的不足。附录2则是收录的在多元质量控制中常用的一些统计表。

本书有较广泛的适用对象，对于管理专业质量学科的研究生和大学本科生、质量工程师等可以作为教材和参考资料，对于从事质量工作的技术人员和生产第一线的工人、管理人员，只阅读文字部分及主要的公式(不看数学推导过程)也是十分有益的。

当然，无论国内还是国外，开展多元质量控制的实践经验还不够多，在统计方法和软件设计上还有许多新的课题有待解决。诸如多元工序能力指数的定义及其统计性质，不同权重的多重质量特性的处理问题，利用主元分析建立多元控制图的失控分析方法问题，多元验收抽样设计问题，开发高检出力的控制方案，非参数控制模型以及多元控制图的优化设计问题，等等，都有待统计和质量工作者协同努力，深入进行研究开发。

我们已经有了良好的开端。可以预料，随着我国和世界经济的不断发展，多元质量控制作为全面质量管理的一个重要组成部分，一定会逐步推广开来并不断得到发展和提高。

在本书撰写过程中，王学敏、李卫、刘东、宿中民、沈媖等同志都参加过部分工作，谨向他们表示由衷的感谢。

特别感谢武汉大学张尧庭教授，他在百忙中认真审阅了本书全稿，并提出了不少宝贵意见。

作　者

1994年4月于北方交通大学

目　　录

第一章　预备数学知识 …… 1
　第一节　随机向量及其矩 …… 1
　第二节　多元正态分布 …… 9
　第三节　样 本 矩 …… 12
　第四节　多元正态总体的均值与协差阵估计 …… 14
　第五节　多元统计中常用的统计量及其分布 …… 18
　第六节　多元随机变量正态性检验 …… 25
　第七节　Bonferroni 不等式 …… 26
　第八节　剔除多元异常数据的一般方法 …… 27
　　主要参考资料 …… 30
第二章　均值向量控制图 …… 31
　第一节　关于多元控制不能用个别一元控制
　　　　　代替的证明 …… 31
　第二节　总体协差阵已知的均值向量控制图(χ^2 图) …… 38
　第三节　总体协差阵未知的均值向量控制图(T^2 图) …… 44
　第四节　对失控子组中诸分量的个别检验 …… 47
　第五节　均值向量控制图示例 …… 49
　第六节　小样本 T^2 统计量的控制图 …… 64
　第七节　T^2 图的优化设计 …… 71
　　主要参考资料 …… 81
第三章　多元离差控制图 …… 82
　第一节　一元离差控制图概述 …… 83
　第二节　W 图 …… 87
　第三节　L 图 …… 88
　第四节　$\ln|S|$图 …… 89
　第五节　$|S|$图 …… 91
　第六节　$|S|$图的二元特例 …… 92

第七节 未知 Σ_0 的多元离差控制图…………………… 93
第八节 对失控子组中诸分量的个别检验 ……………… 94
第九节 多元离差控制图示例 ………………………… 95
第十节 关于五种多元离差控制图的评价……………… 104
主要参考资料………………………………………… 108
第四章 均值向量与协差阵联合控制图………………… 109
第一节 J 图(直线控制界)……………………………… 109
第二节 $\overline{X}-S$ 图(椭圆控制界) ………………………… 112
主要参考资料………………………………………… 115
第五章 多元单值控制图………………………………… 116
第一节 检验现工序的统计稳定性……………………… 116
第二节 由 Q_j 的准确分布建立控制图 ………………… 118
第三节 检验未来工序的受控性………………………… 119
第四节 几种分布的比较………………………………… 119
第五节 示 例………………………………………… 120
主要参考资料………………………………………… 124
第六章 多元累积和控制图……………………………… 125
第一节 T 统计量累积和检出方案(COT 图) ………… 126
第二节 向量累积和检出方案(COV 图) ……………… 129
第三节 已知偏倚方向的 $\overline{X}-MCUSUM$ 图(之一) …… 134
第四节 已知偏倚方向的 $\overline{X}-MCUSUM$ 图(之二) …… 138
第五节 $S-MCUSUM$ 图 ……………………………… 141
第六节 广义方差累积和控制图………………………… 142
主要参考资料………………………………………… 146
第七章 关于多元离散情况的处理方法………………… 147
第一节 模型结构………………………………………… 147
第二节 总体均值向量与协差阵的导出及 $\overline{X}$ 控制 …… 148
第三节 总体均值向量与协差阵未知时的 $\overline{X}$ 控制 …… 150
第四节 样本呈时间相依时的总体均值控制…………… 151
第五节 示 例………………………………………… 152

