

科學圖書大庫

單變數與多變數函數

譯者 趙文敏

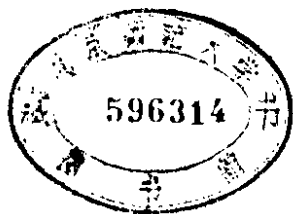
徐氏基金會出版

科學圖書大庫

單變數與多變數函數

譯者 趙文敏

JY1/46/16



徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年九月七日再版

單變數與多變數函數

基本定價 1.60

譯者 趙文敏 國立師範大學數學系理學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 福村彩色印刷有限公司 電話：5510540

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為科幻者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鑑氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於為國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

原 序

本書（共三冊）是從 Videregaende Matematik 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是為化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是為將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的研究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更為廣泛。

為科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可用性。為達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一冊包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一冊能在一學期內授畢，第二冊為多（實）變量函數論，在此冊中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一冊及第三冊的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三冊包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本冊與其他兩冊所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵值及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號(*)之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一冊後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該冊後再讀之，將有莫大的助益。

感謝 Brian Phillips 和 Pecter Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及 H. Rosenberg 教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或費

IV

解處，不應該責難他們，又 Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert 女士打首稿，及 Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A. Bak
Jonas Lichtenberg
於丹麥哥本哈根

目 錄

原 序

3 單變數函數

3-1	單變數之實值函數	1
	函數之概念	1
	實值函數	2
	數列	4
	函數之極限	5
	函數之連續	6
	消沒函數	8
3-2	定積分	9
	定積分之定義	9
	幾何解釋	10
	定積分之某些規則	12
	積分之均值定理	12
3-3	可微分函數	14
	導數之定義	14
	微分之規則	16
	微分	17
	合成函數	19
	反函數	20
	導數之均值定理	22
3-4	不定積分	25
	始原函數之存在性	25
	基本定理	26
	積分公式	27
	定積分	29
3-5	Taylor 氏公式	31

	Taylor 氏公式之應用	33
	Taylor 氏公式之另一種形式	34
	L'Hopital 氏規則	35
3-6	三角函數之反函數	38
	三角函數	38
	反餘弦函數	39
	反正弦函數	41
	反正切函數	43
	反餘切函數	44
	幾個不定積分	45
3-7	對數函數	47
	自然對數	47
	其他對數函數	49
	對數標尺	50
	半對數格紙	51
	半對數格紙之使用	52
3-8	指數函數	53
	對數函數之反函數	53
	函數 e^x	54
	指數函數與半對數格紙	56
3-9	冪函數	57
	冪函數	57
	對數格紙	59
	一些重要函數當 $x \rightarrow \infty$ 時之性質	59
3-10	雙曲線函數	61
	cosh 之反函數	62
	sinh 之反函數	64
	tanh 及 cot h 之反函數	66
3-11	不定積分	68
	有理函數之積分	68
	根式之積分	69
	可介紹新函數之積分	70
3-12	定積分	72

	廣義積分.....	72
	Gamma 函數.....	74
3-13	數學在其他科學.....	76
	嚴密與數學.....	76
	數個重要例題.....	77
3-14	單實函數之向量值函數.....	80
	向量函數.....	80
	向量函數之圖形.....	81
	向量序列.....	82
	向量函數之連續.....	82
	向量函數之可微分性.....	84
	Taylor 氏公式.....	85
	弧長.....	87
	粒子之運動.....	88
3-15	極坐標.....	90
	坐標系.....	90
	平面極坐標.....	90
	極坐標之方程式.....	91
	無限小之討論.....	92
	球面坐標.....	94
	柱面坐標.....	95
3-16	複值函數.....	96
	複數與極坐標.....	96
	單複變數之複值函數.....	97
	單實變數之複值函數.....	98
	複值指數函數.....	99
4	多變數函數	
4-1	多實變數之實值函數.....	101
	極限.....	102
	連續.....	103
4-2	多實變數之可微分函數.....	105
	偏導函數.....	105

	可微分性	106
	可微分之一充分條件	107
	全微分	108
	向多變數函數推廣	109
	合成函數	110
	方向導數	112
	齊次函數	113
	Leibniz 氏規則	114
4-3	Taylor 氏公式	116
	高階偏導數	116
	二變數函數之 Taylor 氏公式	117
	二變數函數之極值	119
4-4	全微分	123
	二變數函數之始原函數	123
	一必要條件	124
	積分因子	127
	推廣至多變數函數之情形	128
4-5	線積分	129
	線積分之定義	130
	線積分與全微分	134
	線積分在熱力學上之應用	135
	推廣至多變數之情形	138
	線積分在力學上之應用	139
4-6	二重積分	142
	二重積分之定義	142
	直角坐標系中二重積分之簡化	143
	二重積分在極坐標系中之簡化	149
	Green 氏定理	154
	二重積分之應用	156
4-7	三重積分	159
	三重積分之定義	159
	三重積分在直角坐標系中之簡化	160
	三重積分在柱面坐標系中之簡化	164

