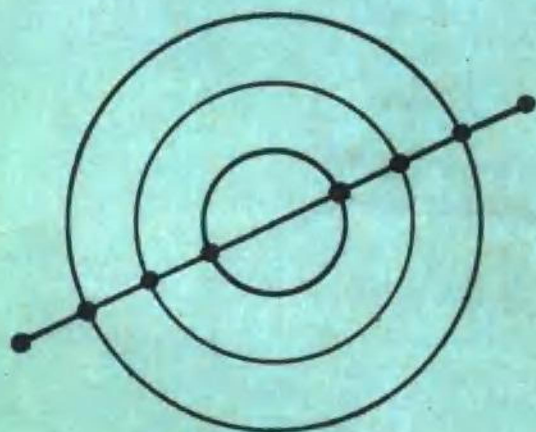
〔美〕赛穆尔·利夫舒茨 著
娄兴棠 译 柯大钧 校

离散数学

原理及题解



LISAN SHUXUE
YUANLI JI TIJIE

黑龙江科学技术出版社

离散数学原理及题解

〔美〕赛穆尔·利夫舒茨 著

娄兴棠 译 柯大诩 校

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

内 容 提 要

全书共十二章，介绍了离散数学领域中各分支的基本内容，包括集合论、关系、函数、图论、组合分析、代数结构、数理逻辑、有限自动机等基本概念和基本原理，并包括600道习题及解答。本书既可作为高等院校有关专业的教科书或教学参考书，也可供从事计算机等专业的科技人员自学参考。

责任编辑：翟明秋
封面设计：孙晓敏

离散数学原理及题解
LISAN SHUXUE YUANLI JI TIJIE

〔美〕赛穆尔·利夫舒茨 著
娄兴棠 译
柯大诩 校

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
长春科技印刷厂印刷 · 黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米16开本16.75印张380千字
1986年2月第1版 · 1986年2月第1次印刷
印数：1—5.800册
书号：13217 · 141 定价：2.95元

前　　言

离散数学，是现代数学的一个重要分支，是计算机科学基础理论的核心。离散数学以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素。因此，它充分体现了计算机科学离散性的特点。离散数学是随着计算机科学的发展逐步建立的。它形成于七十年代初期，是一门新兴的工具性学科。

赛穆尔·利夫舒茨所著《离散数学原理及题解》一书，既是一本专著，又是一本较好的教科书。其内容叙述深入浅出、简明扼要、通俗易懂。全书有600道题解，是一本极好的入门书。大学低年级学生，甚至有高中文化程度的科技人员都可以初步读懂。当然，本书也引入了不少较深的内容，使从事这一专业的教师阅后也有所裨益。全书共十二章，每章后面都给出了大量的习题，其中包括结合本章内容的计算机程序设计习题。书中对大多数习题都给出了详细的解答。

本书既可作为大学有关专业《离散数学》课程的教材，也可作为学生和教师的教学参考书，还可作为有关科技人员的自学参考书。

译者水平有限，译本中错误之处敬请读者批评指正。

译者　1984年9月

目　　录

第一章 集 合 论

§1·1 集 合 与 元 素

集合的概念出现在所有的数学分支中．所谓集合就是一个有明确意义的事物的汇集，用大写字母A，B，X，Y，…来表示．集合所包含的事物称为元素或元，用小写字母a，b，x，y，…来表示．语句“p是A的元素”或者“p属于A”表示为

$$p \in A$$

$p \in A$的否定表示为

$$p \notin A$$

当一个集合的全部元素给定后，这个集合就完全确定下来．这通常被描述为外延性原理．

外延性原理 当且仅当两个集合A和B具有相同元素时，则两集合相等．

如果集合A和B相等，写成$A = B$；如果集合A和B不等，写成$A \neq B$．

基本上有两种方法表示某个特定的集合．一种是列表，例如，

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

表示集合A，它的元素是字母a，e，i，o，u．注意，元素间用逗号分隔，全部元素用花括号{ }括起来．另一种方法是描述集合里元素具有的特性，例如，

$$B = \{x：x是整数，x > 0\}$$

被读作“B是能使x是整数，且$x > 0$的全部元素x的集合”，它表示其全部元素皆为正整数的集合B．通常x用于表示集合的一个典型元素；冒号被读作“能使”；逗号读作“且”．

