運籌學(作業研究)導論詳解

F. S. 希勒和 G. J. 利伯曼　原著
吴国基　黄国祥　译著

曉園出版社
世界图书出版公司

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉著習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徵的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

运筹学(作业研究)导论详解
F.S.希勒、G.J.利伯曼　原著
吴国基、黄国祥　译著
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街137号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1995年 6月第一版　开本：850×1168　1/32
1995年 6月第一次印刷　印张：21.75
印数：0001—500　字数：55万字
ISBN：7-5062-1771-6/O·122
定价：25.00元　(WB9312/6)

《运筹学丛书》编委会

目　　錄

第三章　線性規劃導論

1. 假設某人擁有6000元且欲作投資。根據此人的二個朋友告訴他，茲有二個投資機會，可成爲二個不同企業的股東。此兩種情況中，投資均會佔用此人明年夏天的時間且皆須投入金錢。若完全投資於第一個朋友的企業，須投入5000元與400小時的時間，而估計可獲得利潤4500元。若完全投資於第二個朋友的企業，則其相對應的數字爲4000元，500小時，而估計可獲得利潤4500元。又，此二個朋友皆允許此人可自由地投入任何比例的資金和時間（只要他願意的話），當然他所分享到的利潤則與他所投入的資金和時間成比例。

因此人亦正在尋找較有趣的夏天工作（但有時間限制爲600小時），因此他決定加入一個或兩個朋友的企業，亦或兩者的組合，如何決定才能使此人可獲得最大的利潤。爲求得最佳的組合，必須求解此問題。

(a)描述此問題與第3.1節中所討論的溫達玻璃公司的問題之間的類似性，然後就此問題建立與表3.2相似的表，並將資料填入，試指出此問題的活動與資源。

(b)就此問題製作線性規劃模式。

(c)以圖解法求此模式，試問總估計利潤爲何？

(d)說明爲何線性規劃的四個假設（3.3節）對此問題而言，似乎皆可滿足。其中是否有某個假設比其他的假設更有疑慮？若如此的話，則須再考慮什麼因素？

解：(a)　此問題即某人應用其有限的資金與時間進行投資，求取最大之利潤，因有二種企業可供選擇，所以與3.1節例的「產品組合」問題類似，爲一「資源投資組合」的問題。

可建立與表3.2相似之表如下：

資　源	企業1	企業2	可用資源量
資　金	5000	4000	6000
時　間	400	500	600
單位獲利	4500	4500	
組合變數	x_1	x_2	

