数学基础知识丛书

直线与平面

顾观煦

江苏人民出版社

直线与平面

顾观煦

江苏人民出版社

直线与平面

顾观煦

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
淮海印刷厂印刷

1980年7月第1版
1980年7月第1次印刷
印数：1—85,000册

书号：13100·057　定价：0.42元

责任编辑　赵遂之　何震邦

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要，为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书一至四部分讲平面、直线及其相互位置关系，第五部分讲多面角与三面角，最后附有正多面体与欧拉定理。

目　　录

一、平　　面

初等几何分平面几何和立体几何两部分。前者所研究的对象是所有点都在同一平面内的几何图形。如果图形上的点不全在同一平面内，那么这种图形就叫做空间图形，研究空间图形的科学叫做立体几何学。

平面图形和空间图形都来源于生产和生活的实践。从具有一定形状的物体，加以比较、概括与抽象，才能构成图形的概念。譬如对于一个六角螺帽毛坯（图1—1），如果撇开它的一切物理性质，只研究它的形状、大小和各部分的位置关系，那就可以抽象得到一个**几何体**。这个几何体就是空间图形，它是物体占有空间的有限部分。它的表面是由矩形、正六边形、圆及圆柱面所组成的。其中除圆柱面是曲面外，其余各面都是平面图形。若要制造这样一个螺帽并计算它的体积，那么不仅要掌握它表面各部分图形的性质，还要研究它们相互间的位置关系，而且在设计中还要画出它的平面图，这些都与空间图形的性质有关。因此，我们对它有研究的必要。同时，空间图形的有关知识，也是学习高等数学的工具。为了向科学进军，使我国早日实现四个现代化的宏伟目标，更应学好这些基础知识。

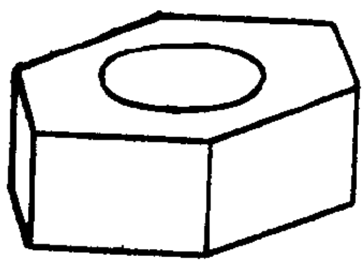


图 1—1

空间图形种类繁多，但总可以看作是点、线（包括直线

和曲线）、面（包括平面和曲面）等元素的组合．任何一个几何体都是被面所“包围”着，而点、线、面又依附于体而存在．它们是互相联系而不是彼此孤立的．但为了研究方便起见，需要把它们各自分别开来，先讨论较为简单而又与空间图形有密切关联的直线和平面，然后再进而研究较复杂的空间图形．

§1　平面的概念和性质

在日常生活中，许多物体的表面，例如平静的水面、平滑的玻璃面、平整的墙面等等，都给我们以平面的形象．正是由于这些形象在人们头脑里经过长期的反复，于是就形成了平面的概念．

在几何学中，平面是一个不予定义的原始概念，所以一般都是用具体的形象来描述平面的，但必须明确如下两点：

（1）任何对平面的形象的描述，仅是为了增强对它的感性认识，不能把这种描述误认为平面的定义．

（2）在现实世界中，我们所见到的平面的形象，不论是水面、墙面、玻璃面等等，它们的边界都是确定的，但是几何学里所指的平面，都是广阔无涯的．因此，在作图的时候，虽然通常是画一个平行四边形来表示一个平面，但仍应把它理解为可以向各方无限伸展的．

在空间我们接触到的面除平面外还有其它各种各样的面，如圆柱面、圆锥面、球面等等，它们各有不同的性质．人们在长期的生产实践中总结出平面的三条基本性质，我们把它作为立体几何的公理．这些公理既反映了点、直线和平面三个元素之间的联系，也是今后进行逻辑推理的依据．

公理1　如果一条直线上有两点在一平面内，那么这条直

线上所有的点都在这个平面内.

这时我们说**直线在平面内**或**平面过直线**（图1—2）.

如果一个面不是平面，一条直线过这平面内的任意两点，这条直线上所有的点并不都在这个平面内．例如图1—3中所画的曲面，虽然有无限多条互相平行的直线都在这曲面内，但直线 l 显然不在这曲面内．这就是曲面和平面的区别.