例1·1

（a）上述集合A也可以写为

$$A = \{x：x是英文字母，且x是元音字母\}$$

可以看出$b \notin A$，$e \in A$和$P \notin A$．

（b）我们不能列出上述B集合的全部元素，但是常常用

$$B = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

来说明这个集合，可以看出$8 \in B$但$-6 \notin B$．

（c）使$E = \{x：x^2 - 3x + 2 = 0\}$．换句话说，集合E是由方程$x^2 - 3x + 2 = 0$的解组成的，有时称给定方程解的集合．由于方程的解是1和2，我们也可把集合写为

$$E = \{1, 2\}$$

（d）使$E = \{x：x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$F = \{2, 1\}$和$G = \{1, 2, 2, 1, 6/3\}$，则$E = F = G$．由此可见，一个集合并不取决于它的元素的呈现方式．如果一个集合的元素重

复出现或重新排列，那么集合仍保持不变。

我们将使用下列符号表示不同集合：

N = 正整数的集合：1，2，3，…

Z = 整数的集合：…，－2，－1，0，1，2，…

Q = 有理数的集合

R = 实数的集合

C = 复数的集合

对于集合的描述，只有当集合包含少数的元素时，才通过列元素表的方法来描述。否则，可通过集合所包含元素的特性来描述集合。在有些情况下，即使能够列出集合的元素表，这样做也是不实际的。例如，我们不会去列出全世界1978年出生的所有人的名单，虽然从理论上讲编辑这样的名单是可能的。

根据性质来描述一个集合，被叙述为抽象原理。

抽象原理 给定任一集合U和任一性质P，则有某一集合A，其元素恰好是U中具有性质P的那些元素。

§1·2 全集 空集

在集合理论的应用中，我们会看到，所要讨论的所有集合的成员通常都属于一个固定的大集合，该集合称为全集。例如，在平面几何里，全集由平面上的所有点组成。在人口学中，全集由世界上所有的人组成。一般使用符号

$$\mathbf{U}$$

来表示全集。

对于一个给定的集合U和一个性质P，也可能出现下列情况，U集合中不存在任何具有性质P的元素。例如，有一个集合

$S=\{x: x$ 是一个正整数，$x^2=3\}$该集合中不存在任何元素，因为没有任何一个正整数具有所要求的性质。

没有元素的集合称为空集，用符号

$$\varnothing$$

来表示。由外延性原理可知，只有一个空集，亦即如果S和T是两个空集，那么$S=T$，因为它们都没有元素。

§1·3 子 集

如果集合A中的每一个元素也是集合B中的一个元素，那么A被称为B的子集。也可说，A包含于B或者B包含A，可写为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

如果A中至少有一个元素不属于B，则A不是B的子集，可写为

$$A\not\subset B \quad 或 \quad B\not\supset A$$

例 1·2

（a）假设有集合

$$A=\{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \qquad B=\{1, 2, 3, 5, 7, \}$$
$$C=\{1, 5\}$$

那么$C\subset A$，$C\subset B$，因为C的元素1和5也是集合A和B的成员．但$B\not\subset A$，因为B的某些元素2和7不属于A．此外，因为集合A，B和C也必须属于全集U，所以我们得知U至少必须包含集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$．

（b）对于在§1·1定义的**N**，**Z**，**Q**和**R**，可知

$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$

（c）集合$E=\{2, 4, 6\}$是集合$F=\{6, 2, 4\}$的子集，因为每个数2，4和6既属于E也属于F．事实上，$E=F$．利用类似的方法可知，任何一个集合都是它自身的子集．

每丨个集合A都是全集U的子集，因为A的所有元素都属于U，空集$\varnothing$也是A的子集．

同样，每一个集合A是它自身的子集，因为A的元素当然属于A．

如果集合A的每个元素属于集合B，且集合B的每个元素属于集合C，那么A的每个元素属于C．换句话说，如果$A\subset B$且$B\subset C$，则$A\subset C$．

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则A和B具有相同元素，即$A=B$．反之，由于每个集合是它自身的子集，如果$A=B$，则$A\subset B$且$B\subset A$，我们以定理的形式叙述如下：

