序　言

结构矩阵分析方法的广泛应用，使得我们有可能：

(1) 按照实际的状态来分析大型结构；

(2) 对杆件结构和连续体结构提供一个统一的分析方法进行弹性和非弹性分析，包括屈曲荷载和自振频率的计算；

结构分析的传统方法可能有一些优点，这些方法对学生来说似乎是一些诀窍而已。矩阵方法避免了这个严重的缺点而使学生清楚地看出，在任意给定的应力-应变规律下如何满足平衡、协调条件和边界条件的基本要求。

本书的目的是想提供这样一个统一的方法。主要侧重点在于清楚地给出一些数字例题，同时也以不很简要的方式给出足够的理论，使得本书能自成体系。同时认为学生已学过初等结构力学。

本书的一些特点是

(1) 例题的求解步骤与用计算机程序求解步骤完全相同，并未为了使方法便于手算而介绍任何捷径。这样可以使学生一旦熟悉某种计算机语言之后就能编写他自己的程序。

(2) 实际上，所有的例题均用特地编写的计算机程序求解。所以除了可能出现的排印错误外，这些例题是无数值运算错误的。

(3) 本书涉及的面很广。不仅有弹性分析而且还包括有弹塑性分析，弹性稳定和自振频率的计算。

(4) 线元刚度矩阵的推导，是以微分方程的精确解和近似解为基础的，同时也借助于能量原理。在后面几章里还应用这些方法推导有限元的刚度矩阵。这样便可从线元尽可能自然地过渡到有限元。

希望这些特点能使本书引起想要熟悉结构分析现代方法的高年级大学生、一年级研究生以及从事实际工作的工程师们的兴趣。

作者在编写本书时曾得到很多人的帮助，特别要感谢：

Card John 女士协助编制计算机程序；

Robert Waston 先生描绘全书的插图；

L. Williamson 女士进行最后的打印；

Alexander Conil 教授在关键时刻给予的支持；

我的女儿 Ranjana 在我困难期间仍使我保持愉快的心情。

〔英〕P. 贝特

格拉斯哥1980.10

结构矩阵分析中的若干问题

［英］P.贝特　著

赵超燮　寿楠椿　江素华　译

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16　印张20.75　字数470 000

1993年11月第1版　1993年11月第1次印刷

印数0001—1 110

ISBN 7-04-003006-3/TB·171

定价13.05元

阅读指导

建议读者按下列顺序阅读本书:

第一章;

第三章至第六章;

第二章;

第七章至第十三章。

除解联立方程组外,读者必须自己演习各例题的所有步骤,如有计算机程序则也可利用它去求解联立方程组。

注意所用的单位制必须一致。在本书中应力的单位为 kN/mm^2 或 kN/m^2。在一些国家中,应力的单位称为帕斯卡 Pa,定义

$$1Pa = 1N/m^2 = 10^{-3}kN/m^2 = 10^{-6}N/mm^2.$$

目　录

第一章　基础知识

结构分析是讨论在外加荷载、温度变化、支座沉降、振动等等因素作用下，如何确定结构的应力(内力)和变形(位移和应变)。

结构分析的任何方法必须满足下列基本要求:

(1) 在应力和外加荷载之间的平衡关系;

(2) 在各节点处位移的协调关系;

(3) 在支座处满足规定的力或变形条件。

§1-1　平　　衡

平衡要求是指杆件中的内力，诸如轴力、弯矩、剪力和扭矩，必须与外加荷载相平衡。通常在结构矩阵分析方法中用来求解的平衡方程是节点处的平衡方程。现以图 1-1 的平面铰接结构为例。如果 F_x^i 和 F_y^i 分别表示第 i 根杆在节点 4 处沿 x 和 y 方向力的分量，则在节点 4 处的平衡条件要求:

$$\Sigma F_x^i = W_x \quad 和 \quad \Sigma F_y^i = W_y \tag{1-1}$$

式中: W_x 和 W_y 分别为作用在节点 4 处沿 x 和 y 方向的外力。同时对"i"求和表示对汇交在节点 4 的所有杆件进行。

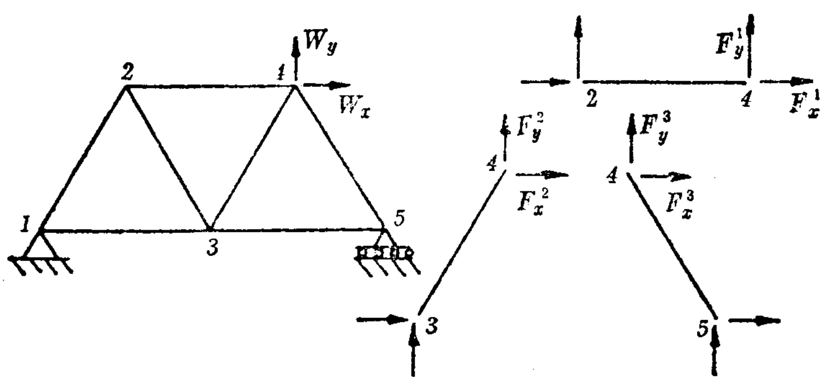

图 1-1

类似地，对于图 1-2 的平面刚接结构一个节点的平衡要求为:

