陀螺仪理论和设计

P. H. 萨维特 编

英 哲、文 钊 译

科 学 出 版 社

1 9 7 7

内 容 简 介

本书叙述了陀螺仪理论及设计中的一些问题．书的前半部分主要叙述陀螺仪表及导航系统的原理，后半部分讲述高精度导航用陀螺仪的设计问题．

本书可供陀螺仪及惯性导航系统的研究和制造人员以及高等院校仪表专业师生参考．

P. H. Savet

GYROSCOPES: THEORY AND DESIGN

With Applications to Instrumentation, Guidance, and Control

McGRAW-HILL, 1961

陀螺仪理论和设计

P. H. 萨维特 编

英 哲、文 钊 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1977 年 2 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1977 年 2 月第一次印刷　　印张：15 3/8 插页：1

印数：0001—5,600　　字数：348,000

统一书号：13031·494

本社书号：734·13—2

定价：1.60 元

译 者 的 话

陀螺仪应用在舰艇上、飞机上已有很多年了．近年来，随着导弹、卫星、飞船、核潜艇的飞速发展，自足式制导、控制系统对陀螺仪的精度、可靠性、小型化、长寿命提出愈来愈高的要求，所谓惯性品质的陀螺仪就是在这种情况下产生的．由于要求的不断提高，惯性品质的陀螺仪元件，它的设计、制造以及对它作出评价的试验方法等方面近几年来都增加了很多新的内容．

原书出版于 1961 年．今天看来，本书没有能把六十年代以来陀螺仪的一些新内容包括进去，如静电支承的自由转子式陀螺仪、动力调整陀螺仪、数码式的讯号输出，等等．但是，本书对陀螺仪的基本原理、具体陀螺仪的组成、陀螺仪在各种类型系统中的应用，论述得清楚易懂，特别是对陀螺仪元件、构件的设计方法、制造工艺等方面叙述得较详细．因此，本书对目前从事这方面工作的同志仍具有参考价值．

毛主席教导我们：“**对于外国文化，排外主义的方针是错误的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借镜；盲目搬用的方针也是错误的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化．**”希望同志们根据我国的实际情况，对本书批判地阅读，取其精华，弃其糟粕，才能产生有益的作用．

由于译者对陀螺仪表方面的学识有限，译文难免存在错误，希望同志们批评指正．

序　言（节 译）

陀螺仪表学(即陀螺仪的制造以及它在各种系统中的应用)是一门科学，也是一门技术．从理解陀螺仪和其他仪表之间的关系这个意义来看，它是一门科学；从使陀螺仪达到现代应用中所要求的高性能指标的制造方法来看，它是一门技术．

本书是陀螺仪技术的一本入门书，而在某种程度上也是一本参考书．这一学科的内容如此广泛，以致在编写这类书籍时必定有所删节．本书也不例外，而且没有必要说明这些删节是有意的、慎重的，因为从无数的应用中，我们进行了选择，使本书的内容限于那些先进的、现代的和对于某些系统有代表性的领域，在这些系统中所涉及的不是任何一般的陀螺仪，而是那些特殊的高精度的陀螺仪．在仪表的应用方面，我们在军事保密许可的范围内，选择了垂直稳定器、陀螺罗盘和惯性制导系统．其他一些重要的应用，主要由于本书篇幅的限制，只得故意放弃．

然而，虽然思想上明确了高精度陀螺仪的应用，要是我们不着重强调对机械设计和电工设计的种种考虑，本书的内容就肯定会是片面的．严格地遵守，还是忽视这些考虑(和许多其他过程)将有很大的差别：严格地遵守上述考虑就能成功地设计出一个具有惯性品质的陀螺仪，否则，只能做出性能低得多的仪表．

这些考虑是编排本书内容的基础．前三章是属于理论性的，并且对旋轮(任何现有设计中的陀螺实质上就是旋轮)的力学作了初步介绍．接着一章讨论约束，它是把陀螺元件运

用到一仪表中去的基础（然而，依然是理论性的）．这种运用当然从组件的水平出发，并且根据进动自由度的数目，在历史上形成了两种不同类型的陀螺仪．

关于垂直稳定系统和子午线寻找系统诸章，介绍了自从Anschütz, Schuler, Brown, Sperry 和 Arma 等人开拓工作以来提供的第一批应用，如果考虑到所经历的年代，仅就工程学上的成熟程度来说，这些应用可能也是最重要的项目了．的确，从这些开拓者第一次企图利用地球在空间的转动来获得北向瞄准，或者用今天已经众所周知的舒勒调整来模拟重力场曲率以来，已经过去了四十多年了．紧接着论述惯性制导基础的两章具有更多的现代意味．

最后四章的内容是实用性的，并且密切联系到具体的陀螺元件，它的设计、性能、机械的和电工的特性以及对它们的评价．我们深深地感到，这些章节可能对初入门的陀螺仪读者（他们容易偏重于宇宙航行中的应用）不是那么有吸引力，但对那些从事制造具有高性能和高度操作可靠性的陀螺仪的读者来说，确实会有吸引力的．