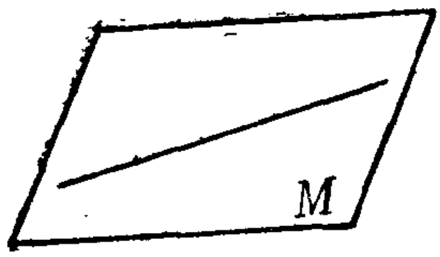


图 1—2

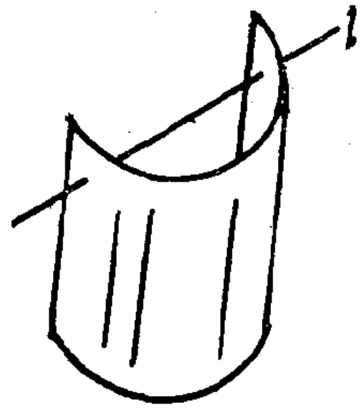


图 1—3

平面的这个特性，可以作为判断一个面是否是平面的依据，例如木工师傅为了检验一块木板是否刨平，常用角尺的一边在板面上任意移动，若看到角尺的边缘和板面之间有空隙，就说明板面不平；没有空隙，板面就是平的.

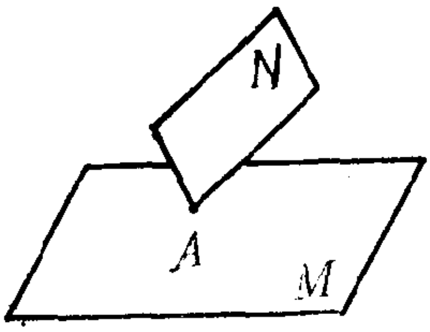
公理2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线.

这条直线叫做这**两个平面的交线.**

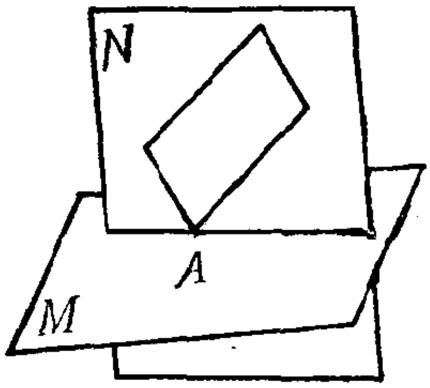
这条公理是说：第一，所谓两个平面相交，是指两个不重合的平面有公共点．第二，两个平面如果有公共点，那么公共点的个数不只是一个，而是有无数个．第三，两个相交平面的无数个公共点都在同一条直线上.

公理 2 所提出的平面第二个基本性质是很明显的，例如房屋的天花板和墙面的交界线、纸的折痕等等，都说明了两

个平面相交，它们的交线必定是一条直线。初学者可能会有一个疑问：如图 1—4a 中，平面M和N是否可能只相交于一个点A，而不是相交于一条直线？这只要明确平面M和N都是无限伸展的，那么就应该如图 1—4b 所示，平面M和N仍是相交于过A点的直线。



(a)



(b)

图 1—4

附带说明一下，根据公理 2，如果给定两个相交平面，那也就是给定了它们的交线。如果已知两个平面的交点，那么画交线时，必须经过这个交点。

公理3　不在同一直线上的三点确定一个平面。

在这条公理中，所谓“确定一个平面”是指“有且只有一个平面”，这里包含这个平面的存在性与唯一性，也就是说：“过不在同一直线上三点的平面是存在的，而且这样的平面是唯一的。”