定理 1·1

（i）对任意集合A，我们有$\varnothing\subset A\subset U$．

（ii）对任意集合A，我们有$A\subset A$．

（iii）如果$A\subset B$且$B\subset C$，那么$A\subset C$，

（iV）当且仅当$A\subset B$，且$B\subset A$时，则$A=B$．

如果$A\subset B$，那么仍有可能$A=B$，若$A\subset B$而$A\neq B$，我们说A是B的真子集．例如，如果

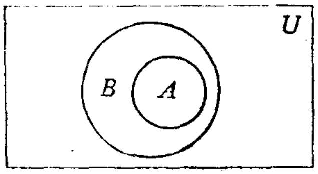
$$A=\{1, 3\} \qquad B=\{1, 2, 3\} \qquad C=\{1, 3, 2\}$$

则A和B同时是C的子集；但A是C的真子集而B不是C的真子集，因为$B=C$．

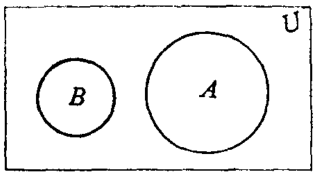
§1·4 文 氏 图

文氏图是利用平面上的点的集合给集合以图形表示．全集U用矩形面积表示，其他集合由放在矩形里的圆面积表示．如图1—1（a）所示，如果$A\subset B$，则表示A的圆面积将整个包括在表示B的圆面积之内．如图1—1（b）所示，如果A和B不相交，即没有公共元素，则表示A的圆面积和表示B的圆面积分离．

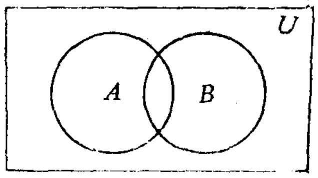
然而，如果A和B是两个任意集合，则可能，某些事物在A里而不在B里，某些在B里而不在A里，某些同时在A和B里，某些既不在A里也不在B里．如图1—1（c）所示．



(a) $A \subset B$



(b) A和B不相交



(c)

图1—1

§1·5 集合的运算

两个集合A和B的并是由A或B的所有元素组成的集合，记为$A\cup B$：这里"或"的意思是和/或。$A\cup B=\{x:\ x\in A 或 x\in B\}$.

两个集合A和B的交是同时属于A和B的元素组成的集合，记为$A\cap B$：

$$A\cap B=\{x:\ x\in A 和 x\in B\}$$

如果$A\cap B=\varnothing$，即如果A和B没有任何公共元素，则说A和B是不相交的。

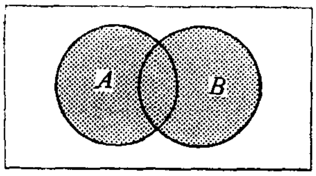
集合B对于集合A的相对补或简称为集合A和B的差，是属于A而不属于B的元素组成的集合，记为$A\setminus B$：

$$A\setminus B=\{x:\ x\in A,\ x\notin B\}$$

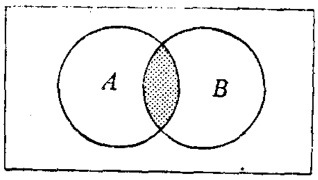
集合$A\setminus B$读作"A减B"，有些书用$A-B$代替$A\setminus B$。

如上所述，任何集合都是全集U的子集。集合A的绝对补或简称补，是属于U而不属于A的元素的集合，记为A^C：

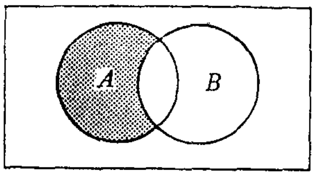
$$A^C=\{x:\ x\in U,\ x\notin A\}$$



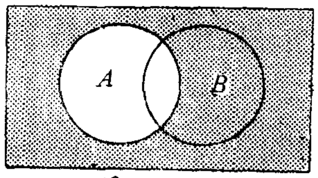
$A\cup B$ 为阴影部分



$A\cap B$ 为阴影部分



$A\setminus B$ 为阴影部分



A^C 为阴影部分

图1—2

即A^C是全集U与集合A的差。有些书把它记为A'。

我们用文氏图中的阴影部分分别说明上面的运算，集合$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$和A^C的文氏图如图1—2所示。

例 1·3 设$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \}$，$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，全集$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$为正整数的集合，则

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{3, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 2\}$ $A^C = \{5, 6, 7, \cdots\}$

