

现代数学译丛

几 何

(第 二 卷)

欧氏空间, 三角形, 圆及球面

[法] M. 贝尔热 著

科 学 出 版 社

771/256/18

现代数学译丛

几 何

(第二卷)

欧氏空间, 三角形, 圆及球面

[法] M. 贝尔热 著

周克希 陈志杰 译

科 学 出 版 社

1989

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书。全书共分五卷。主要内容为：群在集合上的作用，仿射与射影空间；欧氏仿射空间；凸集与紧多面体；二次型，二次超曲面与圆锥曲线；球面与椭圆、双曲几何。本书配有大量的图和例，并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍。

本卷介绍欧氏空间，三角形，圆及球面。

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考。

M. Berger

GÉOMÉTRIE

2/Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2^e édition

现代数学译丛

几 何

(第二卷)

欧氏空间，三角形，圆及球面

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希 陈志杰 译

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1989 年 1 月第一次印刷 印张：7 1/4

印数：0001—1,360 字数：189,000

ISBN 7-03-000708-5/O · 189

定价：7.60 元

目 录

第 8 章 欧氏向量空间复习与补充	1
8.1 定义, 初步性质	2
8.2 正交群: 初步性质与讨论纲要	7
8.3 $\dim E = 2$ 时 $O(E)$ 的结构	13
8.4 $O(E)$ 中一个元素的结构. $O(E)$ 和 $O^+(E)$ 的生成元	17
8.5 $O(E)$ 的单性	23
8.6 直线或半直线的交角	25
8.7 平面上的定向角	29
8.8 相似; 迷向锥面与迷向直线	42
8.9 四元数. 到 $O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的映射	47
8.10 $O^+(n)$ 与代数拓扑	53
8.11 定向欧氏空间的典范体积形式. 混合积, 向量积	55
8.12 练习	60
第 9 章 欧氏仿射空间	64
9.1 定义. 等距. 位移	65
9.2 正交子空间; 距离	67
9.3 $Is(X)$ 中一个元素的结构. $Is(X)$ 和 $Is^+(X)$ 的生成元	71
9.4 平面等距的结构与多边形台球	76
9.5 相似	85
9.6 平面相似	95
9.7 几个点之间的距离	105
9.8 子集的稳定子群	115
9.9 曲线的长度	119
9.10 度量及微分几何: 第一变分公式	125
9.11 紧子集间的 Hausdorff 距离	129
9.12 欧氏仿射空间的典范测度. 体积	133
9.13 Steiner 对称	140

9.14	练习	145
第 10 章	三角形,球面及圆	156
10.1	三角形: 定义及记号	156
10.2	古典的结果	159
10.3	公式汇集	161
10.4	不等式及极小值问题	166
10.5	多边形	171
10.6	四面体	172
10.7	球面	176
10.8	反演	184
10.9	平面上的圆	189
10.10	圆束	195
10.11	有关圆的问题	199
10.12	挠平行性: 第 18.9, 20.5, 20.7 节的先导	203
10.13	练习	206
参考书目		214

第 8 章 欧氏向量空间复习与补充

用一个欧氏仿射空间可以很好地表示我们的世界,确切地说,由于不存在自然的长度单位,这种表示至多只相差一个数量倍数.欧氏仿射空间是本书的主要内容,在下面这一章里就要开始对这种空间进行讨论.为了作一些准备,我们先讨论作为欧氏仿射空间的底空间的欧氏向量空间;因而本章不论在形式上还是在实质上,都是相当代数化的.由于自古希腊以来积累的材料极为浩繁,故我们对它们进行了筛选,并以正交群 $O(\cdot)$ 作为主线来组织这些材料,以求取得某种统一性(在 8.2.14 有一个讨论纲要).在说明 $O(E)$ 的定义及一般性质(8.1, 8.2)以后,一方面讨论 $O(E)$ 中单独一个元素的结构(特征子空间, 8.4), 另一方面讨论整个 $O(E)$ 群的结构(8.5, 8.3, 8.9);二维的情形主要用到复数(8.3), 三维和四维的情形用到四元数(8.9).第 8.10 节是从文化修养以及与最新数学的联系这两个角度来安排的. 8.7 节是很特殊的一节,其中引进了作为一种很精巧的不变量(在作者看来,对于中学教学来说未免过于精巧)的平面定向角,借助这一概念可以得出一些关于圆的漂亮结果,例如可参看 10.9.7. 与此相反,半直线或直线夹成的(无向)角的概念,在作者看来,则是最基本的, 8.6 节对此作了讨论.第 8.8 节讨论相似性,其中有个原因是物质世界在仅相差一个数量倍数的意义上跟欧氏空间相符.最末的第 8.11 节中,除了经典的(并在众多学科中得到应用的)向量积以外,介绍了欧氏向量空间的规范体积形式,它是今后定义欧氏仿射空间规范测度的工具(9.12).