	三重積分在球面坐標系中之簡化	166
	三重積分之變數變換	168
	無限小觀念之誤用	171
4-8	面積分	174
	面積分之定義	174
	面積分之計算	175
4-9	向量分析	177
	純量與向量場	177
	已知向量場之不同表示法	178
	斜率場	179
	斜率向量場之幾何解釋	180
	向量場之旋轉與發散度	181
	前述各向量純量場之關係	182
	Gauss 氏定理	183
	Gauss 氏定理之應用	184
	Stokes 氏定理	186
	三變數函數之全微分	187
4-10	二實變數之向量值函數	189
	連續之向量函數	189
	可微分之向量函數	191
	可微曲面	192
	可微曲面之面積	194
索引		198

3 單變數函數

3-1 單實變數之實值函數

函數之概念

下面吾人將考慮者係所謂單實變數之實數函數 (real-valued function of one real variable)。在正式加以討論之前，吾人擬將一般之函數概念略作說明。

設 A 與 B 為任意之已知集合，若對於 A 之每一元素 B 必有一且僅有一元素與之對應，則吾人稱此對應為由 A 映至 B 之一函數或由 A 至 B 之一映像。若 x 為 A 之一元素，則於 B 中 x 之對應元素以 $f(x)$ 表之，而稱為函數 f 在自變數 (argument) x 處之值或稱為 x 依函數 f 之像。

集合 A 稱為函數之定義域。而 B 之元素中係 A 之某元素之像者所成之集合稱為函數之值域。值域可能為 B 亦可能不等於 B ；若 f 之值域為 B ，則稱 f 為由 A 映成 B 之函數。若 f 之值域中每一元素恰為 A 之一元素之像，則 f 稱為一對一函數。(圖 3-1)。

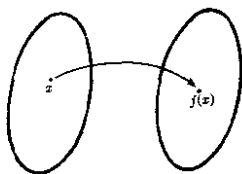


圖 3-1

設 f 為由 A 映成 B 之一個一對一函數，則可定義一個由 B 映至 A 之新函數 f^{-1} ，稱為 f 之反函數，如下：對於 B 中任一元素 y ，像 $f^{-1}(y)$ 為 A 之唯一確定元素使 $f(f^{-1}(y)) = y$ ，亦即 $f^{-1}(y)$ 為 A 之一元素，此元素依函數 f 之像為 y 。依此立即可得，對於 A 之任意元素 x ，恆有： $f^{-1}(f(x)) = x$ 。

在第一冊書中吾人已攷慮過一種重要之函數，即由 N 維向量所成之集合映至此集合本身之綫性向量函數。吾人已知若此向量函數之定義矩陣 (defining matrix) 之行列式不為零，則此綫性向量函數有一反函數。

實值函數 (real functions)

下列各節中吾人將攷慮單實變數之實值函數 (real valued function of one real variable)，或簡稱為實函數，此種函數即由集合 A 映至集合 B 者，其中 A 與 B 皆為由實數所成之集合。

設 f 為一實函數，則對於定義域內任一元素 x ，其像通常記為 y 。依此吾人得 $y = f(x)$ 。只要作為 x 之像的 $f(x)$ 是一個明顯之表式 (expression) (而集合 A 與 B 又由上下文可看出) 則函數 f 即可由方程式 $y = f(x)$ 完全地決定：將 A 之任何元素代入方程式之右端即可得出其在 B 中之對應元素。此處之 x 通常稱為自變數 (independent variable) 而 y 稱為因變數 (dependent variable)， y 稱為 x 之一函數。

所謂函數 f 有一反函數，此敘述與下一敘述同義：對於 B 中任意元素 y ，方程式 $y = f(x)$ 恰有一屬於 A 之解。如前所述，此解記為 $f^{-1}(y)$ 。因此，此反函數可以方程式 $x = f^{-1}(y)$ 表之，此時 y 為自變數而 x 為因變數。

於 XY 坐標系 (通常取右旋坐標) 中，函數 f 之圖形就是坐標為 (x, y) 之點所成之集合，其中 x 屬於 A 而 $y = f(x)$ 。若 f 之反函數存在，只要吾人以方程式 $x = f^{-1}(y)$ 表示此反函數，則上述之點集合亦可視為此反函數之圖形。