读者要具备的水平不需超过坚实的、全面的工程学知识和某些向量微积分与算子转换的基础知识．此外，为了复习这些学科，在第一章中提供了一些有关的知识．读者会发现，本书有一些独特之处，介绍设计的诸章（9—12 章）占了本书很大的篇幅．在有关应用方面的显著特点中，应该指出的有：飞行器在东西方向上的速度对于罗盘寻找子午线的能力没有影响，即使飞行器是以地球的速率飞行，就是说，它相对于惯性空间是静止不动时，也是如此；在实际建立舒勒调整时，重力敏感和地球曲率出现的方式；以及在惯性制导章节中所提到的误差分析，虽然简单了些，但是具有启发性．

对于前面曾列出的那些有意删节的内容上，还应该增加

两项：第一项略带哲理意味，并且涉及到用近代物理理论，特别是在原子的尺度上所形成惯性空间及其概念．第二项关系到企图制造不依赖于具体转轮的“非习用”的陀螺仪．我们认为：第一项从它本身来看是很吸引人的，但从目前技术水平来看，还没有实用意义，也就是说还没有工程上的结果．而第二项和习用的仪表比较，目前还未能达到任何定型成品的阶段和相应的性能．

P. H. 萨维特（Savet）

目　　录

第一章　向量和运算微积分概论

P. H. 萨维特 (Savet)

符　　号

x, y, z = 直角坐标系的轴

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ = 沿 x, y, z 轴的单位向量

$\boldsymbol{u}$ = 单位向量

α, β, γ = 向量对 x, y, z 轴的方向余弦

γ, θ, z = 柱坐标系

$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}$ = 定义于上述坐标系中的单位向量

γ, φ, λ = 球坐标系

$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ = 定义于上述坐标系中的单位向量

∇ = 哈密尔顿微分算子

V_E = 向东的速度

V_N = 向北的速度

V_V = 垂直速度

$\boldsymbol{\omega}$ = 角速度向量

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ = $\boldsymbol{\omega}$ 向量在 x, y, z 轴上的投影

g = 重力加速度

$p = d/dt$ = 赫维赛德算子

S = 拉普拉斯变换中的算子

1.1 引　言

应用数学是一种工具，本书将从这样一个观点来介绍它．概括地说，按照我们目前的需要，应用数学可以视为一种定量的语言，表达陀螺（作为系统中的一个元件或一个组成部分）工作过程中诸量的关系．而且，数学提供了一种表达方法，经过推导以后，它可以直接用公式表述新的思想．本章正是根据这样一个观点来写的．

本书中，分析陀螺仪所用到的数学水平，不超过向量微积分和运算变换的基本原理．因此，我们的注意力主要在于扼要地介绍这些方面的基本原理，但又稍为超过这一范围．因为感到，要精通任何技术，包括掌握基本数学工具在内，均需要通晓高于实际运用中直接用到的知识．

1.2　向量的定义

向量不只是一种新的标志量的方法，也不只是一种表示已知公式的更为简洁的方法．

向量第一次区别了两种不同的量，即"无方向性的"量或称标量，以及"有方向性的"量或称向量．体积、温度、熵、质量、密度和动能等物理量属于标量，而速度、加速度、力、磁场、角动量等概念属于向量．

标量用代数数值（不一定是正的）来表示，例如，5 呎^3，$-20°F$，2 达因·厘米等，而向量则用一绝对量和空间一方向结合起来表示．例如，说明 30 呎/秒的速度时，除要读出这一量以外，还要为它规定一个方向，例如，沿直角坐标系 OY 轴的正方向等．

表示向量的方法有好几种．一种方法是用直角坐标系轴上的三个投影来表示．这些投影方向各不相同，各有一起点和一端点．用“向量法”将三个投影相加(即将第二个向量的起点置于第一个向量的端点，然后再将第三个向量的起点置于第二个向量的端点）就重新得出由它的三个投影规定的原来的向量．向量通常用黑体字来表示,例如 $\boldsymbol{V}$,或用 $\mathbf{V}$, $\bar{V}$ 来表示．向量还可用三轴上的投影来表示．采用向量代数的运算方法,它们之间的关系式如下：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_x+\boldsymbol{V}_y+\boldsymbol{V}_z \tag{1.1}$$

除此以外，还有一种直接表示向量的方法．这种方法利用向量的绝对值和方向来表示．方向是用在空间有适当取向的单位向量(即绝对值等于 1 的向量)来规定的．如果单位向量用 $\boldsymbol{u}$ 来表示,则

$$\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{u} \tag{1.2}$$

此处 V 表示 $\boldsymbol{V}$ 的绝对值．如果用沿直角坐标轴 OX，OY，OZ (图 1.1)的三个单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 来表示,则

$$\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{u}=V_x\boldsymbol{i}+V_y\boldsymbol{j}+V_z\boldsymbol{k} \tag{1.3}$$

把式(1.3)两边均除以标量 V,则得

$$\boldsymbol{u}=\frac{V_x}{V}\boldsymbol{i}+\frac{V_y}{V}\boldsymbol{j}+\frac{V_z}{V}\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