此題的活動爲企業1，企業2

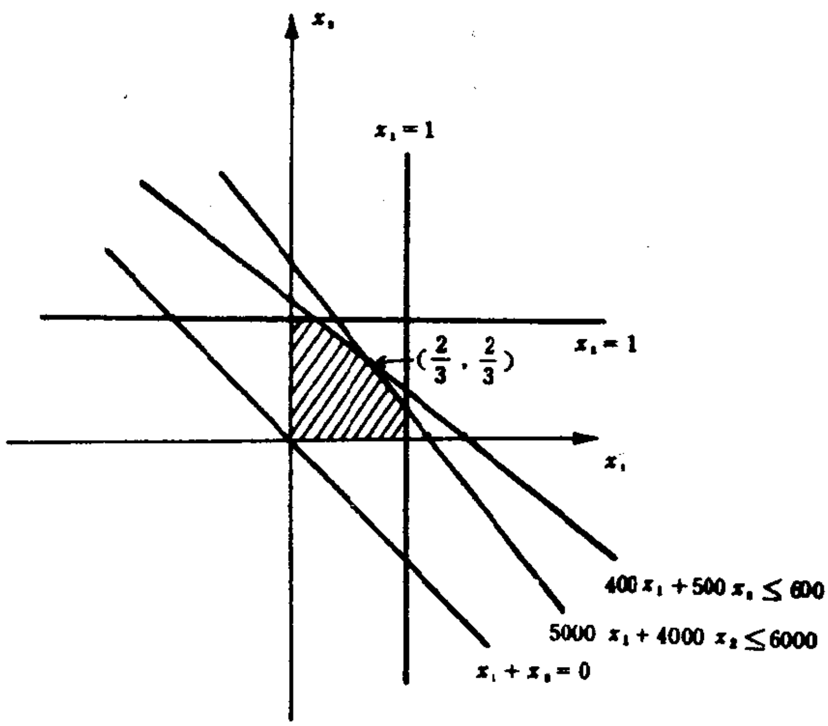
資源則爲資金與時間。

(b)　求 $z = 4500x_1 + 4500x_2$

限制　　x_1　　$x \leq 1$

$$x_2 \leq 1$$
$$5000x_1 + 4000x_2 \leq 6000$$
$$400x_1 + \ \ 500x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

(c) 估計利潤 $Z = 6000$



(d) 因本題可以建立與表3.2相似的表，所以可用第3.2節的模式來予以解決，表面上對3.3節中的四個假設似乎都滿足。

但與3.1範例相同，此題有可分性的疑慮。因組合變數 x_1，x_2 實際上爲資金與時間二者的分配組合，即

$$x_1 = \frac{y_1}{5000} \cdot \frac{z_1}{400}$$
$$x_2 = \frac{y_2}{4000} \cdot \frac{z_2}{500}$$

其中 y_1，y_2 各爲投入企業1，企業2之資金。

z_1，z_2 各爲投入企業1，企業2之時間。

而由(c)中所求得之解 $(x_1, x_2) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 後，尙須再決定 y_1，y_2，z_1，z_2 四個未知數。

所以此時須再考慮資金與時間之間如何分配的問題。

2. 某製造企業已停止某類無利潤產品的生產，由此所造成的閒置產能頗爲可觀。管理當局正考慮將此閒置產能用於三種產品之一或數者的製造；該三種產品稱爲產品 1，2，3。機器可用能量對產出量的可能限制者如下表所列：

機器種類	可用時間（每週機器小時）
銑床	500
車床	350
磨機	150

各產品每單位所需機器小時數爲

生產力係數（每單位產品機器小時）

機器種類	產品 1	產品 2	產品 3
銑床	9	3	5
車床	5	4	0
磨機	3	0	2

銷售部表示，產品 1 與產品 2 的潛在銷售量超過最高生產率，而產品 3 之潛在銷售量爲每週 20 單位。產品 1，2，3 之單位利潤分別爲 \$30，\$12，\$15。管理當局的目標爲決定使利潤達最高額之各產品應生產的數量爲何。

就此問題製作線性規劃模式。

解：令 x_1，x_2，x_3 分別表示產品 1，2，3 之數量

由題意知目標函數爲：

$Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$，求其極大值

條件約制式爲：

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 350 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 150 \\ x_3 \leq 20 \\ x_j \geq 0 \quad \text{當} \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

3. 用第 3.1 節中的圖解法以解下列問題。

$$\text{使} \quad Z = 2x_1 + x_2, \quad \text{最大}$$

受制於

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \end{aligned}$$

及

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

解：(1) 以 x_1 表橫坐標，x_2 表縱坐標，因 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$，故只考慮第一象限。$x_2 \leq 10$ 之圖形乃在 $x_2 = 10$ 之直線之下方區域。$2x_1 + 5x_2 \leq 60$ 之圖形在 $2x_1 + 5x_2 = 60$ 之直線的左下方
$x_1 + x_2 \leq 18$，　$3x_1 + x_2 \leq 44$ 類推
（x_1，x_2）許可值爲下圖之陰影部份

(2) 由 $\begin{cases} x_2 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 = 60 \end{cases}$　解得（5，10）

$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 60 \\ x_1 + x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 8 \end{matrix}$　（10，8）