对数学家们逢到一个结构就作推广的做法业已习惯或者有所爱好的读者,想必已经预料到,在欧氏向量空间中舍弃某些性质后,是可以把它的结构推广成为一些新的结构的.这些结构,我们仅在第 13 章中零星地有所述及,建议读者参阅下列文献:

[DE1], [PO], [S-T], [BI 2], [AN].

若非另作申明,则本章中 E 总表示欧氏向量空间, n 表示它的维数.

8.1 定义,初步性质

8.1.1 定义. 欧氏向量空间 E 是 $\mathbf{R}$ 上的有限维向量空间,其上赋有正定的对称双线性形式 φ , 即 $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ 是对称双线性形式而且对所有的 $x \neq 0$ 有 $\varphi(x, x) > 0$. 记 $\varphi(x, y) = (x|y)$, 称为 x 和 y 的内积; x 的范数就是

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)} = \sqrt{(x|x)}.$$

若 $(x|y) = 0$, 称 x 和 y 正交. 集合 $\{e_i\}_{i=1, \dots, k} \subset E$ 称为正交向量组, 如果 $(e_i|e_j) = 0 \forall i \neq j$; 倘若还有 $\|e_i\| = 1 \forall i$, 则称为标准正交向量组.

8.1.2 注

8.1.2.1 欧氏向量空间 E 的向量子空间 F 对限制 $\varphi|_F$ 而言自然地成为一个欧氏向量空间.

8.1.2.2 标准的例子是

$$E = \mathbf{R}^n \text{ 而 } \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

8.1.2.3 在 E 上, φ 是一个二次型(参见 3.3.2), 对任意的 x, y 都有

8.1.2.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ \text{或} \\ (x|y) = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]. \end{array} \right.$$

8.1.2.5 由非零向量构成的正交组必定是线性无关组,

8.1.2.6 若 $\{e_i\}$ 是 E 的标准正交基, 则

$$x = \sum_i x_i e_i$$

等价于 $x_i = (x|e_i) \forall_i$. 另外还有

$$\left(\sum_i x_i e_i \mid \sum_j y_j e_j \right) = \sum_i x_i y_i.$$

8.1.3 命题. 对任何 $x, y \in E$, 有 $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$. 等式仅当 x, y 线性相关时成立; 更精确地说, $(x|y) = \pm \|x\| \|y\|$ 等价于存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^\pm$ 使 $\lambda x + \mu y = 0$. 对任何 $x, y \in E$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; 特别是

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

使 E 成为具有典范拓扑的度量空间 (参见 2.7.1).

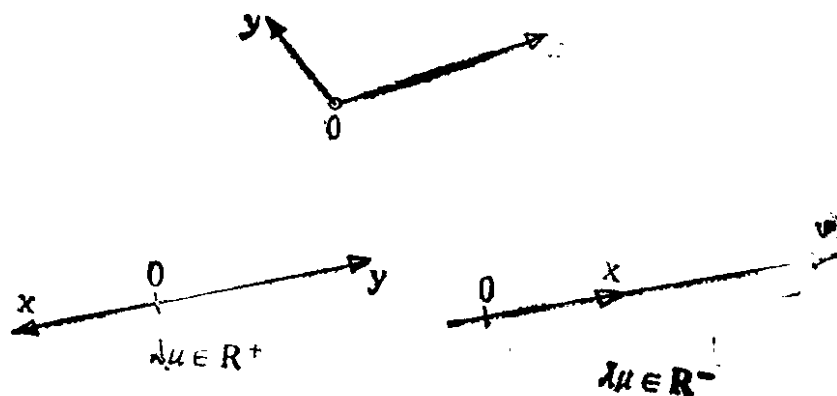


图 8.1.3.

8.1.4 命题 (Schmidt 标准正交化). 设 $\{b_i\}_{i=1, \dots, k}$ 是 E 中一组线性无关的向量; 则存在标准正交向量组 $\{a_i\}_{i=1, \dots, k}$ 具有以下性质: $\{a_i\}_{i=1, \dots, k}$ 同伦于 $\{b_i\}_{i=1, \dots, k}$ (参见 2.7.2.7) 且 $\forall h=1, \dots, k$, 由 $a_i (i=1, \dots, h)$ 生成的向量子空间与由 $b_i (i=1, \dots, h)$ 生成的向量子空间是相同的. 特别是, E 上任一给定的 (可能是空集的) 标准正交向量组必可扩充成为标准正交基, 它们都同伦于某一个标准正交基.