$$\Sigma F_x^i = W_x, \Sigma F_y^i = W_y \text{ 和 } \Sigma M_z^i = M_z \tag{1-2}$$

式中: W_x 和 W_y 分别为作用在节点 6 处沿 x 和 y 方向的外力，M_z 为作用在节点 6 处绕 z 轴的力矩。

这里值得注意的是力和力偶为向量，所以可以沿正交坐标轴分解为几个分量。本书所谓的

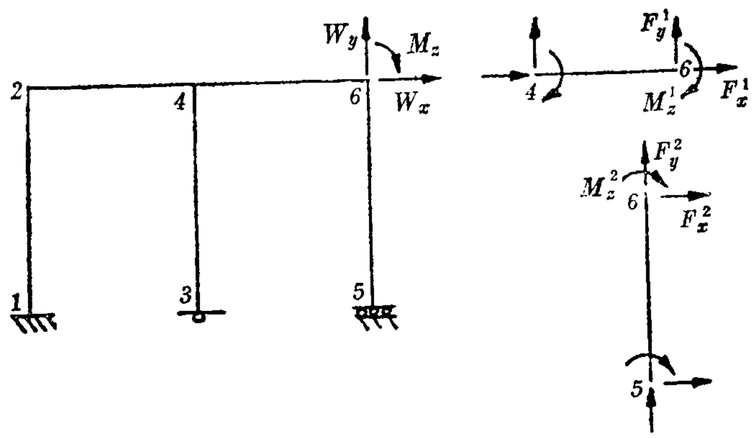

图 1-2

力是广义力,表示传统意义的力和力偶(力矩)。在图上用单箭头→表示力,而用双箭头↠表示力偶。力偶的旋转方向由右手法则来确定,即右手握住坐标轴而以拇指指向坐标轴的正方向,其余四指环绕坐标轴表示旋转的正方向。

图 1-3 所示为平面交叉梁系结构的一根杆件。杆端作用力为弯矩、剪力和扭矩。可以看出力偶的向量表示法不仅比习惯的表示法更方便,而且使得有力偶时的平衡条件简单而形象化。例

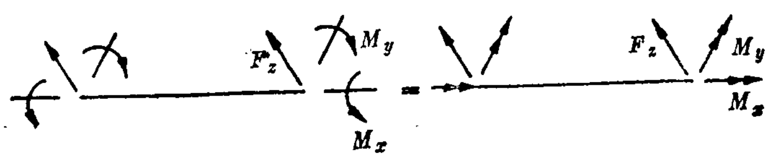

图 1-3

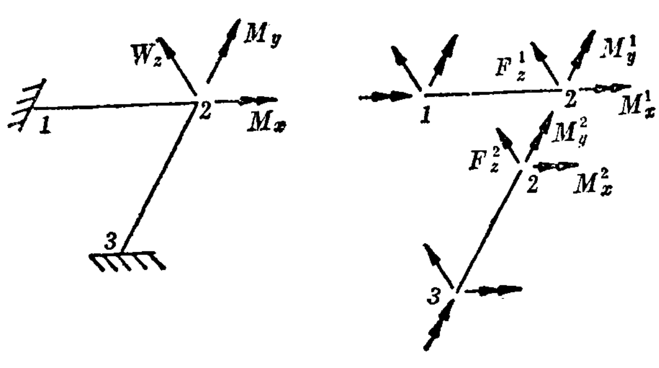

图 1-4

如,图 1-4 所示的平面交叉梁系一个节点的平衡要求显然为:

$$\Sigma M_x^i = M_x、\Sigma M_y^i = M_y \text{ 和 } \Sigma F_z^i = W_z \tag{1-3}$$

式中: M_x 和 M_y 分别为作用在节点处沿 x 和y 轴的力偶,W_z 为节点处沿 z 轴方向的外力。

综合对不同平面结构建立的平衡要求,易于看出,空间刚接结构节点处有:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x^i = W_x, \Sigma F_y^i = W_y, \Sigma F_z^i = W_z \\ \Sigma M_x^i = M_x, \Sigma M_y^i = M_y, \Sigma M_z^i = M_z\end{array}\right\} \tag{1-4}$$