同理，得　（13，5）　（0，10）　$\left(14\frac{2}{3}, 0\right)$　各點

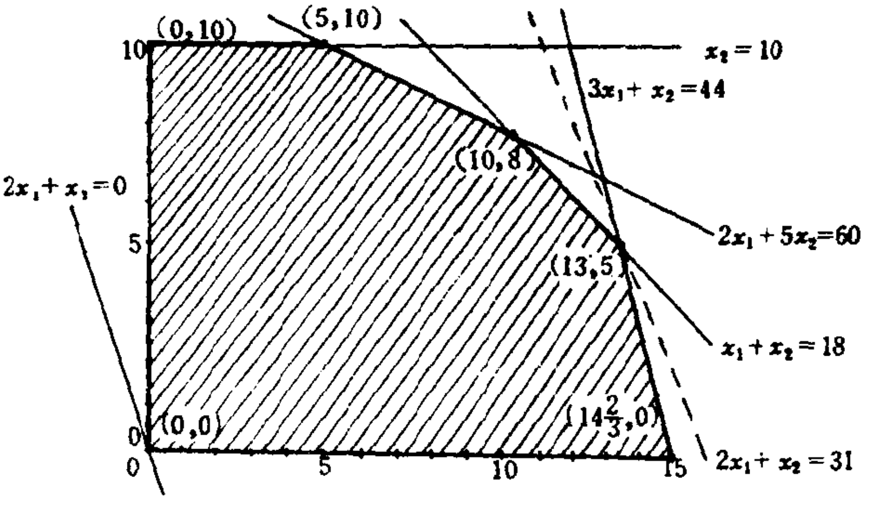
(3) 作 $Z = 2x_1 + x_2 = 0$ 之直線，由圖知欲使 $Z = 2x_1 + x_2$ 目標函數之最大值必經過（13，5）而與 $2x_1 + x_2 = 0$ 平行之直線

$$2x_1 + x_2 = 31$$

$$\left(\begin{matrix} 2 \cdot 13 + 5 = 31 \text{ 即以} \\ (13,5) \text{ 代入 } Z = 2x_1 + x_2 \end{matrix}\right)$$

即最佳解爲

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Z = 31$$



4. 用第 3.1 節中的圖解法以解下列問題。

$$\text{使} \quad Z = 5x_1 + 10x_2, \text{ 最大}$$

受制於

$$-x_1+2x_2 \le 25$$
$$x_1+\ x_2 \le 20$$
$$5x_1+3x_2 \le 75$$

及

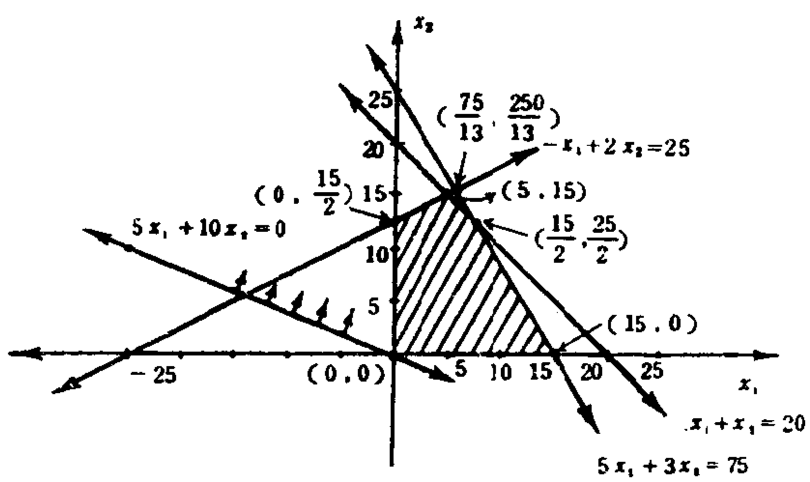
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.$$

解：（原題有誤，將第一約制式改爲 $-x_1+2x_2 \le 25$）

$\begin{cases} -x_1+2x_2=25 \\ x_1+\ x_2=20 \end{cases}$ 解得 $(x_1, x_2)=(5, 15)$

$\begin{cases} -x_1+2x_2=25 \\ 5x_1+3x_2=75 \end{cases}$ 解得 $(x_1, x_2)=(\frac{75}{13}, \frac{200}{13})$