对 k 用归纳法. 对 $k=1$, 取 $a_1 = b_1^* = \|b_1\|^{-1} b_1$, 其中对任一 $x \in E$, x^n 表示 x 经标准化后所成向量, 即 $x^n = \|x\|^{-1} x$; x^n 必同

伦于 x , 同伦可取为 $x(t) = tx^n + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, 即连结端点 x, x^n 的线段. 现假设 $\{a_i\}_{i=1, \dots, h-1}$ 已作出, 要作 a_h ; 相继置

$$d_h = \sum_{i=1}^{h-1} (a_i | b_h) a_i, \quad c_h = b_h - d_h, \quad a_h = c_h^n.$$

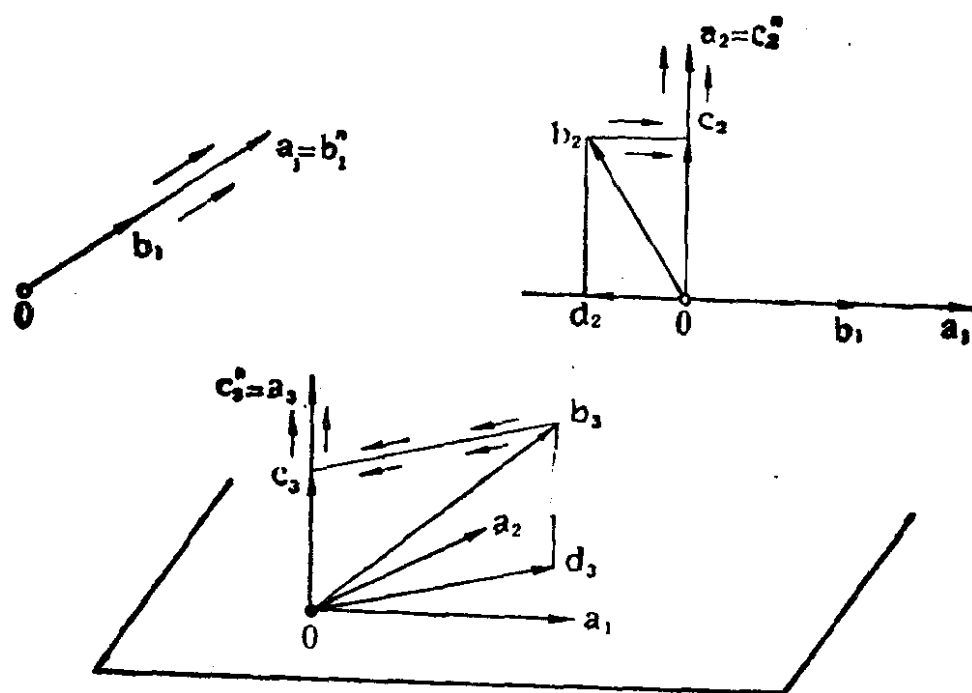


图 8.1.4.

可直接验证 $\{a_i\}_{i=1, \dots, h}$ 满足命题要求, 同伦即可取为相继所作的同伦的合成; 其中最后的两个同伦, 由 b_h 到 c_h 的为 $b_h(t) = tc_h + (1-t)b_h$, 由 c_h 到 a_h 的有如前述.

8.1.5 命题. 设 E, E' 是两个维数相同的欧氏向量空间, $f: E \rightarrow E'$ 是集合的映射, 则下述命题是等价的:

(i) $f \in L(E; E')$ 且 $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$;

(ii) $\forall x, y \in E: (f(x) | f(y)) = (x | y)$.

这样的 f 必为双射, 称为等距. 等距的全体记为 $O(E; E')$.

(i) 蕴涵 (ii) 可由 f 线性和 8.1.2.4 推出. (ii) 蕴涵 (i): 在 E 中取一个标准正交基 $\{e_i\}$ (参见 8.1.4). 由 (ii) 和维数相等的条件, $\{f(e_i)\}$ 是 E' 的标准正交基; 然而由 8.1.2.6 和 (ii) 可知

$$f\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i f(e_i),$$

因此 f 是线性的。

8.1.6 推论. 每个 n 维欧氏向量空间都与 $\mathbf{R}^n$ 等距(参见 8.1.2.2).