§1-2 协　调

位移协调条件意味着汇交在节点处的所有杆件在该端应具有相同的位移。虽然这是一个“很明显”的要求，但在一些情况下须仔细解释。

图 1-5 所示为平面铰接结构。为了满足协调要求，例如汇交在节点 4 处的所有杆件在该端必须具有相同的位移：u_4 和 v_4 分别为沿 x 和 y 方向的位移。

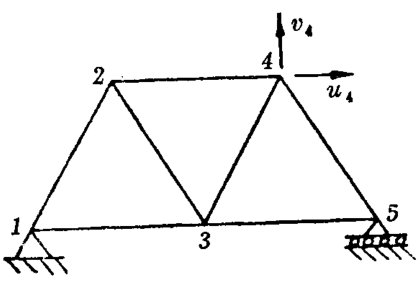

图 1-5

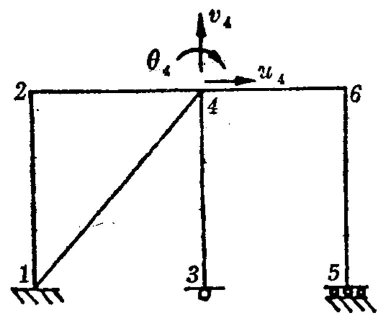

图 1-6

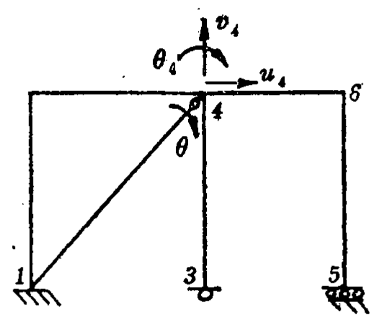

图 1-7

同样的如图 1-6 所示平面刚接结构汇交在节点 4 处的所有杆件，在这一端必须具有相同的沿 x 和 y 方向的位移 u_4 和 v_4 以及相同的绕 z 轴的转角 θ_4。

如果汇交在节点处的所有杆件并非完全刚接的，则必须仔细考虑对 θ 的协调要求。例如图 1-7 所示的结构中，杆 1-4 在节点 4 处与其它杆件并非刚性连接。在这种情况下，杆 2-4、4-6 和 3-4 在节点 4 处具有相同的转角 θ_4，而杆 1-4 的转角却不是 θ_4。在结构某节点处形成塑性铰时也出现类似的情况。这一问题将在第十章中讨论。

§1-3 边界条件

通常在结构支座处要求某些位移和(或)力具有给定的值。例如图 1-1 所示的平面铰接结构在节点 1 处 $u=v=0$，而在节点 5 处 $v=0$，同时在 x 方向的净力也为零。同样在图 1-2 所示的平面刚接结构中，在节点 1 处要求 $u=v=\theta=0$，在节点 3 处 $u=v=0$，在节点 5 处 $v=\theta=0$，同时在 x 方向的净力也等于零。

§1-4 方向余弦

在结构分析中经常要求将力(包括力偶)分解为沿正交坐标系的分量。这对确定平面问题的向量分量比较容易，但在空间问题中这样做就变得相当困难了。这时方向余弦的概念是非常有用的。一个向量的方向余弦定义为该向量与 x、y 和 z 轴的夹角的余弦，通常分别用 l、m、n 来表示。

例如图 1-8 所示的向量 F 沿 x、y 和 z 轴的分量为：

$F_x=F\cos\varphi_x$，因为 $\varphi_y=90°-\varphi_x$，故 $F_y=F\sin\varphi_x=F\cos\varphi_y$，因为 F 在 xy 平面内，故

$$F_z = F\cos 90° = 0.$$

换句话说，力F沿坐标轴的分量就是F与相应方向余弦的乘积。

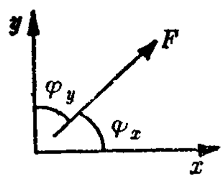

图 1-8

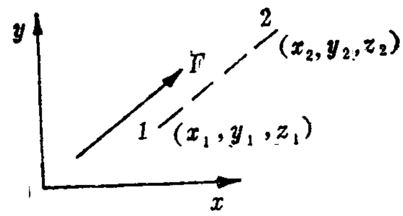

图 1-9

在很多情况下，用与向量平行的直线上的任意两点的坐标来确定方向余弦较为方便。例如，如果向量F平行于线段1-2如图1-9所示，则方向余弦为

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m = \frac{y_2 - y_1}{L}, n = \frac{z_2 - z_1}{L} \tag{1-5}$$