$\begin{cases} x_1+\ x_2=20 \\ 5x_1+3x_2=75 \end{cases}$ 解得 $(x_1, x_2)=(\frac{15}{2}, \frac{25}{2})$



平行移動 $5x_1+10x_2=0$

在上圖斜線部分的各角點於（5，15）得最大值（最後碰到）

$\therefore$ 最大值 $z=5 \cdot 5+10 \times 15=175$

5. 就第 3.3 節所討論的線性規劃之四個假設而言，其適合第 3.4 節所述下列二例之情形各如何？試就每一假設每一例各寫一段分析。

(a)區域計畫（南方農社聯盟）。

(b)空氣汚染管制（諾利公司）。

解：直線規劃術四假定爲比例性，可加性，可割性，以及確然性。

(a) 就地域計劃（南方農社聯盟）來說．

1. 若培植農作物沒有設置成本(*Set-up cost*)則適合比例性(*Proportionality*)。
2. 只要農作物不相互影響，則適合可加性(*Additivity*)。
3. 因爲土地可隨意分割，故適合可割性(*Divisibility*)。
4. 因爲所有資料能準確地蒐集獲得，故亦適合確然性(*Deterministic*)。

(b) 就空氣污染管制（諾利公司）來說：

1. 因為考慮到設置成本（*Set-up cost*）故適合比例性（*Proportionality*）。
2. 因為各變數之間，沒有交互影響，故亦適合可加性（*Additivity*）。
3. 因為其方法可用在各部份階層（*fractional Levels*）故適合可分性（*Divisibility*）。
4. 因為資料易變幻，難於預測估計，故不適合確然性（*Deterministic*），必須用敏感性分析（*Sensitivity Analysis*）。

6. 考慮第 8.5 節一開始所描述的有關Middletown之某個城市中重新設計高級中學學區之問題。原來的目標函數為使學生通車距離為最短，而受制於學校種族均衡的限制。假定學校當局決定改變目標函數為使校車費用降至最低。（此時決策變數仍然是 x_{ij} = 第 i 區學生到第 j 學校的人數。）若學生被派到離家超過一英哩的學校，則給予乘坐校車之機會。（然而，將會有一些學生選擇他種交通工具上學。）每輛校車可乘坐 40 個學生，每車每日費用為 40 元加上每個乘座學生一元。為能儘量滿載，每車均能越區載學生。

對第 3.3 節四個線性規劃假設之每一個均畫一分析圖以說明修正後的目標函數是否滿足這些假設。

解：

假設類形	是否滿足	原因
比例性	否	因每車每日有固定費用 40 元，多加一名學生僅多 1 元，非比例增加。
可加性	否	因校車可越區載學生，兩區學生合坐一車可省固定成本 40 元。
可分性	否	學生數必為整數。
確然性	否	每車每日是否必定 40 元？ 每加一學生是否多加 1 元？

7. 某農夫養豬銷售。今欲知，在最低成本之下滿足某種營養要求之每豬各類飼料飼用量。每類飼料每磅所含各種基本營養成分量、每日營養需要量、及飼料成本如下：

營養成分	玉蜀黍 磅數	大桶糟 磅數	紫花苜蓿 磅數	每日最低需要量
醣	90	20	40	200
蛋白質	30	80	60	180
維他命	10	20	60	150
成本（¢）	35	30	25	

就此問題製作線性規劃模式。

解：(a) 令 x_1：玉蜀黍（*Corn*）之公斤數

x_2：大桶糟（*tankage*）之公斤數

x_3：紫花苜蓿（*alalfa*）之公斤數

由題意知欲求最低成本組合，亦即求目標函數

$Z = 21x_1 + 18x_2 + 15x_3$ 之極小值

$$\text{限制式為：}\begin{cases} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150 \\ x_i \geq 0 \quad \text{當} \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15 \\ x_i \geq 0 \quad \text{當} \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

