

应用偏微分方程

谷超豪 李大潜 沈玮熙 编著

高等教育出版社

应用偏微分方程

谷超豪 李大潜 沈玮熙 编著



高等教育出版社

(京)112号

本书的写作意图是通过几个经过选择的主题的简单介绍,使读者了解偏微分方程应用的一些基本内容和特点,以增强理论与实际密切结合、互相促进的意识和能力。其内容取材于有关书籍和论文,其中包括了作者及其研究集体的一些研究成果。

本书主要内容为:生物群体动力学、弹性波、激波、孤立波、反应-扩散问题、等值面边值问题。

本书可作为数学专业、应用数学专业高年级大学生选修课或研究生专业基础课的教材。

应用偏微分方程

谷超豪 李大潜 沈玮熙 编著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 230 000

1993 年 6 月第 1 版 1993 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—2 027

ISBN 7-04-004152-9/O·1195

定价 4.40 元

序

本书是为已学过《数学物理方程》或《数学物理方法》的读者编写的，可用作大学高年级选修课或研究生专业基础课的教材以及有关的教学参考书。我们希望通过几个经过选择的主题所作的简单介绍，帮助读者了解应用偏微分方程的一些基本内容和特点，并增强使理论与实际密切结合、相互促进的意识和能力。取材的内容散见于有关的书籍及论文，其中并包含了作者及其研究集体的一些研究成果，但只要掌握了大学数学系本科基础课内容，阅读本书将不会发生实质性的困难。各章基本上是相互独立的，内容不同，风格也各异，但总的精神是一致的，那就是：突出模型、方法与应用，力图反映应用偏微分方程这一学科的特色。在使用本书作为教材时，可以根据具体情况选讲其中的一部分章节，同时，在条件许可的情况下，提倡补充一些本书中尚未涉及或涉及不深、但同样能体现应用偏微分方程学科特色的内容进行讲授，以期能更好地达到开设本课程的目的。

原教育部的数学研究规划组在制定1986—2000年基础研究规划时，曾委托本书作者之一(李大潜)和武汉大学齐民友教授共同撰写了一份关于应用偏微分方程的专题调研报告。对应用偏微分方程的概貌及发展趋势等，在这一报告中有比较全面的评述。现将这份报告的有关部分稍加修改补充，作为本书的前言，可能对读者也会有较大的帮助与启发。

本书是1982年理科数学、力学教材编审委员会在杭州召开大会时，由微分方程教材编审组决定编写的，并于1983年在上海召

开的微分方程教材编审组第二次会议上初步审议了本书的编写大纲,以后相继在无锡(1985年)、昆明(1986年)、西安(1987年)及武汉(1989年)召开的历次微分方程教材编审组会上,都希望能尽快将此书出版.但由于杂事繁多,交稿时间一再推迟,深感抱歉.在这一过程中,却也使我们有机会从1983年起多次在复旦大学数学系开设了这门课程,对讲稿也不断进行了补充和修改.1990年底,在这些年教学实践的基础上,对讲稿作了全面的修订及加工,并提交在南京召开的微分方程教材编审组会议审议.这次,又参照在审议中各位专家所提出的一些改进建议,将全书正式定稿.在此,我们对参加微分方程教材编审组会议的专家所给予的热情鼓励和支持表示深切的谢意.

限于编者水平,书中不妥甚至错误之处在所难免,恳请专家及读者惠予指正.

编 者

一九九一年十二月于复旦大学

前 言

一、应用偏微分方程的历史与现状

很多领域中的数学模型都可以用偏微分方程来描述，很多重要的物理、力学学科的基本方程本身就是偏微分方程。从微积分理论形成后不久，长期以来，人们一直用偏微分方程来描述、解释或预见各种自然现象，并用于各门科学和工程技术，不断地取得了显著的成效。以应用为目的或以物理、力学等其他科学(包括数学的其他分支)中的问题为背景的应用偏微分方程的(定性及定量的)研究，不仅是传统应用数学的一个最主要的内容，而且是当代数学中的一个重要的组成部分。它是数学理论与实际应用之间的一座重要的桥梁，研究工作一直非常活跃，研究的领域日益扩大。

在本世纪30年代以前的近二百年中，紧密地联系着物理学、力学、几何学等方面的需要，对于几个在数学物理中最常见的偏微分方程(热传导方程、调和方程、波动方程等)已经有了系统的了解，并以多元微积分学(以及常微分方程、复变函数、线性代数等)为主要工具，形成了许多至今仍在广泛使用的有效方法。这些，都属于经典偏微分方程理论的范畴。其后，一方面是实践中不断提出新的研究课题，而电子计算机的出现又为偏微分方程的研究成果提供了强有力的实现手段，因而偏微分方程的应用领域前所未见地扩大了。另一方面，大量素材的积累进一步提出了将它系统化的任务；早在1900年，希尔伯特(Hilbert)为预见20世纪的数学发展所提出的23个著名问题中，有好几个都提出了建立系统的偏微分方程理论的必要性。30年代开始，在Sobolev空间理论上建