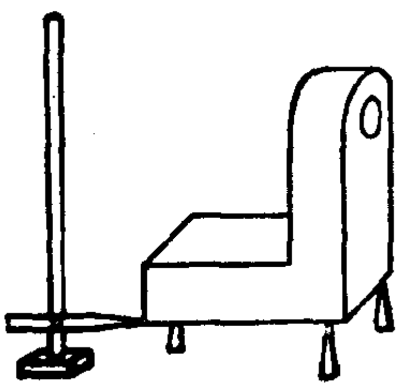


图 1—5

钳工师傅在工件上划线时，用三个千斤顶支住工件。通过对千斤顶顶尖高低的调整，就能确定工件的基准面（图1—5），它的理论依据就是这条公理。

在引用这条公理时，必须注意“不在同一直线上的三点”这个条件，如果只给定两点，或者虽给定三点，但这三点在同一直线上，都是不能确定一个平面的。例如在图1—6中，设给定A、B两点，我们可在A、B外任取一点C，由公理3可知过A、B、C三点确定一个平面P。若在平面P外再任取一点C_1，过A、B、C_1又可确定一个平面P_1。如此继续下去，由于空间有无数个点，所以过A、B两点的平面也可以有无数个。再者，如果给定在同一直线上的三点A、B、D，仍可用上述方法，先证明过A、B两点的平面可以有无数个，而D点在AB上，因此这无数个平面当然也过D点。从而证明了过A、B、D三点的平面也可以有无数个。所以都不能确定一个平面。

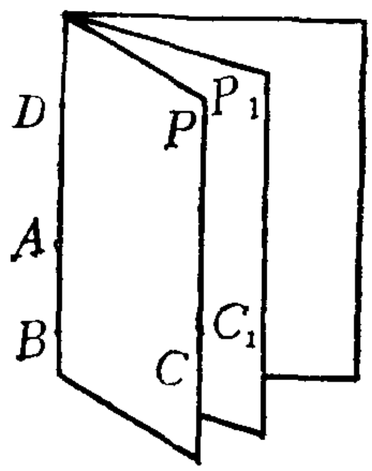


图 1—6

§2 平面的确定

在研究空间图形的时候，往往把其中某些图形先归结到某一个确定的平面内，然后用平面几何的知识来解决。因此如何确定一个平面？是一个极其重要的问题。

上节的公理3已经指出“不在同一直线上的三点确定一个平面”由这条公理还可导出三条推论，作为确定平面的依据。

推论1　过一条直线和这直线外的一点可以确定一个平面。

证明　设已知直线为l，直线外一点为A（图1—7）。

1. 证存在性

在直线 l 上任取 B、C 两点，∵ A、B、C 三点不在同一直线上，∴ 过 A、B、C 三点可以有一个平面 M（公理3）．∵ 直线 l 上有 B、C 两点在平面 M 内，∴ 平面 M 过直线 l（公理1），所以过直线 l 和 A 点的平面是存在的。

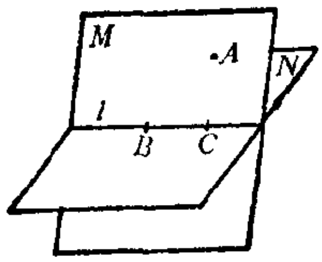


图 1—7

2. 证唯一性

假定过直线 l 和 A 点的平面除 M 外还另有一个平面 N，那么 A、B、C 三点也应在平面 N 内，这样，过不在同一直线上的三点 A、B、C 就有两个平面 M 和 N，这和公理3相矛盾，所以过直线 l 和 A 点的平面是唯一的。

推论2　过两条相交直线可以确定一个平面．

证明　设两条直线 l_1 和 l_2 相交于 A 点（图1—8）．

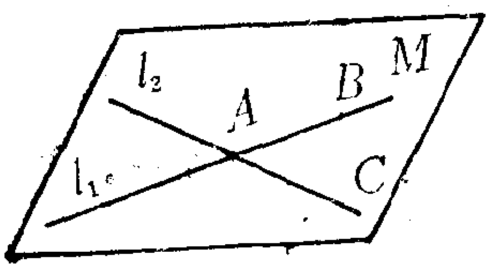


图 1—8

1. 证存在性

除 A 点外在直线 l_1 和 l_2 上各取一点 B 和 C．∵ A、B、C 不在同一直线上，∴ 过 A、B、C 三点可以有一个平面 M（公理3）．∵ 直线 l_1 上有 A、B 两点在平面 M 内，直线 l_2 上有 A、C 两点在平面 M 内．∴ 平面 M 过直线 l_1 和 l_2（公理1）．所以过直线 l_1 和 l_2 的平面是存在的。

2. 证唯一性

（和推论1的证明方法相仿，由读者自行证明。）

推论3　过两条平行直线，可以确定一个平面。

证明　设两平行直线为 l_1 和 l_2（图 1—9）.