可以看出，在这一方程中并不涉及绝对值 V;事实上，在空间采用不同的标度因子对 $\boldsymbol{V}$ 及其在三轴上的投影具有同样的影响．由于比值 V_x/V, V_y/V 及 V_z/V 是对于标度的不变量,所以，这些比值具有隶属于单位向量 $\boldsymbol{u}$ 的内在的意义．这些比值称为 $\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{V}$ 的方向余弦,在文献中常用 α, β, γ 来表示．于是

$$\alpha=V_x/V \quad \beta=V_y/V \quad \gamma=V_z/V \tag{1.5}$$

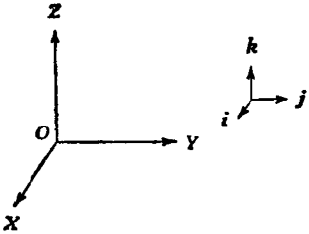

图 1.1

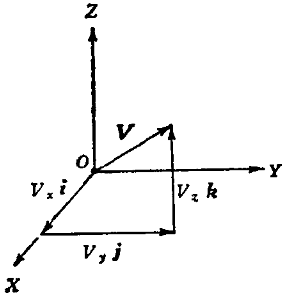

图 1.2

从几何学可知，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 \tag{1.6}$$

引入参考直角坐标系是很方便的，因为在本书中将经常利用直角坐标系上的投影．但是,要着重指出,引入参考直角坐标系也仅仅是为了方便．向量关系是一种不变的表达式，与选取的任何特定的参考坐标系无关．因此，解释向量关系时,参考坐标系可以不考虑．

另一重要的(常常默认的)特性是向量在(欧几里特)空间平行于它自身移动时,是一个不变量．在这一平移过程中,向量在坐标系上的诸投影并不改变;或者，换一种说法，在向量的定义中并不涉及向量的作用点,除非在某些特殊的场合,明确地说明需要考虑作用点时,才是例外．

1.3 两个向量的积

基本上，任何向量运算相当于与诸投影有关的一组联立代数运算．因此，似乎在本书中仅须得到一组联立运算的缩影就可以了．在某些情况下,可能是这样的；但是，一般地说

来，向量运算不仅是这样一种“重写”．当回忆一下向量的最后一个定义（即认为向量是一标量和一单位向量的结合）时，这一点就尤其明显．

研究单位向量 $\boldsymbol{u}$ 及一组三个单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的关系可知，式(1.5)中的方向余弦 α, β, γ 等于 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 上的投影．两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标量积或点乘的定义是

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cos\theta \tag{1.7}$$

此处 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角(图 1.3)． 可见

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.8}$$

由此可见，关于单位向量，应有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} &= \alpha \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j} &= \beta \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k} &= \gamma \end{aligned} \tag{1.9}$$

以及

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1 \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

想到两向量的标量积(结果为一标量)等于任一向量与第二个向量在其上的投影之积，似乎只要局限于单位向量的运算就能推导出向量的一切运算规则．这一观点还应用另一种乘积，称为叉乘或向量积来加以补充．两向量的向量积用 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 来表示，其结果为一新向量，其大小等于 $a \cdot b \cdot \sin\theta$，其方向为右手螺旋从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ $(0 < \theta < \pi)$ 旋转时螺旋的旋入方向．

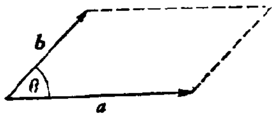

图 1.3

在地球上，如果 $\boldsymbol{a}$ 为赤道平面内的径向向量，被地球自转带至新的向量 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$（当转动小于 180° 时）的方向是沿地球自转轴由南到北．

用几何方法来表示，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模数代表图 1.3 中向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 及虚线为边所构成的平行四边形的面积．作为一个特例，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线($\theta=0$)，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\cdot b$，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$. 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直 ($\theta=\pi/2$)，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=a\cdot b$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向根据上述定义确定．

因为 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，所以我们也要记住

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{1.11}$$

总结这些结果，并应用于单位向量，则得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,\\
&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\\
&\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\\
&\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

这里要注意一件颇为有趣的事实．沿直角坐标两轴的两单位向量的向量积等于沿第三轴的单位向量．按照向量的定义来说，情况是这样的，然而，严格地说，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$ 等不是向量，而是一种特殊类型的张量．实质上，向量在空间所有的分量的数目等于在空间所具有的自由度的数目．例如，在四维连续系统中，沿各轴的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ 可以互相结合成六个向量积，而不是四个向量积；即 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_4$ 及 $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_4$. 普遍地说，在 n 维空间中，上述向量积的数目有 $n(n-1)/2$ 个．由于 $n=3$ 时，$n(n-1)/2$ 也等于 3，因此式 (1.12) 中向量的定义是可能的，也是合法的、无矛盾的．

根据以上规则，线性代数学中的基本运算法可以直接推广运用到向量或由向量导出的标量上．具体地说，交换律、结合律、分配律一般均能应用，但是要记住，在向量积的运算过程中，运算的次序很重要．因此，