立起来的泛函分析方法，为处理线性及非线性偏微分方程的问题提供了一个强有力的框架和工具，并在实践中已得到广泛的应用，数值分析中现今常用的有限元素法就是以它为基础的。其后，从50年代开始，又以广义函数的出现为标志，提供了处理偏微分方程问题的又一种框架，在其中，许多经典的方法（突出的如 Fourier 分析）进一步发挥了重大的作用。在此基础上，以后还陆续出现了拟微分算子、Fourier 积分算子、微局部分析、超函数等新的强有力的理论和工具，不仅极大地改变了线性偏微分方程的面貌，并开始应用于处理非线性偏微分方程的问题。

在国外，对应用偏微分方程的发展是相当重视的。很多大学和研究单位都有应用偏微分方程方面的研究集体，并得到国家工业、科技部门及军方、宇航等方面的大力资助。如在国际上有重大影响的美国的 Courant 研究所、法国的 INRIA(信息与自动化国立研究所)等，都集中了相当多的偏微分方程的研究人员，并把数学模型、数学方法、应用软件及实际应用融合为一体，在解决实际课题、推动学科发展及加速培养人材等方面都起了很大的作用，并出版了相应的刊物。同时，还经常围绕应用偏微分方程的某一专门主题召开有关的学术会议或讨论班。

在我国，偏微分方程的研究与其他一些数学分支比较起步较晚。但早在30年代即有少数数学家在欧洲从事有关的研究，得到当时可说是最好的导师的熏陶，他们是我国第一代偏微分方程学者。解放后，党和国家根据社会主义建设的迫切需要，大力号召和支持开展偏微分方程的研究，在前辈学者的关心培养下，从50年代到60年代中期，大批年轻的数学工作者陆续加入了偏微分方程的研究队伍，有些同志还到苏联进修学习。在这段时期中，我国偏微分方程的研究工作发展比较迅速，不仅有不少同志取得了较好的研究成果，而且还有相当一部分同志转入各个应用领域，并发挥

了重大的作用。这一批同志目前都已成了骨干的力量。1976年以后，在十年动乱期间被迫停顿的偏微分方程的教学科研工作得到恢复和发展。近年来，通过派出去、请进来等方式，加强了与国外学者的交流和联系，进一步促进了偏微分方程研究工作的开展，缩短了与国际先进水平的差距，青黄不接和知识老化的情况有了相当程度的改善。

目前，在我国高校系统中属于应用偏微分方程范围的教学科研人员有一定的数量，在有些单位中已有一支比较齐整的队伍，开设了有关的基础课、选修课及讨论班，并进行了研究生的培养，在为四化建设服务及学科本身的发展方面，历年来已作出一些较好的成绩。但总的说来，研究队伍的组织水平，研究工作的广度和深度，与四化建设的迫切需求及世界先进水平均还有相当大的距离，因此我们还必须继续努力，大力加强应用偏微分方程的研究，以适应四化建设的需要和缩小与世界先进水平的差距。

二、应用偏微分方程在我国科技与经济发展中的作用

我国的四化建设中很多重要的实际课题都需要求解偏微分方程，为相应的工程设计提供必要的参数，保证安全可靠且高效率地完成。其中有不少课题（特别是一些国防课题），是不能或很难用工程试验的方法来进行研究的，至少也应该尽可能地减少试验的次数或要求在试验前作较准确的预计。

在处理这些实际课题（包括其他科学领域中的一些理论课题）时，电子计算机已越来越成为一个重要的工具。要能有效地利用电子计算机来解决一个实际课题，其先决条件是：

●建立合理的数学模型。对决定性的现象，这种数学模型大量是通过偏微分方程来描述的。

- 对相应的偏微分方程进行定性的研究.
- 寻求或选择有效的求解方法,特别是数值求解方法.
- 编制高效率的程序或建立相应的应用软件.

这些在总体上均属于应用偏微分方程的研究范围,解决得好坏直接影响到使用计算机所得结果的精度以及耗费的大小.抓住了这一环,就抓住了关键,就能起到事半功倍的效果.应用偏微分方程在解决国内有关高速飞行、石油开发、机械设计等方面重大实际课题中取得成功的例子已充分地说明了这一点.