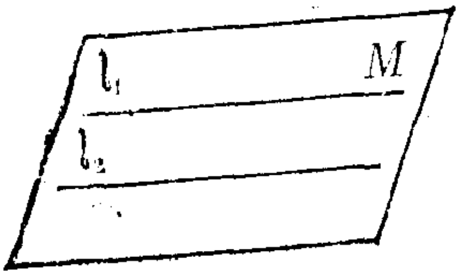


图 1—9

1. 证存在性

因为当两直线在同一平面内且不相交时，叫做平行线（平行线定义）所以过直线 l_1 和 l_2 的一个平面 M 必定是存在的。

2. 证唯一性

假定过直线 l_1 和 l_2 的平面除平面 M 外，还另有一个平面 N，这样过直线 l_1 和 l_2 上的一点就可以有两个平面 M 和 N，这和推论 1 相矛盾。所以过直线 l_1 和 l_2 的平面是唯一的。

例1　（1）空间有四个点，如果其中任何三点不在同一直线上，可以确定几个平面？

（2）如果将上述四点两两相连，再以所得线段的中点为顶点构成一个几何体，这个几何体有几个面？

（3）如果原来所给定的四点，两两距离相等，那么上述几何体的各面是什么图形？

解　（1）根据公理 3，在所给定的四点中任取三点，可确定一个平面，由组合公式：$C_4^3=4$。所以共可确定四个平面。

（2）设空间四点 A_1、A_2、A_3、A_4 两两相连，所得

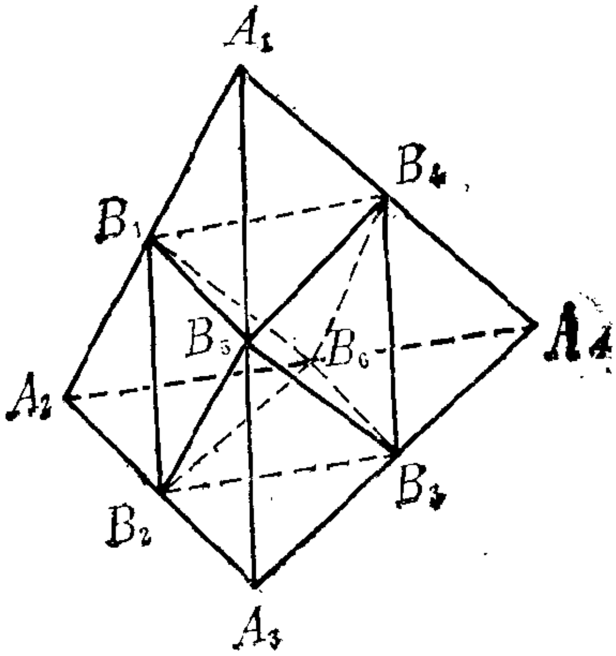


图 1—10

各线段中点为 B_1、B_2……B_6。以B_1、B_2……B_6为顶点所构成的几何体共有八个面（图1—10）。

（3）设 $A_1A_2=A_1A_3=\cdots\cdots=A_3A_4=a$。$\because \triangle A_1A_2A_3$在三点$A_1$、$A_2$、$A_3$所确定的平面内，而点$B_1$和$B_2$又分别是$A_1A_2$和$A_2A_3$的中点，$\therefore$ B_1B_2也在$\triangle A_1A_2A_3$所在的平面内（公理 1）。由平面几何三角形中位线定理可知：

$$B_1B_2=\frac{1}{2}A_1A_3=\frac{1}{2}a.$$

同理可证，这几何体各棱长都等于$\frac{1}{2}a$。

再根据三角形全等的判定定理可知这几何体的各面是全等的正三角形。

通过本例应该注意在下列情况下，我们可以利用平面几何的知识来解立体几何中的有关问题：

（1）如果能证明空间某个图形上的点都在同一平面内，那么，对于这个图形当然可以引用有关的平面几何定理（如本例引用三角形中位线定理求得$B_1B_2=\frac{1}{2}A_1A_3=\frac{1}{2}a$）。