下面的定理给出了集合的包含、交和并运算的关系。

定理 1·2 $A \subset B$，$A \cap B = A$，$A \cup B = B$是等价的。

（注：该定理的证明在习题1·21中，与$A B \subset$等价的其他条件在习题1·31中给出）

§1·6 集代数 对偶

集合的上述运算满足表1·1给出的各种定律，我们以定理形式叙述如下：

定理 1·3 集合满足表1·1给出的定律。

表1·1 集合代数的定律

幂等律	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
结合律	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
交换律	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
分配律	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = A \cap B) \cup (A \cap C)$
同一律	
5a. $A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
对合律	
7. $(A^C)^C = A$	
求补律	
8a. $A \cup A^C = U$	8b. $A \cap A^C = \varnothing$
9a. $U^C = \varnothing$	9b. $\varnothing C = U$
摩尔根律	
10a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	10b. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

我们讨论两种证明包含集合运算的等式的方法。第一种方法是对于客体 x 证明其为等式两边的元素。第二种方法是利用文氏图。例如，首先证明摩尔根定律

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

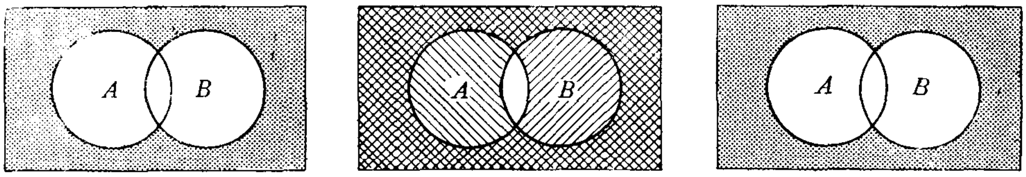
方法 1：我们首先证 $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$。如果$x \in (A \cup B)^C$，那么$x \notin A \cup B$。这样，$x \notin A$和$x \notin B$，所以$x \in A^C$和$x \in B^C$，因此$x \in A^C \cap B^C$。

接下去证明$A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$。设$x \in A^C \cap B^C$，那么$x \in A^C$和$x \in B^C$，所以$x \notin A$和$x \notin B$，因此，$x \notin A \cup B$，即$x \in (A \cup B)^C$。

我们已经证明了$(A \cup B)^C$的每个元素属于$A^C \cap B^C$，以及$A^C \cap B^C$的每个元素属于$(A \cup B)^C$，二者合起来表明集合具有相同的元素，即$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$。

方法2：由图1—2 $A \cup B$的文氏图可看出，$(A \cup B)^C$表示为图1—3（a）中的阴

影面积．为了找出$A^C \cap B^C$，我们使A^C的阴影为一个方向的斜线而B^C阴影为另一方向的斜线，如图1—3（b）所示．则$A^C \cap B^C$为交叉阴影线的面积，其阴影如图1—3（c）所示．由于$(A \cup B)^C$和$A^C \cap B^C$具有相同的阴影面积，所以它们是相等的．



(a) $(A \cup B)$ 为阴影部分　(b) A^C 为 //// 部分 B^C 为 \\\\ 部分　(c) $A^C \cap B^C$ 为阴影部分

图1—3

读者可能感到奇怪的是为什么表1·1中的恒等式都是成对出现的，例如2a和2b．我们现在来说明这个道理．假设E是集代数中的一个等式，E的对偶E*也是一个等式，它是通过把E中出现的$\cup$，$\cap$，U和$\varnothing$分别代之于$\cap$，$\cup$，$\varnothing$，U而得到的．例如，

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$$

的对偶式为

$$(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

可以看出，表1·1中的每对定律都是互为对偶的．集合代数的这一事实称为对偶原理．即如果任何等式E是一恒等式，则其对偶E*也是恒等式．

§1·7　有限集合　计数原理

如果一个集合含有恰好非负整数m个不同元素，则它是有限的，否则它是无限的．例如空集$\varnothing$和英语字母集合是有限的，而偶正整数的集合{2，4，6，…}是无限的．我们用n（A）表示有限集合A的元素数．

引理 1·4　如果A和B是不相交的有限集合，那么$A \cup B$是有限的，并且

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

证明：为了计算$A \cup B$的元素个数，首先计算在A里的元素数，有n(A)个．$A \cup B$的其它元素是在B里而不在A里．因为A和B是不相交的，B的元素不在A里，所以有n(B)个在B里而不在A里的元素．因此，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$．