8. 用第 3.1 節中的圖解法以解下列問題。

$$\text{使} \qquad Z = 4x_1 + 3x_2, \qquad \text{最小}$$

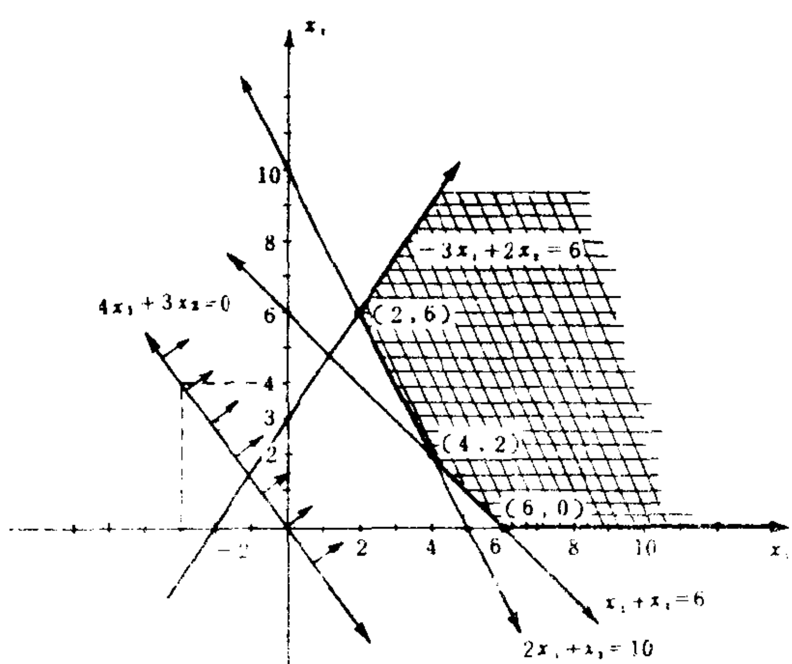
受制於

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

及

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

解：



解爲（2，6），（4，2），（6，0）
故以$4x_1+3x_2=0$平行最先碰到爲（4，2）點。
∴最小值爲$z=4\cdot4+3\cdot2=22$

9. 某公司之三個分廠有閒置產能。此三廠皆能生產某種產品，而管理當局決定將閒置產能用於此途。此產品分爲大號、中號、與小號三種，其單位淨利潤分別爲$385，$330，與$275。工廠1、2、3之閒置人力與設備能量，分別可用於每日生產此產品——不分大小——750，900，及450單位。可用在產品儲存場所亦限制產量。而工廠1，2，3分別有13,000，12,000，5,000平方呎之再製品儲存場所，可供此產品一日生產之用。大、中、小號每日每生產一單位各需20，15，12平方呎之儲存場所。