主要参考资料………………………………………… 154
第八章　关于多元数据相依情况的处理方法……………… 155
第一节　一元正态总体中相依样本的均值控制界……… 155
第二节　多元正态总体中相依样本的均值控制界……… 165
主要参考资料………………………………………… 172
附录 1　工序能力分析 ……………………………………… 173
附录 2　常用统计表 ………………………………………… 194
表 1　正态分布表 ………………………………………… 194
表 2　t 分布表 ………………………………………… 196
表 3　x^2 分布表………………………………………… 197
表 4　F 分布表 ………………………………………… 201
表 5　控制界计算因子表 ……………………………… 225
表 6　L 分布表………………………………………… 226
表 7　J 分布表 ………………………………………… 227

第一章　预备数学知识

多元质量控制涉及到多元数据的整理和统计推断等复杂内容。因此，掌握相应的多元统计概念和方法是讨论多元质量控制问题的必要前提。

众所周知，一元统计质量控制是建立在一元正态分布基础上的；因为在现实世界中产品和服务质量特性的统计量(随机变量)大都服从或近似服从一元正态分布，或者它们的某种形式的极限分布是一元正态分布。同样，多元统计质量控制是以多元正态分布理论为基础的；因为在现实世界中产品和服务的多重质量特性的统计量(随机向量)都服从或近似服从多元正态分布，其某种形式的极限分布也是多元正态分布。因此，本章先用较大篇幅来讨论多元正态变量的一些特征及多元正态样本函数的一些性质；同时针对后面章节的需要，还讨论在多元质量控制中常用的一些统计概念和方法。

“工欲善其事，必先利其器。”建议对多元分析不够熟悉的读者，务必先阅读本章介绍的预备数学知识，为顺利研究以后各章打好基础。

下面依次介绍：随机向量及其矩；多元正态分布；多元样本矩；多元总体的均值与协差阵估计；多元统计中常用的统计量及其分布；多元正态性检验；Bonferroni 不等式；剔除异常多元数据的一般方法。

第一节　随机向量及其矩

在多元统计中我们研究的总体有 p 个指标，分别用随机变量 $x_1,x_2\cdots,x_p$ 表示，写成向量形式，令 $X=(x_1,\cdots x_p)'$ (其中“′”表示

转置)，则 X 即为 p 维随机向量*。我们先介绍一般分布的随机向量矩的定义及性质。由于研究多元正态分布要用矩阵，因此也要介绍本书后面用到的一些矩阵的知识。

一、随机向量的矩及其性质

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots x_p)'$ 是 p 维随机向量，设它的每个分量的均值(数学期望)存在，即 $E(x_i)=\mu_i, i=1,2,\cdots p$，定义随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的均值向量为

$$E(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}E(x_1)\\E(x_2)\\\vdots\\E(x_p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_p\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

记 $E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots\mu_p)'$，称 $\boldsymbol{\mu}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的均值向量，它也是 p 维的。

如果随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的每个分量的方差存在，$D(x_i)=\sigma_i^2=\sigma_{ii}, i=1,\cdots p$，这时任意二分量的协方差也存在，记 $COV(x_i,x_j)=\sigma_{ij}, i,j=1,2,\cdots,p$，则定义随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}D(\mathbf{X})&=E\{[\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})][\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})]'\}\\&=\begin{pmatrix}D(x_1) & COV(x_1,x_2) & \cdots & COV(x_1,x_p)\\COV(x_2,x_1) & D(x_2) & \cdots & COV(x_2,x_p)\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\COV(x_p,x_1) & COV(x_p,x_2) & \cdots & D(x_p)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p}\\\sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp}\end{pmatrix}=(\sigma_{ij})\end{aligned} \tag{1.2}$$