8.1.7 有人把 8.1.6 中的“与 $\mathbf{R}^n$ 等距”就说成“与 n 维欧氏空间等距”;如果对自己所用的术语含义清楚的话,这样说也未始不可。

8.1.8 对偶

8.1.8.1 引理. 设 E 是欧氏向量空间, E^* 是作为实向量空间的 E 的对偶空间, 则映射 $b: E \ni x \mapsto x^b = \{y \mapsto (x|y)\} \in E^*$ 是向量空间的同构. 逆映射记为 $\# = b^{-1}: E^* \rightarrow E$.

我们知道 $\dim E = \dim E^*$ (例如可由对偶基的概念看出); 由于 b 是线性的, 只须再说明 b 的核是零. 然而, 若对每一 y 有

$$(x|y) = 0,$$

则特别地有 $(x|x) = \|x\|^2 = 0$, 因而 $x = 0$,

8.1.8.2 引理 8.1.8.1 使我们可以赋予 E^* 一个自然的欧氏空间结构, 以后遇有需要时我们将作出这一结构. 由 2.4.8.1 和 8.1.8.1 可以导出:

8.1.8.3 定义. 命题. 对 E 的子集 A , 令

$$A^\perp = \{x \in E: (x|y) = 0 \ \forall y \in A\}$$

并称为 A 的正交集. $\forall A \subset E$, 这一正交集是一个向量子空间, 若 $\langle A \rangle$ 表示由 A 生成的(向量)子空间, 就有 $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$. 对每一子空间 A , 我们有直和 $A \oplus A^\perp = E$; $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$. $A^{\perp\perp} = A$. 若 A, B 是两个子空间, 则 $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$. 如果 $A \subset B^\perp$, 称 A, B 是正交的, 这时也有 $B \subset A^\perp$, 因而记作 $A \perp B$.

8.1.8.4 记号. 如果 $E = V \oplus W$ 是直和, 而且 $W = V^\perp$, 我们就说这是一个正交直和, 记作 $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$. 更一般地, 对一族子空间可以有

$$E = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_k = \overset{\perp}{\oplus}_i V_i.$$

8.1.8.5 在三维的特殊情形下，8.1.8.3 重又证明了用公理方法建立的欧氏几何的结果如下：过定点垂直于已知直线的全体直线的集合是一张平面，即该直线的垂直平面。如果考虑过定点分别垂直于两张已知平面的两条直线 D, D' ，那么由 D 和 D' 张成的平面恰是直线 $P \cap P'$ 的垂直平面。读者想必会看出，第一个结果就有很大的实用意义：有了它，附图中的门就可以开关自如，没有任何理论上的困难。对这一结果的古典的阐述，见 [HD2]。

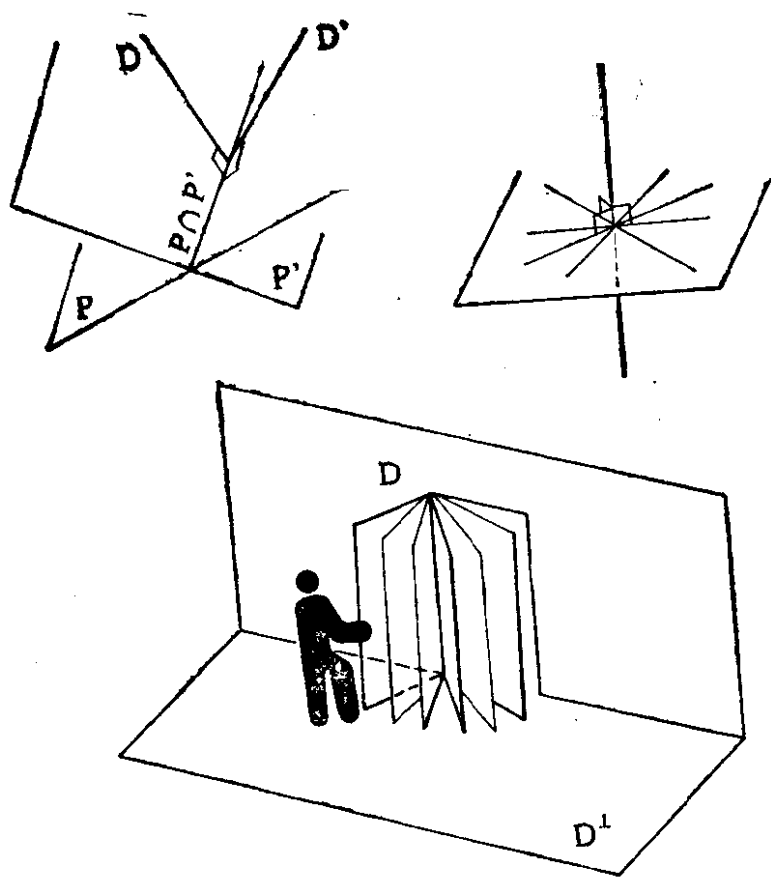


图 8.1.8.4.