定理 1·5　如果A和B是有限集合，则$A \cup B$和$A \cap B$是有限的，并且

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

由此可获得三个集合的相似公式：

推论 1·6　如果A，B和C是有限集合，则$A \cup B \cup C$也是有限的，且

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

用数学归纳法（见§1·10）可进一步推广这个结果到任意有限个数的集合．

例 1·4　假设一个学院在120名学生中有100名至少要学习法语、德语和俄语中的一

种．并假设：

65名学法语，45名学德语，42名学俄语，20名学法语和德语，15名学德语和俄语，15名学德语和俄语．

设F，G和R分别表示学法语、德语和俄语的学生的集合．希望求出学习所有三种语言的学生数，并在图1—4的文氏图的8个区域中分别填上正确的学生数．

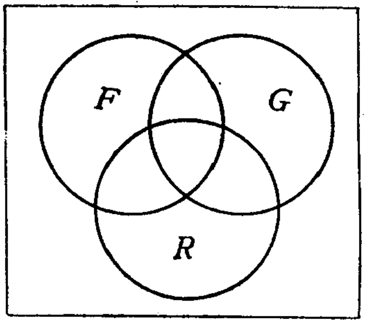


图1—4

根据推论1·6，

$$n(F\cup G\cup R)=n(F)+n(G)+n(R)-n(F\cap G)-n(F\cap R)-n(G\cap R)+n(F\cap G\cap R)$$

$n(F\cup G\cup R)=100$，因为有100名学生至少学习一种语言，所以有

$$100=65+45+42-20-25-15+n(F\cap G\cap R)$$

所以 $n(F\cap G\cap R)=8$，即8个学生学所有三种语言．

我们现在用这些结果去填文氏图，则有：

8名学所有三种语言，$20-8=12$名学法语和德语而不学俄语，$25-8=17$名学法语和俄语而不学德语，$15-8=7$名学德语和俄语而不学法语，$65-12-8-7=28$名只学法语，$45-12-8-7=18$名只学德语，$42-17-8-7=10$名只学俄语，$120-100=20$名不学任何一种语言．

据此画出的图如图1—5所示，可以看出有$28+18+10=56$名学生只学一种语言．

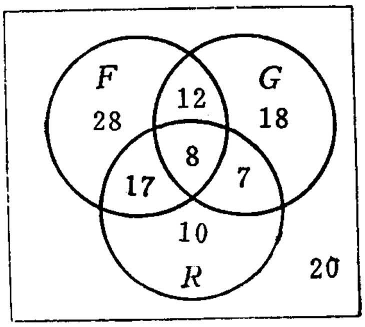


图1—5

§1·8 集合的类 幂集合

给定一个集合A，为知道它的某些子集，考虑一个集合的集合．为避免混淆，称其为集合的类或集合族．给定集合类中的某些集合，称为子类或子族．

例 1·5 假设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，设$\mathscr{A}$是A的子集的类，A的每个子集包含3个A的元素．那么

$$\mathscr{A}=[\{1, 2, 3, \}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4, \}, \{2, 3, 4\}]$$

$\mathscr{A}$的元素是各集合$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 4\}$，$\{1, 3, 4\}$和$\{2. 3, 4\}$．

设$\mathscr{B}$是A的子集的类，子集包含2和两个A的其它元素．则

$$\mathscr{B}=[\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4, \}, \{2, 3, 4\}]$$

$\mathscr{B}$的元素是各集合$\{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 4\}$和$\{2, 3, 4\}$．这样，$\mathscr{B}$就是$\mathscr{A}$的子类，因为$\mathscr{B}$的每一元素也是A的元素（为避免混淆，我们有时用中括号把集合的类括起来而不用

大括号)。

对于给定的集合A，A的所有子集的类称为A的幂集，并记为$\mathscr{P}(A)$。如果A是有限的，那么P(A)也是有限的。此外$\mathscr{P}(A)$的元素个数是2的n(A)次幂：

$$n(\mathscr{P}(A))=2^{n(A)}$$

为此，A的幂集有时被写为2^A。

例 1·6 设$A=\{1, 2, 3\}$，那么

$$\mathscr{P}(A)=[\varnothing\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A]$$