（2）如果某些平面几何的定理在推导过程中，并不要求所涉及的图形必须在同一平面内，那么，对于这些定理可在立体几何中直接引用（如三角形全等的判定定理）。

例2 求证两两相交而不过同一点的四条直线必在同一平面内。

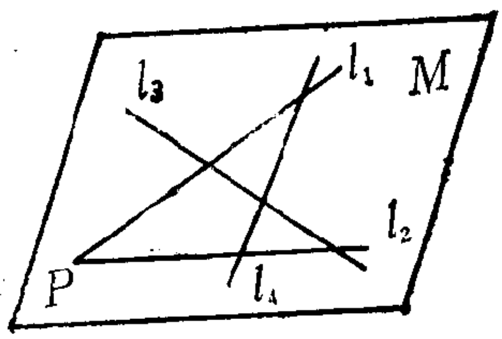


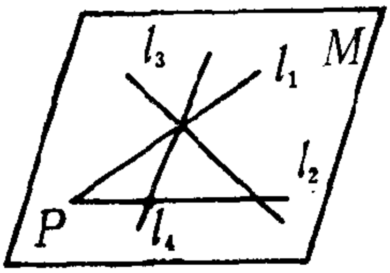
图 1—11

证明 设两两相交的四直线是l_1、l_2、l_3、l_4，其中l_1和l_2相交于点P（图1—11），l_1和l_2确定一个平面M（推论 2）。$\because$ 题

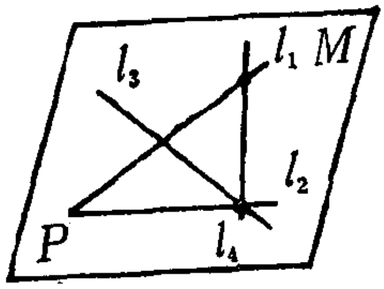
设这四条直线不过同一点，∴ l_3和l_4中至少有一条不过点P且分别和l_1、l_2相交(如果l_3和l_4都过点P，将与题设条件矛盾)．设l_3是不过点P且与l_1、l_2分别相交的直线，则l_3必在平面M内．

又∵ l_4和l_1、l_2、l_3都相交，应有三个交点，在这三个交点中，至少有两点是不重合的．

图 1—11 是表示l_4和l_1、l_2、l_3相交而三个交点各不重合的情况，但也可能如图1—12a或b的情况，不过此时仍有



(a)



(b)

图 1—12

两个交点不相重合(如果三个交点都重合，那只有当这四条直线都过点P的情况下才有可能，这和题设条件是矛盾的)．而这两个不相重合的交点都在平面M内，则l_4也必在平面M内．

∴ 这四条直线都在同一平面内．

例3 已知平面P和直线a只有一个公共点A，并且直线$b // a$（图 1—13）．求证平面P和直线b必有一个公共点．

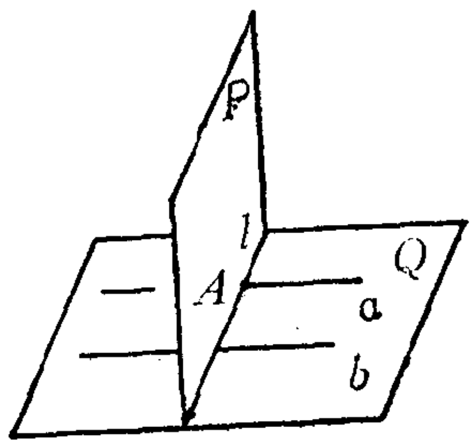


图 1—13

证明 ∵ $a // b$，∴ 过a

和 b 可以确定一个平面 Q（推论 3）．∵ A 点在 a 上，∴ A 点必在平面 Q 内．而 A 点又在平面 P 内，∴平面 Q 和平面 P 必相交于过 A 点的一条直线 l（公理 2）．