據銷售預測，大、中、小號產品每日各可售出900，1,200，750單位。

爲保持各廠工作負擔之均勻並維持彈性起見，管理當局決定，各廠之該產品產量，須佔各該廠閒置人力及設備能量之同一百分比。

管理當局欲知，各廠應生產各種規格產品之產量若干？始能使利潤最大。

(a)就此問題製作線性規劃模式。

(b)用一簡算法之電子計算機程式解此問題。

解：(a) 令x_{ij}表i廠生產j產品的數量

$i=1，2，3$

$j=L，M，S$　　L：大　　M：中　　S：小

由題意，能使利潤增加額爲最大之目標函數爲：

$$Z=385\sum_{i=1}^{3}x_{iL}+330\sum_{i=1}^{3}x_{iM}+275\sum_{i=1}^{3}x_{iS}$$

求Z之極大值，條件限制式爲：

$$x_{1L}+x_{1M}+x_{1S}\le 750$$
$$x_{2L}+x_{2M}+x_{2S}\le 900$$
$$x_{3L}+x_{3M}+x_{3S}\le 450$$
$$20x_{1L}+15x_{1M}+12x_{1S}\le 13{,}000$$
$$20x_{2L}+15x_{2M}+12x_{2S}\le 12{,}000$$
$$20x_{3L}+15x_{3M}+12x_{3S}\le 5{,}000$$
$$x_{1L}+x_{2L}+x_{3L}\le 900$$
$$x_{1M}+x_{2M}+x_{3M}\le 1{,}200$$
$$x_{1S}+x_{2S}+x_{3S}\le 750$$
$$900(x_{1L}+x_{1M}+x_{1S})-750(x_{2L}+x_{2M}+x_{2S})=0$$
$$450(x_{2L}+x_{2M}+x_{2S})-900(x_{3L}+x_{3M}+x_{3S})=0$$
$$x_{ij}\ge 0\quad(i=1，2，3 \text{ 且 } j=L，M，S)$$

(b) 本題有九個變數，十一個約制式，以筆算重複多次，甚浪費時間，故將條件限制式加入虛擬變數而得聯立一次方程式，只須將此聯立方程式之係數打入卡片，連同程式上機，即可得最佳解如下：

x_{1L}	x_{1M}	x_{1S}	x_{2L}	x_{2M}	x_{2S}	x_{3L}	x_{3M}	x_{3S}	Z
516.7	177.8	166.7	0	666.7	0	0	0	416.7	232.000

10. 某一農戶擁有 125 英畝土地以及 40,000元資金可用於投資。此農戶之成員在冬天月份期間（九月中至五月中）可提供值 3,500 人工 - 小時的勞務，而在夏天期間可提供值 4,000 人工 - 小時的勞務。如果不需要這些人工 - 小時的勞務，則年輕的成員可至附近的農場工作而分別賺取每小時 5 元（冬天）與 6 元（夏天）的工資。

此農戶的現金所得來源爲三種農作物及二種畜牧類：乳牛與生蛋母雞。農作物不需要任何投資，而每隻乳牛需要 1200 元費用且每隻母雞需成本 9 元。

又，每隻乳牛需要 1.5 英畝土地，以及在冬天時要 100人工 - 小時的勞務而夏天時要 50人工 - 小時的勞務，且每隻乳牛每年可爲此農家淨賺 1000 元。至於每隻母雞其相對應的數字爲不需土地，冬天 0.6人工 - 小時，夏天 0.3人工 - 小時，每天淨所得 5元。雞舍最多可容納 3000 隻母雞，而穀倉的面積最多可容納 32 隻乳牛。

據估計每英畝種植下列三種農作物其所需的人工 - 小時與所得如下表所示：

	大豆	玉米	燕麥
冬天人工 - 小時	20	35	10
夏天人工 - 小時	50	75	40
每年淨現金所得（$）	500	750	350

此農戶欲知，每種農作物應種植多少英畝及應飼養多少乳牛與母雞，始能獲得最大的淨所得。

就此問題製作線性規劃模式。

解：令 x_1，x_2，x_3 分別表大豆田、米田、麥田畝數。

x_4，x_5 分別表牛及雞的隻數。

x_6，x_7 分別表冬季、夏季之多餘人工 - 小時。

則由題目資料建立直線規劃模式如下：

目標函數爲

$$Z = 500x_1 + 750x_2 + 350x_3 + 1000x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 6x_7$$

求其極大值，條件約制式爲

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 \leq 125$$

$$20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 + 0.6x_5 + x_6 \leq 3500$$

$$50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0.3x_5 + x_7 \leq 4000$$

$$x_4 \leq 32$$

$$x_5 \leq 3000$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, \cdots, 7)$$