记 $D(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\Sigma}$，它是 $p\times p$ 阶矩阵，简称协差阵。由定义知它是对称

---

* 注：在本书中，向量和矩阵一律用黑体；随机变量用大写体或小写体，其取值一律用小写体。

矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}'$，而且它是非负定矩阵。

设

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{COV(x_i,x_j)}{\sqrt{D(x_i)}\sqrt{D(x_j)}}=\dfrac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} & i\neq j,i,j=1,2,\cdots p\\ 1 & i=j\end{cases}$$

r_{ij}称为随机变量 x_i,x_j 的相关系数，且$|r_{ij}|\leqslant 1$。设

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & r_{12} & \cdots & r_{1p}\\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{R}$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的相关系数矩阵，简称相关矩阵。由定义知 $\boldsymbol{R}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$，且非负定。

相关矩阵与协差矩阵有如下关系

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p\end{pmatrix}\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

或

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_p}\end{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_p}\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

下面介绍随机向量矩的一些运算性质。

我们知道随机变量 ξ 的均值、方差有如下性质，设 a 为一常数，则有

$$E(a\xi)=aE(\xi)$$

$$D(a\xi)=a^2D\xi=aD(\xi)a'$$

类似的性质对随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的均值、协差阵也成立。

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times p$ 阶矩阵，则有

$$E(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X}) \tag{1.6}$$

$$D(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{A}D(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}' \tag{1.7}$$

(1.6)式很易验证,现证(1.7)式。设 $E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\mu}$,按定义

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{AX}) &= E[(\boldsymbol{AX} - E(\boldsymbol{AX}))(\boldsymbol{AX} - E(\boldsymbol{AX}))'] \\ &= E[(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A\mu})(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A\mu})'] \\ &= E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}'] \\ &= \boldsymbol{A}E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}D(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}' \end{aligned}$$

二、有关矩阵的一些知识

1. 正定矩阵

任何随机向量,如果它的协方差矩阵存在,一定是对称的非负定矩阵。因此学习多元统计需掌握正定矩阵的一些知识。

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $p\times p$ 阶矩阵,如果对任何向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_p)'$,二次型

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}\geqslant 0$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为非负定矩阵,如果只有当 $\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0)'$ 时,上式等号才成立,称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。非负定矩阵记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$,正定矩阵记作 $\boldsymbol{A}>0$。我们限于介绍正定矩阵。

正定矩阵有下述性质。

(1)$\boldsymbol{A}>0$,存在正交矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$,($\boldsymbol{\Gamma}'=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$)使

$$\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{A\Gamma}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

其中 $\lambda_i>0$,$i=1,\cdots,p$,λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

(2)$\boldsymbol{A}>0$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BB}' \tag{1.9}$$

证明:由(1.8)式,令

$$\boldsymbol{D}_\lambda=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{\Gamma}')^{-1}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \\ &= \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}'\end{aligned}$$

令　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda$,则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$$

(3)$\boldsymbol{A}>0$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{C}>0$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2 \tag{1.10}$$

证明,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}'=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$

令　$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{D}_\lambda\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$,则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}\quad 即\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2$$

这时定义　$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{C}$,

(4)$\boldsymbol{A}>0$,存在下三角矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \tag{1.11}$$

证明:$A=(a_{ij})$为正定矩阵,对任何 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_p)'$

$$\begin{aligned}f(x) &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \\ &= \sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P}a_{ij}x_ix_j\end{aligned}$$

可用配方法,把上式代为

$$\begin{aligned}f(x) &= (b_{11}x_1+b_{21}x_2+\cdots+b_{p1}x_p)^2+(b_{22}x_2+\cdots+b_{p2}x_p)^2 \\ &\quad +\cdots+b_{pp}^2x_p^2 \\ &= (x_1\cdots x_p)(b_{ij})(b_{ij})'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中　$\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\begin{pmatrix}b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \cdots & \cdots & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp}\end{pmatrix}$

即为下三角矩阵。

2. 分块矩阵代数运算

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\underset{n\times m}{\boldsymbol{A}}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & m-s \end{array} \end{array}$$