8.1.8.6 根据引理 8.1.8.1，可定义一个自同态 $f: E \rightarrow E$ 的伴随自同态，记作 f' 。实际上， $f: E \rightarrow E$ 诱导出转置自同态 $f^*: E^* \rightarrow E^*$ ；因而令 $f' = \# \circ f^* \circ b: E \rightarrow E$ 并把 f' 称为 f 的伴随自同态。因此就有

$$(f'(x)|y) = (x|f(y)) \quad \forall x, y \in E.$$

8.2 正交群:初步性质与讨论纲要

8.2.1 命题. 记 $O(E) = O(E; E)$, 称为 E 的正交群; 记

$$O(n) = O(\mathbf{R}^n).$$

$f \in O(E)$ 的充要条件是 f 的矩阵 A 在任一或某一标准正交基下满足 ${}^tAA = I$ (其中 ${}^t \cdot$ 表示矩阵的转置, I 表示单位矩阵). 特别有 $\det f = \pm 1$; 记 $O^+(E) = \{f \in O(E): \det f = 1\}$,

$$O^-(E) = \{f \in O(E): \det f = -1\};$$

$O^+(E)$ 的元素称为旋转. 还有: $f \in O(E) \iff {}^tff = \text{Id}_E$ (参见 8.1.8.6).

这个命题可由下述引理推出, 而下述引理则可由 8.1.2.6 和矩阵乘积的定义推出:

8.2.2 引理. 设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个标准正交基, A, B 是两个方阵, 阶数都等于 E 的维数; 若将 A, B 分别写成由列向量组成的形式

$$A = (x_1, \dots, x_n), \quad B = (y_1, \dots, y_n),$$

则有

$${}^tAB = ((x_i | y_j)).$$

8.2.3 注

8.2.3.1 若 $\dim E = n$, 则由 8.1.6 可知 $O(E)$ 同构于 $O(n)$. 因此, 对正交群的线性群结构的研究, 只须对 $O(n)$ 进行讨论即可.

8.2.3.2 子群 $O^+(E)$ 是 $O(E)$ 的正规子群. 我们有下列明显的乘法法则:

$$O^-(E)O^-(E) \subset O^+(E), \quad O^-(E)O^+(E) \subset O^-(E).$$

8.2.3.3 $O(E) \subset GL(E)$ (参见 2.7.1) 在诱导拓扑下是紧的: 事实上, 对有限维向量空间 E 的任一基, 若 $A(f)$ 表示 f 关于该基的矩阵, 则映射 $f \mapsto (\text{trace} ({}^tA(f)A(f)))^{1/2}$ 就是 $GL(E)$ 上的一个欧氏结构的范数. 现在若 E 是欧氏向量空间而基是标准正交的, 则由 8.2.1, $O(E)$ 中所有的元素在上述意义下的范数都等于

$n = \dim E$; 因此 $O(E)$ 是 $GL(E)$ 中的有界集; 但由 ' $AA = I$ ' 的条件可知它又是闭集, 因而就是紧集. 说明 $O(E)$ 是有界集的另一方法是: 对于 E 的欧氏范数, 在 $GL(E)$ 中应用线性映射全体所成空间的范数 (非欧氏范数!); 于是由 $O(E)$ 的定义有:

$$\text{对 } f \in O(E): \|f\| = \sup\{\|f(x)\|: x \in E \text{ 且 } \|x\| = 1\} = 1.$$

8.2.4 由 $O(E) \subset GL(E)$ 是紧子群, 可有下列有用的逆定理:

8.2.5 定理. 设 E 是有限维实向量空间, 不必是欧氏的, G 是 $GL(E)$ 的紧子群, 则在 E 上至少存在一个欧氏结构 φ 使得 $G \subset O(E)$, 其中 $O(E)$ 是这一欧氏结构的正交群.