∵直线 l、a、b 都在平面 Q 内，且 l 和 a 有公共点 A．∴ l 和 b 必有一个公共点．

而 l 又在平面 P 内，因此平面 P 和直线 b 也必有一个公共点．

例4 （1）画图表示三个平面两两相交，并且交线平行．这样的三个平面把空间分成几部分？

（2）三个平面最多可以把空间分成几部分？画图表示之．

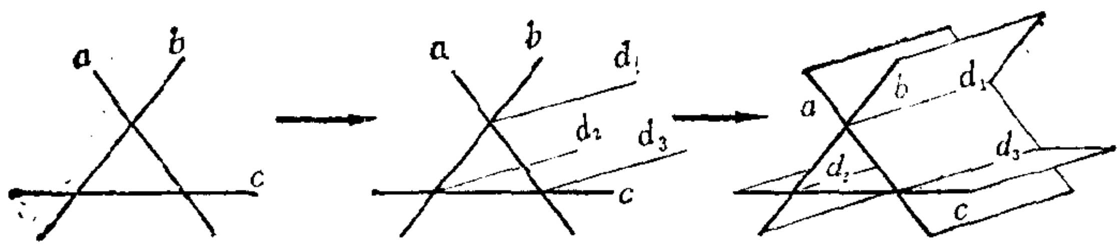
解 （1）按照题设条件，这两两相交的三个平面，可按如下步骤画图：

（Ⅰ）先画三条相交线段 a、b、c 表示三个平面的位置关系．

（Ⅱ）过交点画三条平行线段 d_1、d_2、d_3 确定三个相交平面的交线位置．

（Ⅲ）过线段 a、b、c 的端点画平行于交线的平行线段，完成表示平面的平行四边形（被遮盖看不见的线可以不画或画成虚线）．

显然，这样的三个平面把空间分成七部分（图1—14c）．



(a)　　(b)　　(c)

图 1—14

（2）因为两个平面最多可以把空间分成四部分，如图 1—15b，如果再增加一个平面，那么最多可将前面的每一部分各分成两部分。因此三个平面最多可将空间分成八部分，按照（1）中类似的步骤画图如下：

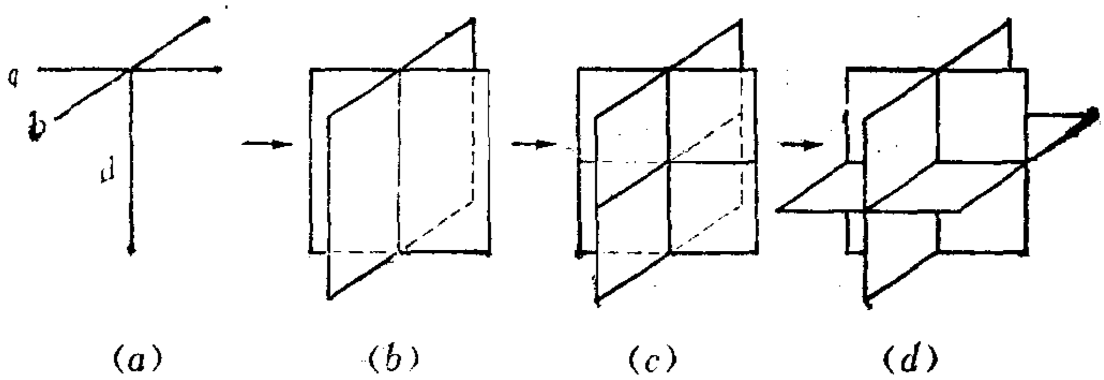


图 1—15

例5 不在同一平面内的四条线段，首尾相接，并且最后一条的尾端和最初一条的首端重合，这样组成的图形叫做空间四边形。

已知：平面四边形$A_1A_2A_3A_4$的四个顶点分别在空间四边形$B_1B_2B_3B_4$的各边上（图1—16），延长A_1A_2和A_4A_3相交于点K。求证：点K在空间四边形的对角线B_2B_3所在的直线上。