同时,由于同一类型的偏微分方程往往可以用来描述许多性质上颇不相同的自然现象,对一些重要的应用偏微分方程开展研究,可以有多方面的应用前景,并可望在新兴学科或边缘学科的开发中及时地发挥作用.

三、应用偏微分方程的发展趋势

应用偏微分方程的发展,在现时有如下的特点和趋势:

●很多意义重大的自然科学和工程技术问题都归结为非线性偏微分方程的研究,而且随着研究的深入,有些原先可用线性偏微分方程作近似处理的问题,也必须考虑非线性项的影响.因此,现时应用偏微分方程研究的主体是非线性偏微分方程.它的难度大,很难用一个统一的方法来加以处理,其研究往往更紧密地结合着相应的物理模型,用不同的方法来处理各种不同性质的问题,现已取得不少深入的成果,很有发展前途.与此同时,对线性偏微分方程的深入研究仍有其重要性,这对非线性偏微分方程的研究,也是一个必要的基础.

●一些重要的物理、力学学科的基本方程(如流体力学方程组、弹性力学方程组、Maxwell方程组、Schrödinger方程、Einstein方程、KdV方程、Yang-Mills方程…)已先后成为比较熟知而重

要的应用偏微分方程，并在相应的学科中起着具有基本重要性的作用。对这些方程的研究已具有相当的规模与深度，但仍有很多重要而且基本的理论和实际问题亟待深入研究。在此基础上，由于考虑到几种因素的联合作用和相互影响，还出现了反应扩散方程、电磁流体力学方程组、辐射流体力学方程组等，进一步开拓了应用偏微分方程的研究对象和应用范围。

●除传统的领域外，在化学、生物学甚至社会科学等非传统的应用领域内，也不断归结出一些重要的偏微分方程，成为应用偏微分方程发展的一个新的重要的源泉。

●在数学的其他分支，特别是整体微分几何的研究中，不断提出了一些有重要意义的非线性偏微分方程(如Monge-Ampère方程、极小曲面方程、调和映照方程等等)，引起了广泛的注意与重视，并已作出了出色的成果。

●在对具体方程及问题进行研究的基础上，逐步过渡到对某一类问题建立适当的框架，作系统的研究。

●在很多实际模型(如地球物理、生物学、生态学…)中提出了越来越多的非局部边值问题，其中偏微分方程或(和)边界条件的某种算子的方式依赖于未知函数。对这些非局部边值问题的研究，开拓了应用偏微分方程的一个广阔而富有意义的研究领域。

●对偏微分方程的反问题的研究近年来越来越活跃，它在诸如地球物理探矿、计算机化分层扫描构象等方面有重要的应用，在理论上也有重要的意义，已成为应用偏微分方程最有希望的发展方向之一。

●应用偏微分方程的发展不断促进着许多有关联的数学分支的发展；与此同时，愈来愈多的现代数学工具(泛函分析、拓扑、群论、微分几何和代数几何，多复变函数论…)被用于处理应用偏微分方程中的问题，有的已逐步发展为现代应用偏微分方程研究中

的常用方法。

●在具体处理应用偏微分方程问题时，还不断提出了一些暂时虽然没有建立严格的数学基础，但在实际中却行之有效的办法。提出这种“启发性”的方法并予以总结提高，是应用偏微分方程值得注意的研究内容。例如偏微分方程的渐近方法，近年来发展很快，值得予以重视。

目 录

前言	1
第一章 生物群体动力学	1
§ 1 人口模型	1
1.1 人口问题的常微分方程模型	1
1.2 人口问题的偏微分方程模型	6
1.3 解的存在唯一性及递推表达式	10
1.4 解的性质	14
1.5 对模型的进一步分析与讨论	15
1.6 威尔霍斯特型的偏微分方程人口模型	19
§ 2 传染病动力学模型	20
2.1 传染病动力学的常微分方程模型	20
2.2 传染病动力学的偏微分方程模型	27
习题	33
参考资料	33
第二章 线性波	35
§ 1 弹性力学基础	35
1.1 应变	36
1.2 应力	40
1.3 虎克定律	46
1.4 弹性力学基本方程组	50
§ 2 线性波的一个物理模型——弹性体的振动	52
2.1 弹性动力学基本方程组	52
2.2 弹性波的传播——膨胀波和畸变波	54
2.3 弹性波的传播——表面波	58
§ 3 弹性波的反射	62