8.2.5.1 要给出一个最简捷的证明, 就必须用到紧群上 Haar 测度的存在性的概念 (对此例如可见 [DE4], 第 219 页以后); 设 dg 是 G 上的 Haar 测度, φ 是 E 上的任一欧氏结构. 对 $g \in G$, 定义一个欧氏结构 $g^*\varphi$ 如下:

$$(g^*\varphi)(x, y) = \varphi(g(x), g(y)) \quad \forall x, y \in E;$$

所求的欧氏结构取为 $g^*\varphi$ 关于测度 dg 的平均值即可, 即令

$$\bar{\varphi} = \int_{g \in G} g^*\varphi dg,$$

亦即对任何 x, y :

$$\bar{\varphi}(x, y) = \int_{g \in G} \varphi(g(x), g(y)) dg.$$

容易看出 $\bar{\varphi}$ 仍是 E 上欧氏结构, 而且 $\bar{\varphi}$ 在 G 下不变, 即

$$g^*\bar{\varphi} = \bar{\varphi} \quad \forall g \in G.$$

这一点可由 $\bar{\varphi}$ 的构造和测度 dg 在 G 中平移下不变的事实得证. 然而

$$g^*\bar{\varphi} = \bar{\varphi} \quad \forall g \in G$$

就等于说 $G \subset O(E)$, 其中 $O(E)$ 是 $(E, \bar{\varphi})$ 的正交群.

8.2.5.2 第二种证明从 2.7.5.7 出发, 仅用到有限维实向量空间中 Lebesgue 测度的理论. 我们在 n 维实向量空间 E 上的二次型所构成的实向量空间 $\mathcal{P}_2^\bullet(E)$ (这时 $\mathcal{P}_2^\bullet(E)$ 就是 $n(n+1)/2$ 维的) 中进行讨论. 在 $\mathcal{P}_2^\bullet(E)$ 中, 正定二次型所成的子集 $Q(E)$ 是一个开的凸锥, 且在如 8.2.5.1 中那样由 $g^*\varphi$ 定义的 G 的作用下

稳定. 从 $Q(E)$ 中任一 φ 出发, φ 在 G 的作用下的轨道

$$K = \{g^*\varphi: g \in G\}$$

是 $\mathcal{D}_2^\bullet(E)$ 的紧子集, 且 $K \subset Q(E)$. 因此中心 $\text{cent}(K)$ 在 $Q(E)$ 中, 而且由 2.7.5.7 可知它在 G 的作用下不变.

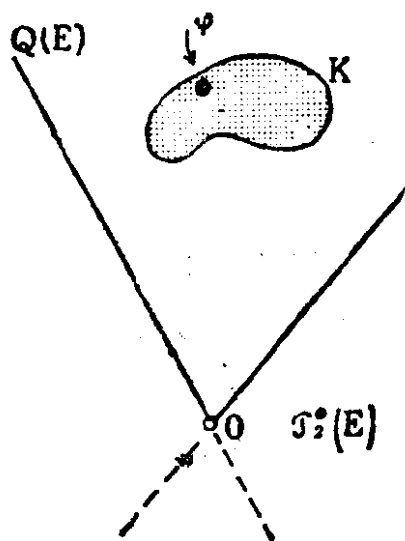


图 8.2.5.2.

8.2.5.3. 我们在 11.8.10.8 中还会看到 8.2.5 的第三种几何方法的证明, 它从凸性出发, 并不用到测度理论.

8.2.6 注. 在 G 下不变的欧氏结构一般来说并非唯一的, 试考虑 G 缩成 E 的恒等变换的情形! 可是存在一个很好的准则: G 容有一个唯一的 (在不计相差一个常数倍数的情况下!) 不变欧氏结构的充要条件是 G 在 $GL(E)$ 中不可约, 即 E 不容有除 $\{0\}$ 和 E 以外的任何对每一 $g \in G$ 稳定的子空间. 见 8.12.1.

关于 8.2.5 的最新应用, 除 8.1.2.1 外, 还可参阅例如 [PA] 或 [TG] 第八章.

若 G 是有限群, $G = \{g_i: i \in I\}$, 只要取 $\bar{\varphi} = \sum_i g_i^* \varphi$ 即可!

8.2.7 命题. (设 $\dim E \geq 2$.) 群 $O^+(E)$ 在 E 的单位球面

$$S(E) = \{x \in E: \|x\| = 1\}$$

上可迁, 在 E 的所有的 Grassmann 流形 $G_{E,p} (0 \leq p \leq \dim E)$

(参见 1.2.5) 上也可迁. 群 $O(E)$ 在 E 的标准正交基的集合上是单可迁的; 群 $O^+(E)$ 在同伦标准正交基的集合上是单可迁的(参见 2.7.2.7).