这里 $\boldsymbol{A}_{11}=(a_{ij})$ 为 $r\times s$ 阶矩阵，$i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,s$

$\boldsymbol{A}_{12}=(a_{ij})$ 为 $r\times(m-s)$ 阶矩阵，$i=1,\cdots,r;j=s+1,\cdots,m$

$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{ij})$ 为 $(n-r)\times s$ 阶矩阵，$i=r+1,\cdots,n;j=1,\cdots,s$

$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{ij})$ 为 $(n-r)\times(m-s)$ 阶矩阵，$i=r+1,\cdots,n;j=s+1,\cdots,m$

(1)分块矩阵运算

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times m$ 阶矩阵，作了同样大小的分块。

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & m-s \end{array} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & m-s \end{array} \end{array}$$

则有

① $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

② $$c\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} c\boldsymbol{A}_{11} & c\boldsymbol{A}_{12} \\ c\boldsymbol{A}_{21} & c\boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{其中 } c \text{ 为常数} \tag{1.13}$$

③ $$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}'_{11} & \boldsymbol{A}'_{21} \\ \boldsymbol{A}'_{12} & \boldsymbol{A}'_{22} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

(2)分块矩阵的逆

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times l$ 阶矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$ 相应地分块，使得分块后相应块的乘积有意义，即：

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & m-s \end{array} \end{array} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} s \\ m-s \end{array} \\ \begin{array}{cc} t & l-t \end{array} \end{array}$$

则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

上述分块矩阵运算规则告诉我们:分块矩阵运算中只要分块分的恰当,每个块可以当作“元素”,象矩阵不分块时一样进行运算就可以了,又因为子块是矩阵,做乘法运算时,子块的顺序不能颠倒。

我们利用分块矩阵乘法的性质,可以推出分块矩阵的逆、分块行列式及一些很有用的公式。

① 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵

$$\underset{n\times n}{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\text{而且}\,|\boldsymbol{A}_{11}|\neq 0$$

则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{pmatrix}\tag{1.16}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为相应阶单位矩阵。

② 设同①,若 $\boldsymbol{A}$ 的逆存在,$|\boldsymbol{A}_{11}|\neq 0$,则有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ -\boldsymbol{I}\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})^{-1}(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1},-\boldsymbol{I})\tag{1.17}$$

或 $|\boldsymbol{A}_{22}|\neq 0$,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1}(-\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1})\tag{1.18}$$

(1.17)(1.18)式可利用(1.16)式两边求逆直接验证。

③ 设 $\boldsymbol{D}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵可逆,$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'$,$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)'$,则有

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}/(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\tag{1.19}$$

特别有

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\beta\beta}')^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\beta\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}/(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\beta}) \qquad (1.20)$$

证明:设 $\boldsymbol{A}$ 为$(n+1)\times(n+1)$阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11} & \cdots & d_{1n} & \alpha_1\\ d_{21} & \cdots & d_{2n} & \alpha_2\\ \vdots & & & \vdots\\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} & \alpha_2\\ \beta_1 & \cdots & \beta_n & -1\end{pmatrix}$$

由(1.17)及(1.18)式 A^{-1}为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ -1\end{pmatrix}(-1-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha})^{-1}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1},-1)$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{\beta}'\end{pmatrix}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}(-\boldsymbol{I}_n,-\boldsymbol{\alpha})$$

取上二式左上角上的子块,令其相等得

$$\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}/(-1-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}$$

即 $$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}/(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

上式中令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,则得

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\beta\beta}')^{-1}=\boldsymbol{D}^{-1}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\beta\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}/(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\beta})$$

④ 利用分块矩阵求逆公式可以求得行列式的一些有用公式:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{11}|\,|\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}| \quad (|\boldsymbol{A}_{11}|\neq 0) \qquad (1.21)$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{22}|\,|\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}| \quad (|\boldsymbol{A}_{22}|\neq 0) \qquad (1.22)$$

设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 $n\times n$ 方阵,可逆,$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)'$,

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{\beta}'\\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\Sigma}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{\Sigma}|\,|0+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\Sigma}|\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$