3.1	入射波和反射波	62
3.2	平面波在自由界面上的反射——入射 P 波情况	67
3.3	平面波在自由界面上的反射——入射 SV 波情况	70
3.4	平面波在自由界面上的反射——入射 SH 波情况	74
3.5	平面波在固定界面上的反射——入射 P 波情况	74
3.6	平面波在固定界面上的反射——入射 SV 波情况	76
3.7	平面波在固定界面上的反射——入射 SH 波情况	77
§ 4	弹性波的折射	78
4.1	弹性波在交界面上的反射和折射	78
4.2	弹性波在交界面上的反射与折射——入射 P 波情况	80
4.3	弹性波在交界面上的反射与折射——入射 SV 波情况	85
4.4	弹性波在交界面上的反射与折射——入射 SH 波情况	85
§ 5	几何光学近似	86
5.1	几何光学与波动光学	86
5.2	波动方程的特征和次特征	89
5.3	几何光学近似	92
	习题	96
	参考资料	96
第三章	激波	97
§ 1	追赶问题	97
1.1	追赶问题	97
1.2	疏散波与压缩波	101
§ 2	交通模型	103
2.1	连续流模型	103
2.2	不连续流模型——激波	107
2.3	间断稳定性条件	111
§ 3	气体动力学方程组	114
3.1	气体动力学方程组	114
3.2	一维流、柱对称流及球对称流	124
3.3	间断条件、激波	135
3.4	激波的反射	139

§ 4	量纲分析方法	141
4.1	量纲	141
4.2	量纲分析	144
§ 5	气体动力学方程组的自模解	148
5.1	气体的自模运动	148
5.2	自模运动的一些实例	151
5.3	自模运动的微分方程组	155
5.4	自模运动的间断条件	156
	习题	159
	参考资料	160
第四章	孤立波	161
§ 1	KdV 方程的物理来源	161
1.1	关于孤立波的历史回顾	161
1.2	KdV 方程的导出	163
§ 2	KdV 方程和线性可积系统, Backlund 变换	169
2.1	Lax 对	169
2.2	Backlund 变换, Darboux 变换	171
§ 3	反散射方法	175
3.1	散射问题	175
3.2	反散射问题	179
3.3	KdV 方程的反散射解法	183
§ 4	其它的孤立子方程	189
4.1	Sine-Gordon 方程	189
4.2	MKdV 方程	191
4.3	非线性薛定谔方程	192
4.4	AKNS 系统	192
	习题	193
	参考资料	194
第五章	反应—扩散	195
§ 1	反应—扩散方程(组)	195

1.1	化学反应扩散方程(组)	195
1.2	化学反应项的决定	197
1.3	在生物群体动力学中的应用	199
1.4	反应扩散方程(组)	200
§ 2	行波解	201
2.1	行波解	201
2.2	波前解	204
2.3	初值问题正解关于波速 c 的单调性	208
2.4	波前解的存在性	211
§ 3	比较定理	225
3.1	比较定理	225
3.2	上、下解方法	227
§ 4	解的渐近性态	235
	习题	240
	参考资料	241
第六章	等值面边值问题	242
§ 1	引言	242
§ 2	问题的归结	244
2.1	电缆周围的稳定温度场	244
2.2	带电导体外的静电场	246
2.3	稳定电流的电场	247
2.4	空心柱形杆的弹性扭转	250
§ 3	与典型局部边值问题的联系	257
§ 4	变分原理和广义解	261
§ 5	解的极限性态	265
§ 6	边界条件的均匀化	267
§ 7	发展方程的情形	269
	习题	271
	参考资料	272

附录 常微分方程几何理论	273
1. n 维自治系统, 轨线	273
2. 二维线性自治系统的平衡点.....	275
3. 二维非线性自治系统的平衡点.....	281
4. 二维自治系统解的全局结构.....	284

第一章 生物群体动力学

§ 1. 人口模型

1.1 人口问题的常微分方程模型

我们从研究大家都感兴趣的人口问题开始，要对人口的发展建立一个用偏微分方程描述的数学模型。

首先从最简单的情形，即从用常微分方程描述的模型开始，再逐步深化。

这儿所说的人口，并不一定限于人，可以是任何一个生物群体，只要满足类似的性质即可。

由于人口的总数很多，可以用一个连续模型来描述。设在时刻 t 时人口总数为 $p(t)$ ，它是 t 的一个连续可微函数， $p(t)$ 不是整数的值也是可以容许的。了解了函数 $p(t)$ ，也就掌握了人口的发展动态。

现在导出 $p(t)$ 应满足的微分方程。

(1.1) 在时段 $[t, t + dt]$ 中的人口增长量 $= p(t + dt) - p(t)$

$$= \frac{dp(t)}{dt} \cdot dt \textcircled{1},$$

它应等于此时段中的出生数减去死亡数。设 b 为出生率， d 为死亡率，则有

① 这儿及今后，我们都将高阶无穷小量略去不计。这样做，自然不会影响最后的结论，但却可使叙述变得简明。