8.2.8 根据 8.2.4, 可将 n 维的标准球面, 譬如说 $S^n = S(\mathbf{R}^{n+1})$, 写成齐性空间(参见 1.5.5)

$$S^n = O(n+1)/O(n),$$

其中 $O(n)$ 是作为 $O(n+1)$ 中由保持向量 $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 不动的 f 所构成的子群而自然地嵌入 $O(n+1)$ 的. 同样, 对 Grassmann 流形有

$$G_{n,p} = O(n)/(O(p) \times O(n-p)),$$

其中 $O(p) \times O(n-p)$ 是子群 $O(p)$ 和 $O(n-p)$ 的直积, $O(p)$ 由保持 $\mathbf{R}^n$ 的典范基中的 $n-p$ 个向量 $e_{p+1}, \dots, e_n$ 不动的 $f \in O(n)$ 所构成 ($O(n-p)$ 对 $e_1, \dots, e_p$ 有类似情形).

8.2.9 命题. 设 $E = S \oplus T$ 是直和分解, σ 是关于 S 平行于 T 的对称(参见 6.4.6), 则 $\sigma \in O(E)$ 的充要条件是 $E = S \dot{\oplus} T$ (即 $T = S^\perp$); 这时把 σ 记作 σ_S . 这样的 σ 称为欧氏空间 E 的(正交)对称, 若 $\dim S^\perp = 1$, 则称为超平面对称; 若 $\dim S^\perp = 2$, 则称为中心对称. 我们有 $\sigma_S \in O^\pm(E)$, $\dim S^\perp$ 是偶数时取+, $\dim S^\perp$ 是奇数时取-. 每个对称都是对合, 反之, 每个使 $f^2 = \text{Id}_E$ 的 $f \in O(E)$ 都是对称.

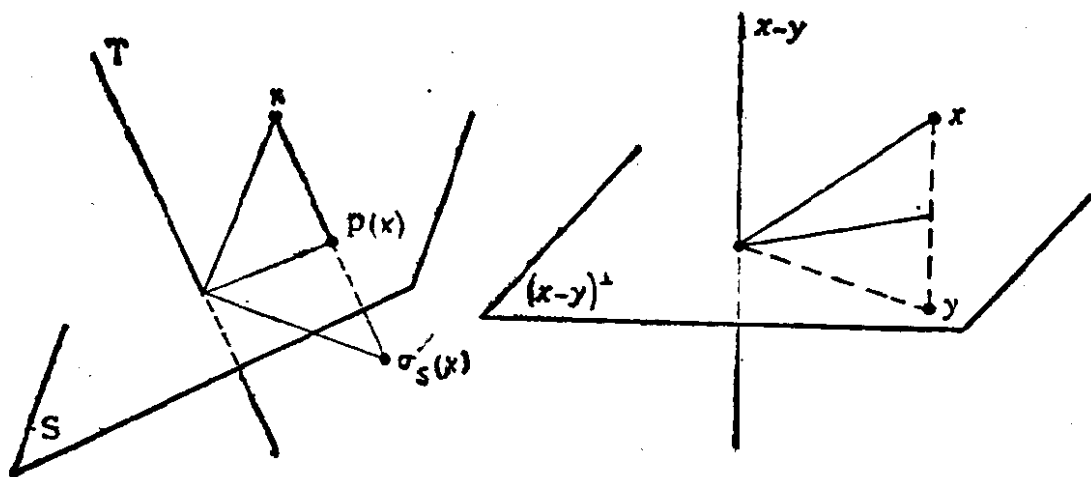


图 8.2.9.

8.2.10 知道当 H 是超平面时 σ_H 的具体表达式是很有用的;若 x 是 $H^\perp$ (其维数为1)的一个非零向量,则

$$\sigma_H(y) = y - 2 \frac{(y|x)}{\|x\|^2} x.$$

8.2.11 若 $x, y \in E$ 且 $\|x\| = \|y\|$,则存在超平面 H 使 $\sigma_H(x) = y$;若 $x \neq y$, $x \neq 0$,则 H 是唯一的.事实上,若 $x = y$,则任一含有 x 的超平面都满足要求,否则 H 必为 $H = (y - x)^\perp$,仍满足要求.注意到 H 就是 x 和 y 的垂直平分超平面,即

$$H = \{z \in E : d(x, z) = d(y, z)\},$$

参见 9.7.5.

8.2.12 定理. 每一 $f \in O(E)$ 是至多 $n = \dim E$ 个超平面对称的乘积.

事实上,只须应用 8.2.11 并作递推;最后归结到 f ,而且

$$f(x) = x \quad (x \neq 0),$$

但这时 f 保持 $x^\perp = S$ 不动,而 S 的维数严格小于 E 的维数.

8.2.13 推论. 若 $\dim E = 1$,则 $O(E) = \text{Id}_E \cup (-\text{Id}_E)$. 若 $\dim E = 2$,则每一 $f \in O^-(E)$ 是超平面对称,即关于一条直线的对称,每一 $f \in O^+(E)$ 是两个关于直线的对称的乘积.