注意，空集$\varnothing$属于$\mathscr{P}(A)$，因为$\varnothing$是A的子集，同理A属于$\mathscr{P}(A)$。$\mathscr{P}(A)$有$2^3=8$个元素。

§1·9 论断与文氏图

许多论断句子可以变换为等价的可用文氏图表示的集合关系，因此文氏图常被用来判定论断的有效性。

例 1·7 考察下述的论断取自《阿丽思漫游奇境记》

S_1：我的锅是我仅有的白铁皮制品。

S_2：我发现你所有的礼物都是非常有用的。

S_3：我的锅没有一个是有用的。

S：你给我的礼物不是白铁皮制品。

这里横线上的句子S_1，S_2和S_3表示前提，横线下的句子S表示结论。我们要确定结论在逻辑上是否合理，即S是否是有效论断。

根据S_1，白铁皮制品被包含在锅的集合里，用文氏图如图1—6所示。

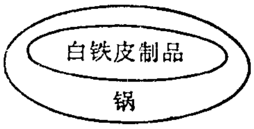


图1—6

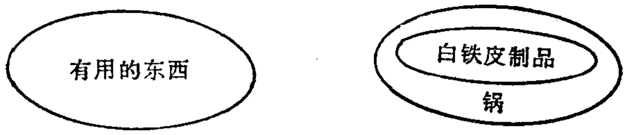


图1—7

根据S_3，锅的集合和有用东西的集合是不相交的。因此可画出图1—7；

根据S_2，"你的礼物"的集合是有用的东西集合的子集，因此可画出图1—8：

图1—8

由上面的文氏图可以看出，"你的礼物"的集合与"白铁皮制品"的集合是不相交的，显然结论是有效的。

§1·10 数学归纳法

在许多证明中常用的集合

$$N=\{1, 2, 3\cdots\}$$

具有如下的基本性质：

数学归纳法原理I 设P是定义于正整数集合N上的命题，即对于N中的每个n，P(n)或真或假．若P具有下面的性质：

(i) P(1)是真；

(ii) 无论何时P(n)若是真，P(n+1)也是真．则对每个正整数P是真．

我们将不去证明这一原理，事实上这个原理常常是作为公理给出的．

例 1·8 设P是前n个奇数的和为n^2的命题，即

$$P(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

(第n个奇数是$2n-1$，下一个奇数是$2n+1$)可看出当$n=1$时P(n)为真：

$$P(1): \quad 1=1^2$$

假设P(n)为真，我们在P(n)的两边同时加上$2n+1$得：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

即P(n+1)为真，亦即无论何时P(n)为真，P(n+1)也为真．根据数学归纳原理，对所有的n，P为真．

下述数学归纳法虽然形式不同，但实际上是等价的．用起来更方便些．

数学归纳法原理Ⅱ 设P是定义在正整数集合N上的命题，如：

(i) P(1)是真；

(ii) 无论何时对于所有$1\leqslant k<n$，P(k)是真时P(n)也是真

则对所有正整数P是真．

习　题(附解答)

1·1 下面的集合哪个是相等的：{r, t, s}，{s, t, r, s}，(t, s, t, r,)?

〔**解**〕它们都是相等的．因为元素的次序和重复并不改变集合．

1·2 列出下述集合的元素，其中$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$

(a) $A=\{x: x\in N, 3<x<12\}$

(b) $B=\{x: x\in N, x$是偶数$, x<15\}$

(c) $C=\{x: x\in N, 4+x=3\}$

〔**解**〕(a) A由3和12之间的正整数组成；因此$A=\{4,5,6,7, 8, 9,10, 11\}$

(b) B由小于15的偶正整数组成；因此

$$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

(c) 没有正整数满足条件$4+x=3$；因此C不包含任何元素．换句话说，$C=\varnothing$为空集．

1·3 证明$A=\{2, 3, 4, 5\}$不是$B=\{x: x\in N, x$是偶数$\}$的子集．

〔**解**〕我们要证明A中至少有一个元素不属于B，由于$3\in A$，而B是由偶数组成的集合，$3\notin B$；因此A不是B的子集．

1·4 考虑下述集合：

$\varnothing$，$A=\{1\}$，$B=\{1, 3\}$，$C=\{1, 5, 9\}$，$D=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$E=\{1,$