通常在结构矩阵分析中，这就是计算方向余弦的方法。

§1-5 杆件刚度矩阵的概念

杆件刚度矩阵确定了独立的杆端位移与相应的杆端力之间的关系，而这些杆端力并不一定必须是独立的量。

现以图1-10仅能承受轴向力作用的等截面直杆1-2为例。设杆端1和2的轴向位移分别为u_1和u_2，而相应的力分别为F_1和F_2。

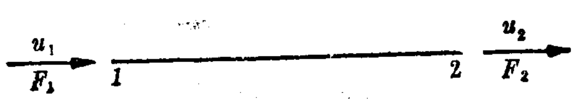

图 1-10

应该注意，因为平衡的要求必须使$F_1 + F_2 = 0$。换句话说，尽管u_1和u_2为独立量，F_1则随着F_2而变化或者相反。对于这种单元，力-变形关系可以推导如下：

净伸长量$= u_2 - u_1$

轴向应变=净伸长量$/L$

式中：L——杆件的长度。

轴向应力=轴向应变$\times E$

式中：E——杨氏模量。

轴向力=轴向应力$\times A$

式中：A——横截面面积。所以

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \frac{AE(u_2 - u_1)}{L} \\ F_1 &= -F_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

和

上述力-位移关系式可以用矩阵形式表示如下:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

这就是只能承受轴向力并只产生轴向位移的杆件的刚度矩阵。

现以图 1-11 所示的等截面受弯杆件作为另一个例子。这杆端 *1* 和 *2* 的位移分别为线位移 v_1、v_2 和转角 θ_1、θ_2。杆端 *1* 和 *2* 的相应杆端力分别为剪力 F_1、F_2 和弯矩 M_1、M_2。

正如轴向受力杆件的情况一样，平衡条件要求 $F_1+F_2=0$ 和 $M_1+M_2-F_2L=0$。换句话说四个力只有两个是独立的，例如 M_1 和 M_2 或 F_1 和 M_1，或者 F_2 和 M_2 等。

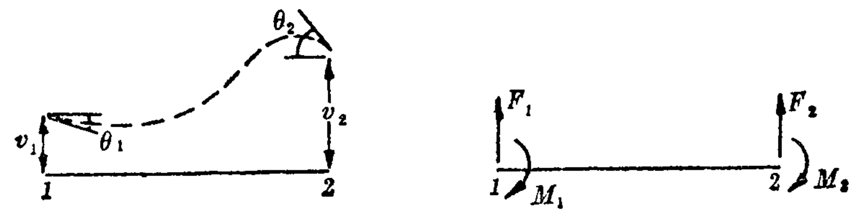

图 1-11

力和位移间的关系可由下列熟知的转角位移方程导出

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI}{L}\left[2\theta_1+\theta_2+\frac{3}{L}(v_2-v_1)\right] \\ M_2 &= \frac{2EI}{L}\left[\theta_1+2\theta_2+\frac{3}{L}(v_2-v_1)\right] \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

由平衡关系得到

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \frac{M_1+M_2}{L} \\ F_1 &= -F_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

和

式中: EI——抗弯刚度;

L——杆件长度。

上述关系可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

注意此刚度矩阵是对称方阵。这是刚度矩阵的通性。矩阵的对称性是由于马克斯威尔-贝蒂互等定理的缘故。

§1-6 杆件柔度矩阵的概念

杆件柔度矩阵确定了独立的杆端力与相应的杆端相对位移的关系。

以图 1-10 所示铰接杆件为例，由于只有 F_1 或 F_2 是独立的，柔度关系为 $F_2=(AE/L)\Delta$，这里 Δ 为净伸长。

同样，对图 1-11 所示的受弯杆件，如果选择 F_2 和 M_2 为独立力，以及 v_2 和 θ_2 为相应的位移，则前面导得的刚度关系式为:

$$F_2=\frac{2EI}{L^2}\left(3\theta_2+\frac{6v_2}{L}\right)$$

$$M_2=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_2+\frac{3v_2}{L}\right)$$

解出 v_2 和 θ_2:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{1-11}$$

这是受弯构件的一种可能形式的柔度矩阵。类似地，如果选取 M_1 和 M_2 为独立力，而 θ_1 和 θ_2 为相应的位移，则由转角位移方程得到:

$$M_1=\frac{2EI}{L}(2\theta_1+\theta_2)$$

和

$$M_2=\frac{2EI}{L}(\theta_1+2\theta_2)$$

根据 M_1 和 M_2 解出 θ_1 和 θ_2，则柔度关系为

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

这是受弯杆件另一种可能的柔度矩阵。注意，正如在刚度矩阵的情况下一样，柔度矩阵也是对称方阵。

§1-7 结构分析的两种基本方法

在结构矩阵分析方法中，通常采用两种基本方法。这两种方法是刚度法和柔度法。虽然这是两种理论上可能选择的基本方法，但在实际上总的来说刚度法可以导出简单的和有效的步骤，很容易在自动数字计算机上编制程序。柔度法则不能这样说。本书主要介绍刚度法。在后面的几章中，将用大量的例题说明刚度法在各种类型结构中的应用。下面扼要阐述这两种方法的基本步骤。