尽管 8.2.12 的证明很简单,我们还是把它称作定理,原因是它有很基本的应用.当把欧氏结构代之以在任意域上有限维向量空

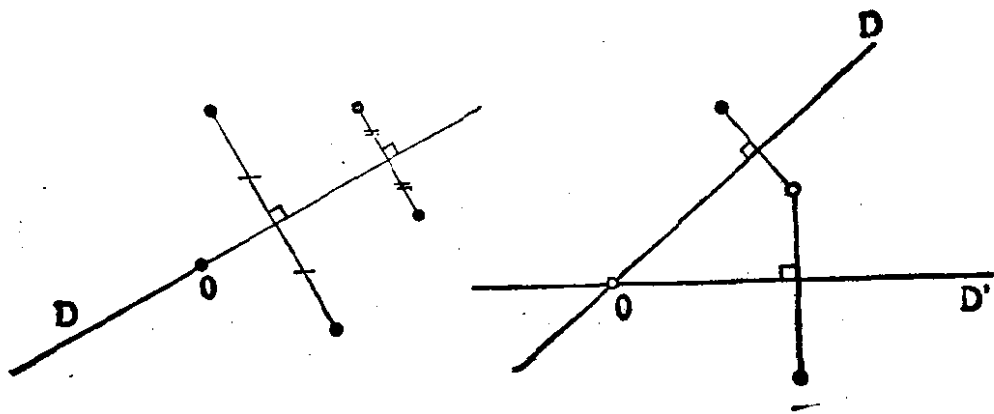


图 8.2.13.

间中的一个非退化(除此以外毫无要求)的二次型时, 8.2.12 仍成立, 但证明要困难得多; 这个证明将是第十三章的一个主要内容.

8.2.14 以后有关 $O(E)$ 的讨论的纲要

$O(E)$ 中一个元素的结构: 讨论 $f \in O(E)$ (相应地, $O^+(E)$) 所能分解成的超平面对称(相应地, 中心对称)的最小个数(见 8.4.5, 8.4.6); 我们将把一个 $f \in O(E)$ 分解成一维或二维子空间的等距的乘积(见 8.2.15), 由此还可引出对 $O(2)$ 的深入讨论(因为 $O(1)$ 是平凡的, 见 8.2.13), 重要的结论是 $O^+(2)$ 为交换群.

整个 $O(E)$ 群的结构: 除 $O^+(2)$ 是交换群以及有关 $O(E)$ 或 $O^+(E)$ 的中心的很简单的讨论外, 还将证明对 $n = 3$ 和 $n \geq 5$, $O^+(n)$ 都是单群: 见 8.5. $O(4)$ 不是单群, 这一例外的情形将在 8.9.10 中借助于四元数进行讨论. 借助四元数还能对 $O(3)$ 和 $O(4)$ 进行细致的讨论.

$O(E)$ 的拓扑与代数拓扑: 在 8.4.3 中可以看到 $O^+(E)$ 是弧连通的, 因而 $O^+(E)$ 和 $O^-(E)$ 是 $O(E)$ 的两个连通分支. 接下去, 在 8.10.3 中可以看到基本群 $\pi_1(O(n))$ 在 $n = 2$ 时是 $\mathbf{Z}$, 而在 $n \geq 3$ 时是 $\mathbf{Z}_2$. 我们在这里得到了数学中两个很重要的结果. $\pi_1(O(2)) = \mathbf{Z}$ 是单复变量函数论和平面曲线的几何理论的一块基石; 而 $n \geq 3$ 时 $\pi_1(O(n)) = \mathbf{Z}_2$ 则是数学中一些出人意料的发展的源泉. 凡此种种均见 8.10.3.

8.2.15 引理. 设 $f \in O(E)$, 则存在正交直和

$$E = \bigoplus_i P_i$$

使 $\forall i$ 有 $f(P_i) = P_i$, 且 $\forall i$ 有 $\dim P_i = 1$ 或 2 .

根据 7.4.3, 存在一维或二维向量子空间 $P_i \subset E$ 使 $f(P_i) = P_i$. 由于 f 保持内积, 就有 $f(P_i^\perp) = P_i^\perp$; 但 $\dim P_i^\perp < \dim E$, 递推即得所需结论. 不用到复化, 亦即只在实的范围中进行的证明, 可参看 8.12.2 和 8.12.3.

上述引理说明, 要研究 $f \in O(E)$, 只要研究 $\dim E = 1$ 或 2 时的 $O(E)$ 就可以了; $\dim E = 1$ 就是 8.2.13 的情形, $\dim E = 2$ 的