倘若吾人堅持以 x 表示自變數 (而 y 表示因變數)，則 f 之反函數應以方程式 $y = f^{-1}(x)$ 表示，在此種情形下， f^{-1} 之圖形是 f 之圖形對直綫 $y = x$ 之反射像，亦即二圖形對直綫 $y = x$ 成對稱。

已知二實函數 f 與 g ，若 f 與 g 之定義域 A 相同則可定義數個新函數如下： f 與 g 之和， $f + g$ ，為一函數，其定義域為 A 而對於 A 之任意元素 x ，其像為 $f(x) + g(x)$ 。仿此二者之差， $f - g$ ，二者之積，而——只要 g 之值域不包含零，——則二者之商 f/g ，等皆可定義。

最後，若 g 之值域包含於 f 之定義域中，則又可定義另一新函數如下：

二函數 g 與 f 之合成函數定義為一函數，其定義域與 g 之定義域相同而且對於定義域之任意元素 x ，其像為 $f(g(x))$ 。 g 與 f 之合成函數以 $f \circ g$ 表之。

在前面之討論中，吾人係以字母 f 來表示函數本身，而 $f(x)$ 係用來表示該函數之值。不過這只是個原則，在實用方面不妨從權。也就是說，吾人可以使用形如“函數 $y=f(x)$ ”之語句甚至使用“函數 $f(x)$ ”。並且當吾人使用此種形式之語句時，該函數之定義域——如無特別聲明——視為表式 $f(x)$ 有意義之所有實數所成之集合。此後吾人也將經常使用“ $y=f(x)$ ”之寫法，此式讀為“ y 是 x 之一函數”；其意當然是說明吾人所考慮者為某一函數 f ，其中自變數為 x 而因變數為 y 。

依照上述之約定，吾人可將和函數及合成函數之定義重述如下：兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之和定義為函數 $y=f(x)+g(x)$ ；兩函數 $u=g(x)$ 與 $y=f(u)$ 之合成函數為函數 $y=f(g(x))$ 。

例 3-1 試考慮由所有實數所成之集合映至所有實數所成之集合之一函數 f ，此函數在任意實數 x 之函數值為 $f(x)=2x-3$ 。依上述之約定，此函數可簡稱為函數 $y=2x-3$ ，而 $-\infty < x < \infty$ ，或是更簡略地寫成 $y=2x-3$ 。依上述之聲明吾人了解此函數之定義域為所有實數所成之集合。依下圖所示，此函數之圖形為一直線。

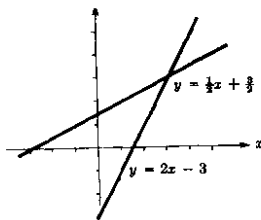


圖 3-2

將上式之 x 解出，則可看出此函數有一反函數，此反函數定義於所有實數 y ，對於每一 y 值恰有一解 $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ 與之對應。此即反函數之表式。

(參看圖 3-2)。

以 $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ 表示反函數，則圖形不變。但若吾人將自變數與因變數

之名稱調換，即以表式 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 表示反函數，則此反函數之圖形就變成原函數圖形對直線 $y = x$ 之反射像。

此處函數 $f \circ f$ 係表示函數 $y = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ ，而函數 $f \circ f$ 為 $y = 2(2x - 3) - 3$ 或 $y = 4x - 9$ □

數列 (sequence)

無窮數列之概念在多數有關函數之問題的討論上，是一個很重要之工具。所謂一（無窮）序列乃是定義域為所有正整數所成之集合之一函數。若一序列記為 a ，則 a 在 n 之值通常記為 a_n 而稱為此序列之第 n 元素 (the n th element)。此序列本身通常記為 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 。

以下吾人將討論由實數所成之數列，即各項元素為實數之數列。對於實數所成之數列，若下一敘述為真則此種數列 a 稱為收斂數列且極限為 α ，或稱 a 收斂於 α ：對於任意之已知正數 ϵ ，不論其值多麼小，吾人可決定一正數 N ，使得所有 $n > N$ 之正整數 n 皆滿足 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ ，此敘述以：當 $n \rightarrow \infty$ ，則 $a_n \rightarrow \alpha$ 表之。〔當 n 趨近（正）無限大時， a_n 趨近於 α 〕或記為 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 〔當 n 趨近（正）無限大時， a_n 之極限為 α 〕。