§1-7-1 刚度法

刚度法的基本步骤如下:

1. 确定结构各个节点上可能发生的独立位移即线位移和转角的总数。这些就是刚度法的

基本未知量。这就是本法有时也叫做位移法的由来。

2. 利用每根杆件(单元)的刚度矩阵，来求以杆端位移表达的杆端力即力和力偶。

3. 在结构上可能发生位移的每个节点处，建立已知外加荷载和汇交在节点上各杆内力之间的平衡方程。最后的平衡方程将用未知的节点位移来表示。

4. 解平衡方程组求出节点位移值。因为所求解的基本方程是平衡方程，所以这个方法有时也叫做平衡法。

5. 一旦求出节点位移，就可以由各杆件的刚度矩阵算出各杆内力。

§1-7-2 柔度法

柔度法的基本步骤如下:

1. 选择各杆的独立内力。

2. 在每个节点处建立各杆独立内力和外力之间的平衡方程，在支座节点处还要计入未知支座反力。

3. 建立结构的整体平衡方程。

4. 如果结构是静定的，则按上面 2、3 所建立的方程足够确定结构各杆的内力。另一方面如果结构是超静定的(有多余力)，则仅靠平衡方程不足以确定结构各杆的内力。这就是说虽然在2和 3 中方程的总数超过了各杆独立内力数和未知支座反力的总数，而 2 和 3 中的方程并非都是独立的。独立方程数目可由若当(Jordan) 消元法来确定。这将在柔度法一章中进行详细讨论。未知量总数和独立方程数之间的差值即为结构的超静定次数。

5. 利用各杆件的柔度矩阵，建立起数目恰好等于结构超静定次数的协调方程。这个步骤很复杂，将在柔度法一章中进行详细阐述。

6. 解协调方程即可确定结构的多余力。

7. 一旦确定了多余力，利用平衡方程就可以确定结构各杆的内力。

由于将杆件中的力和支座反力作为基本未知量，所以柔度法有时也称为力法；另外，由于能够决定结构中多余未知力的方程是协调方程，所以此法又称为协调法。

§1-8 对称与反对称

在结构分析中，运用对称和反对称的概念，经常可以在分析大型对称结构时大大减少计算机所需的存贮量。

对称结构是指一个结构对称于一条对称轴线，其左、右半个结构对于对称轴线互为镜像。图1-12所示为一些对称结构的例子。

在分析一个对称结构承受一般荷载作用时，为了简化分析的目的，必须将给定的荷载分解为对称分量和反对称分量，然后把每个分量作用在对称的半个结构上，进行分析。图 1-13 表示有一个对称轴的对称结构上，如何将一般荷载分解为对称荷载和反对称荷载。

图 1-14 所示为有两个对称轴的结构。在这种情况下，一般荷载可以分解为四组荷载:

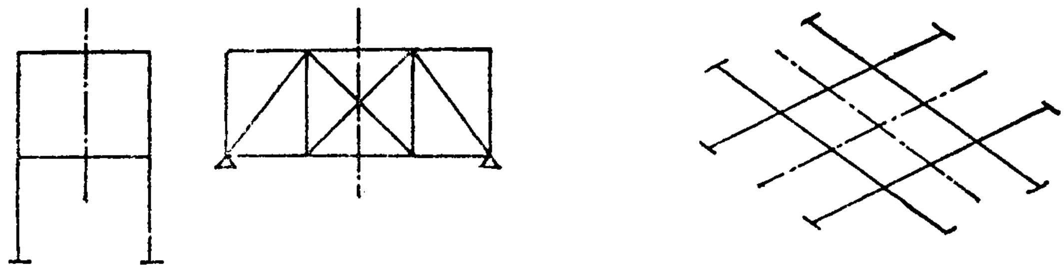

图 1-12

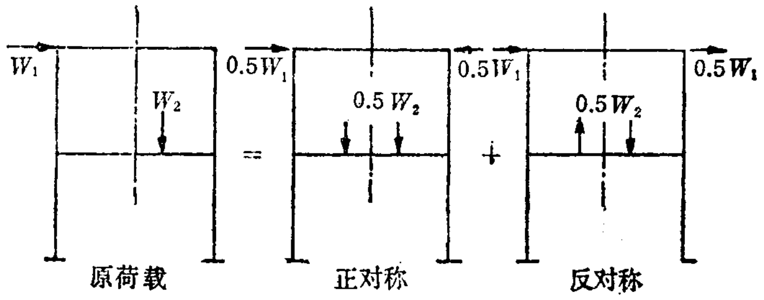

图 1-13

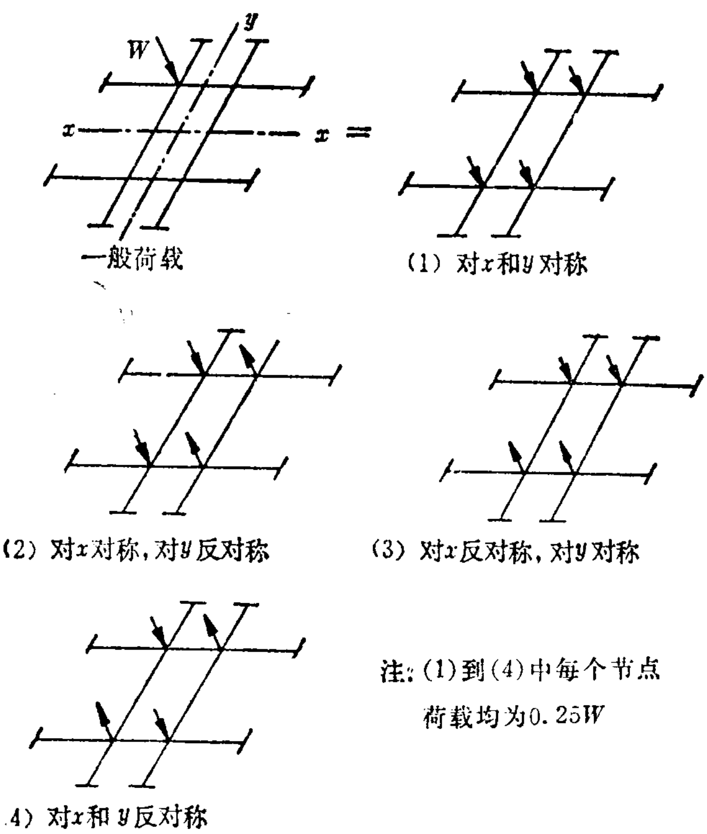

图 1-14

1. 对称于 xx 轴和 yy 轴的荷载;

2. 对称于 xx 轴但反对称于 yy 轴的荷载;

3. 对称于 yy 轴但反对称于 xx 轴的荷载;

4. 反对称于 xx 轴和 yy 轴的荷载。

§1-8-1 在对称荷载下沿对称轴的变形约束

因为这时只分析整个结构的左半部分，所以必须保证沿对称轴线的位移要与按整个结构分析时完全一样。这些约束为:

1. 平面铰接结构具有的约束要能阻止垂直于对称轴线的位移(图 1-15)。

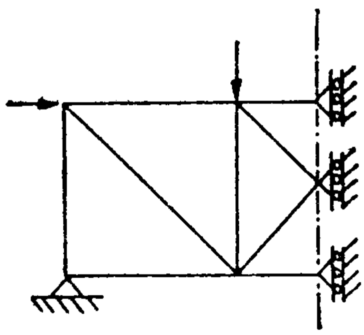

图 1-15

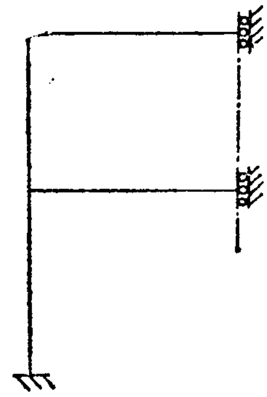

图 1-16

2. 平面刚接结构具有的约束要能阻止垂直于对称轴线的线位移和绕对称 轴的转角 (图 1-16)。

3. 平面交叉梁系具有的约束要能阻止绕对称轴的转角。

§1-8-2 在反对称荷载下沿对称轴线的变形约束

1. 平面铰接和刚接结构沿对称轴上平行于对称轴的线位移应为零(图 1-17)。

2. 平面交叉梁系结构在沿对称轴上垂直于结构平面的线位移应为零(图 1-18)。

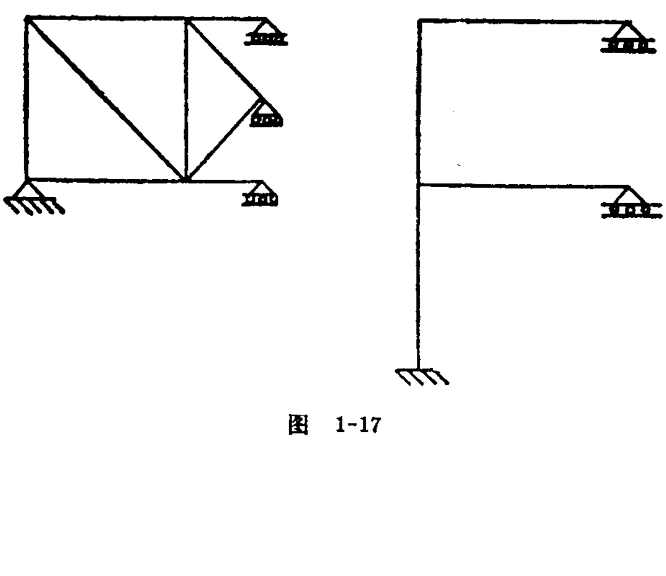

图 1-17

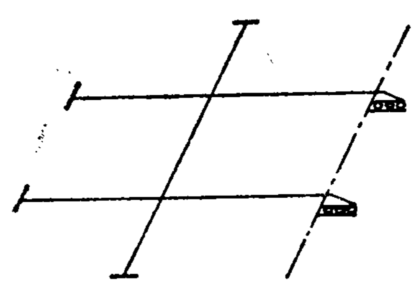

图 1-18

§1-8-3 仅在竖向荷载作用下非对称结构可按对称结构分析

图 1-19 所示结构除了左支座为固定铰支座而右支座允许水平位移外，在其它方面则是对称的。如果这种结构仅承受竖向荷载，则固定铰支座的水平反力应为零。这种结构可如图 1-20 所示按对称荷载和反对称荷载进行分析。主要须注意左支座的边界条件要能保证支座的水平反力为零。在对称荷载作用下在沿对称轴上垂直于对称轴的线位移应为零。所以为了防止结构具有拱一样的受力性能，左支座为可动铰支座。另一方面，当结构在反对称荷载作用下在沿对称轴上垂直于对称轴的力应当为零。所以左边的支座为固定铰支座，以便阻止整个结构的刚体位移。

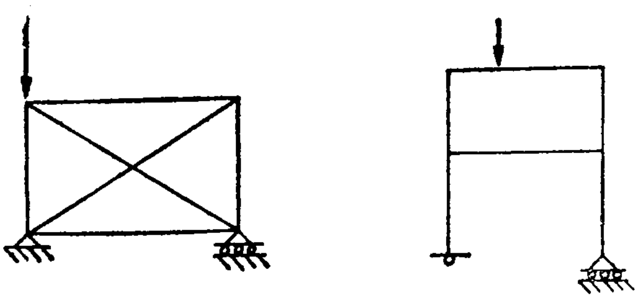

图 1-19

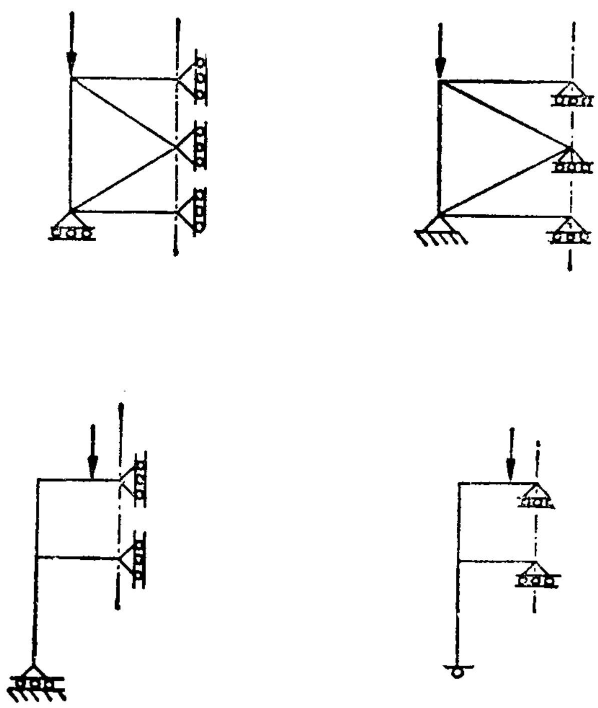

图 1-20

§1-8-4 沿对称轴的杆件的横截面面积和惯性矩

在对称荷载或反对称荷载作用下仅分析半个对称结构时，沿对称轴的杆件的横截面几何特性通常只取此杆件的一半。在某些情况下，例如一根杆件恰好沿平面刚接结构的对称轴，与采用某些几何特性的值无关，因为这种杆件不承受某些位移。然而为了避免出现错误，最好的办法还是采用整个杆件几何特性值的一半。