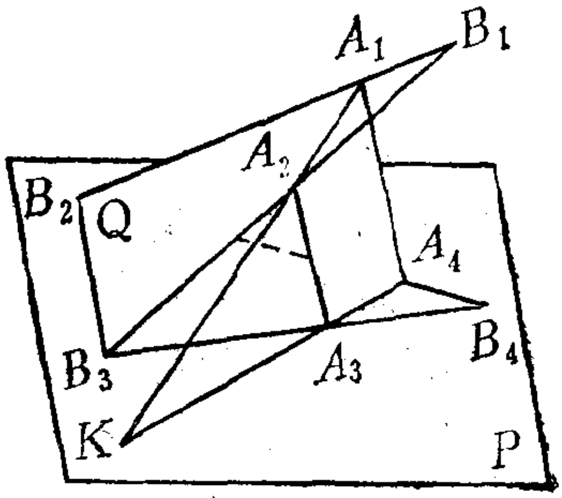


图 1—16

证明 ∵ A_4A_3在B_2B_4和B_3B_4所确定的平面P内，∴点K必在平面P内。

又A_1A_2在B_1B_2和B_1B_3所确定的平面Q内，∴ 点K也必在平面Q内。即点K是平面P和Q的公共点。

而B_2B_3所在直线是平面P和Q的交线，∴点K在B_2B_3的所在直线上(公理2)。

例6 各个面都是正方形的几何体叫做**正方体**或**立方体**。在棱长为a的正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中（图1—17），P、Q、R分别是棱CC_1、A_1D_1和A_1B_1的中点，画出过这三点的截面（即一个平面和几何体相交，它们的交线所组成的图形），并求这截面的周长。

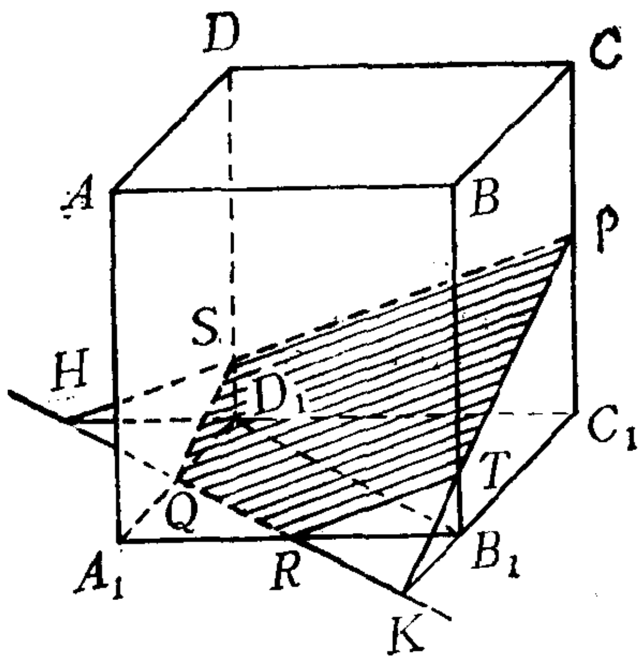


图 1—17

分析(1) 对于本题不能误认为所求的截面就是$\triangle PQR$，因为用一个过P、Q、R三点的平面去截这立方体，所得的截面应该和棱DD_1，BB_1都相交，所以截面应是五边形。

(2) 要画出这个截面，关键在于如何求得它和DD_1，BB_1的交点。

因为截面过点Q和R，所以直线QR必是截面和底面$A_1B_1C_1D_1$的交线。假设点T是所求截面和棱BB_1的交点，那么PT必是截面和侧面BB_1C_1C的交线，延长PT和C_1B_1延线相交于点K，则点K必是截面和底面的交点，所以点K必在直线QR上。所以要求得点T，可先求直线QR和C_1B_1的交点K，然后连结KP则KP与BB_1的交点就是所求的点T。

依同样方法可求得截面和DD_1的交点。