例 3-2 設 $a_n = k$ ，則當 $n \rightarrow \infty$ 時， $a_n \rightarrow k$ 。因為對於每一正整數 n ，恆有 $|k - k| < \epsilon$ ，不論 ϵ 之值為何皆成立。設 $b_n = \frac{1}{n}$ ，則當 $n \rightarrow \infty$ 時， $b_n \rightarrow 0$ 。因為對於 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 之每一正整數 n ， $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ 皆成立，又 $a_n = (-1)^n$ 沒有極限。 □

若數列 a 沒有極限，則稱 a 為發散數列或 a 發散。若發散數列合於下述條件，則特稱為發散於（正）無限大（負無限大）：對於任意之已知正數 K ，不論其值多麼大，吾人可決定一正數 N ，使得所有 $n > N$ 之正整數 n 皆滿足 $a_n > K$ ($a_n < -K$)。此敘述記為：當 $n \rightarrow \infty$ 時， $a_n \rightarrow \infty$ ($-\infty$)。

例 3-3 設 $a_n = \sqrt{n}$ ，當 $n \rightarrow \infty$ 時， $a_n \rightarrow \infty$ 。因為對於 $n > K^2$ 之每一正整數 n ， $\sqrt{n} > K$ 皆成立。設 $b_n = n^2 - 2n$ ，則當 $n \rightarrow \infty$ 時， $b_n \rightarrow \infty$ 。因為對於 $n > 1 + \sqrt{1 + K}$ 之每一正整數 n ， $(n^2 - 2n) > K$ 皆成立。設 $c_n = n(-1)^n$ ，則 c 為一發散數列，但既非趨近正無限大亦非趨近負無限大。 □

已予二數列 a 與 b ，吾人可將二者結合而得新數列 $a + b$ ， $a - b$ ， $a \cdot b$ 。

與 $\frac{a}{b}$ 。當然，在最後一式 $\frac{a}{b}$ 中必須假定零不屬於 b 之值域。若 a 與 b 二者皆為收斂數列且極限分別為 α 與 β ，則上述四新數列亦皆收斂，其極限分別為 $\alpha + \beta$ ， $\alpha - \beta$ ， $\alpha \cdot \beta$ ，及 $\frac{\alpha}{\beta}$ ，當然後者須有 β 不等於零之條件限制。至於上述有關收斂數列之基本運算規則之證明只要根據收斂之定義立即可得。

依前段所述，若有數個已知之收斂數列，而將各數列之第 n 元素施行一連串之數學運算時，此等運算可“移至”對應之極限：由已知數列之第 n 元素施行運算所得之新數列必為收斂數列，其極限就是將各對應之極限施行同樣之運算所得之結果（當然其中必須有分母不為零之限制）。

例 3-4

$$a_n = \frac{5n^2 + 1}{n^2 - n} = \frac{5 + (1/n)(1/n)}{1 - (1/n)} \rightarrow \frac{5 + 0.0}{1 - 0} = 5 \quad (\text{當 } n \rightarrow \infty) \quad \square$$

函數之極限 (Limits of functions)

在本節以後，吾人把“數 x ”與“點 x ”二式視為同義，混合使用。所謂點 x_0 之 δ -近傍 (δ -neighborhood of the point x_0) 吾人意指由滿足 $|x - x_0| < \delta$ 之所有實數 x 所成之集合。而所謂點 x_0 之去心 δ -近傍 (deleted δ -neighborhood of x_0) 則是由滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 之所有實數 x 所成之集合。

今設 f 為一函數，此函數定義於點 x_0 之一個去心 δ -近傍，但 f 在 x_0 不必有意義（即 x_0 可以不屬於 f 之定義域）。若下述條件成立，則稱 f 在 x_0 有極限 (limit) c ：對於 f 之定義域中之點所成之每一數列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，其中各元素皆異於 x_0 ，恆有：只要此數列收斂於 x_0 ，則 f 函數值所成之對應數列必收斂於 c 。若 f 在 x_0 有極限 c ，則吾人記為：當 $x \rightarrow x_0$ 時， $f(x) \rightarrow c$ 。（當 x 趨近 x_0 時， $f(x)$ 趨近於 c ）或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ 。（當 x 趨近於 x_0 時， $f(x)$ 之極限為 c ）。

假定吾人將前述之數列限定為自右收斂於 x_0 ($x_n > x_0$) 而對應之 f 函數值所成之數列皆收斂於 c ，則自然地，吾人稱此函數 f 在 x_0 有右極限 (right-hand limit) c 。（當 $x \rightarrow x_0 + 0$ 時 $f(x) \rightarrow c$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = c$ ）。仿上述

之情形，吾人可定義“函數 f 在 x_0 有左極限”一敘述之意義（當 $x \rightarrow x_0 - 0$