第二章　单元刚度矩阵的推导

单元刚度矩阵描述了单元两端的力和独立位移之间的关系。这是用刚度法进行结构分析时最重要的关系。如果已知结构所有单元的刚度矩阵，就可以利用协调和平衡要求来装配结构刚度矩阵。本章将对刚架结构和杆件结构的单元说明推导单元刚度矩阵的常用方法。有限元刚度矩阵的推导将在第十二章中讨论。

§2-1　推导单元刚度矩阵的方法

可以通过两种基本方法之一来推导单元刚度矩阵。这就是:

1. 解用有关位移表示的平衡微分方程。这是一种非常有效和通用的方法,并且只要有可能就可采用。如果微分方程是常微分方程型,一般能精确求解。在推导像杆件结构单元那样的"线元"刚度矩阵的过程中,常遇到这样的情况。然而，在推导像板和壳结构的单元一样的"有限元"刚度矩阵时,基本微分方程常常是各种类型的偏微分变量,而且往往无法精确求解。在这种情况下就要借助近似法来求解这些方程。近似解法很多,但在实际中最普遍的方法是伽辽金的加权残数法。

2. 最小能量(如总势能或总余能)泛函。结构力学中有很多的能量原理,而最常用的是应变能原理(卡氏定理)和余能原理(恩格塞定理)。这两个原理用途极广，特别是在推导"有限元"刚度矩阵时应用最多。

在进一步讨论之前，先推导几个在杆件结构中经常出现的典型单元的微分方程是很有帮助的。

§2-2　平衡微分方程的推导

1. 考虑图 2-1 所示的长度为 $\mathrm{d}x$ 的轴向受力单元。作用在距原点为 x 处截面上的轴力为 F。单位长度上的外加轴向分布荷载为 f。处于平衡时,沿 x 方向的力的总和:

$$F+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-F+f\mathrm{d}x=0$$

化简后得到:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}+f=0 \tag{2-1}$$

式(2-1)是用力 F 表示的平衡微分方程。式(2-1)也可以用轴向位移 u 来表示，这需要用到下面的 F 与 u 之间的关系:

$$\left.\begin{aligned}\text{轴向应变}&=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ \text{轴力}\ F&=AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

式中：AE 是轴向刚度。将 F 用 u 表示，得到用 u 表示的平衡微分方程：

$$AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+f=0 \tag{2-3}$$

2. 图 2-2 所示为一长度为 $\mathrm{d}x$ 的"扭转受力"单元。距原点为 x 处截面上的扭矩为 T，单位

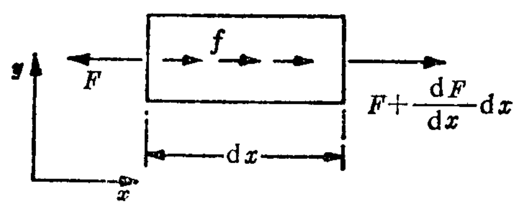

图 2-1

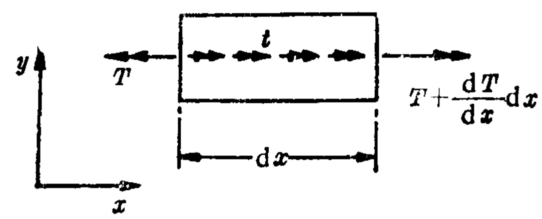

图 2-2

长度上的外加分布扭矩为 t。平衡条件要求：

$$T+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-T+t\mathrm{d}x=0$$

化简后得到：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+t=0 \tag{2-4}$$

为了把上面用力 T 表示的微分方程(2-4)转换为用位移即扭角 ψ 表示的微分方程，要用到下面的扭矩-扭角关系：

$$T=GJ\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \tag{2-5}$$

式中：GJ 是抗扭刚度。将式(2-5)的 T 代入方程(2-4)，得到用 ψ 表示的平衡微分方程：

$$GJ\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+t=0 \tag{2-6}$$

3. 图 2-3 表示在长度为 $\mathrm{d}x$ 的弯曲单元上的作用力：

M 是弯矩，使单元向下凹的弯矩为正；

Q 是剪力，顺时针向剪切为正；

F 是轴力，拉力为正；

q 是横向分布力，向下为正；

m 是分布弯矩，顺时针方向弯矩为正；

v 是沿 y 方向的挠度，沿 y 轴的正向为正。

沿 y 方向作用力总和：

$$Q+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-Q+q\mathrm{d}x=0$$