11 某載貨飛機有三個儲貨倉：前倉、中倉、後倉。此三個貨倉之裝貨能量皆受到重量與空間的限制，如下表所示：

貨倉	重量負荷（噸）	空間大小（立方英呎）
前	12	7,000
中	18	9,000
後	10	5,000

此外，爲了維持飛機的平衡，裝在各貨倉的貨物重量與各貨倉之重量負荷能力其比例均需相同。

下面的四種貨物已委託給貨運公司裝載運送，其重量、體積以及利潤如下表所示：

貨物	重量（噸）	體 積（立方英呎／噸）	利潤（$／噸）
1	20	500	280
2	16	700	360
3	25	600	320
4	13	400	250

設這些貨物皆可分散裝載。此目標函數爲：決定各貨物應裝載多少及如何將裝載的貨物分配至那些貨倉，始能使得此趟運送獲得最大利潤。

就此問題製造線性規劃模式。

解：令 x_{ij} 表第 i 種貨物儲存於第 j 區之噸數。

$j=1,2,3$ 分別表前、中、後三區域。

則由題示資料我們可建立直線規劃模式如下：

目標函數（求其最大利潤）爲

$$220\left(\sum_{j=1}^{3} x_{1j}\right)+280\left(\sum_{j=1}^{3} x_{2j}\right)+250\left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j}\right)+200\left(\sum_{j=1}^{4} x_{4j}\right)$$

條件約制式爲

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq \begin{cases} 20 & \text{當 } i=1 \\ 16 & i=2 \\ 25 & i=3 \\ 13 & i=4 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq \begin{cases} 12 & j=1 \\ 18 & \text{當 } j=2 \\ 10 & j=3 \end{cases}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}}{12} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}}{18} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_{i3}}{10}$$

$$500x_{1j} + 700x_{2j} + 600x_{3j} + 400x_{4j} \leq \begin{cases} 7,000 \\ 9,000 \\ 5,000 \end{cases}$$

當 $\begin{cases} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{cases}$

且 $x_{ij} \geq 0$ 對於 $i=1 \sim 4$，$j=1 \sim 3$

12. 某一投資者在連續 5 年（第一年至第五年）的各年初皆投資賺錢的活動：活動A與活動B。每一年年初投資在活動A的每一元在二年後（立即再投資）可收回 1.4 元（利潤爲 0.4 元），而投資在活動B的每一元在三年後可收回 1.7 元。

此外，投資賺錢的活動C與D僅作一次投資。第二年年初投資在活動C的每一元，在第五年底可收回 1.9 元，而第五年年初投資在活動D的每一元，在第五年年底可收回 1.3 元。

設此投資者一開始便有 50,000 元，他想知道，何種投資計畫可使得他在第六年年初擁有最多的金額（亦即投資利潤最大）。

就此問題製作線性規劃模式。

解：設投資於A，B二活動各在第一、二、三、四年的投資金額爲

x_{1A}，x_{1B}，x_{2A}，x_{2B}，x_{3A}，x_{3B}，x_{4A}

而投資於C，D二活動之金額爲x_{2C}，x_{5D}。

所以每年之限制爲：

$$\begin{aligned}
&x_{1A}+x_{1B} && \leq 50,000 \\
&x_{2A}+x_{2B}+x_{2C} && \leq 50,000-x_{1A}-x_{1B} \\
&x_{3A}+x_{3B} && \leq 50,000-x_{1A}-x_{1B}+0.4x_{1A}-x_{2A}-x_{2B} \\
& && \quad -x_{2C} \\
&x_{4A} && \leq 50,000-x_{1A}-x_{1B}-x_{2A}-x_{2B}-x_{2C}-x_{3A} \\
& && \quad -x_{3B}+0.4x_{1A}+0.4x_{2A}+0.7x_{1B} \\
&x_{5D} && \leq 50,000-x_{1A}-x_{1B}-x_{2A}-x_{2B}-x_{2C}-x_{3A} \\
& && \quad -x_{3B}+0.4x_{1A}+0.4x_{2A}+0.4x_{3A} \\
& && \quad +0.7x_{1B}+0.7_{2B}
\end{aligned}$$

而利潤 $z=0.4(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{4A})+0.7(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B})$
$+0.9x_{2C}+0.3x_{5D}$

所以此問題之線性規劃模式即在 $x_{ij} \geq 0$ $i=1,2,3,4,5$
$j=A,B,C,D$

和上列五限制式下求 z 之最大値。