



中学数学丛书

程汝霖

因式分解



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU



因式分解

程 汝 霖

湖 北 教 育 出 版 社

中学数学丛书
因 式 分 解
程汝霖

*

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 4.25印张 1插页 94,000字

1983年9月第1版 1983年9月第1次印刷

印数: 1—38,500

统一书号: 7306·32 定价: 0.41元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识，这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》，根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究人员共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的同时，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师 and 教学研究人员，以及教学经验丰富的中学教师，编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

出版说明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

前 言

因式分解是初等数学中最重要的基本方法之一. 在数学中, 有许多问题的解决, 都要用到因式分解. 例如, 解方程式、分式化简和三角式变形等都是如此.

本书主要是为中学生课外阅读而写的, 对因式分解的方法和应用, 作了比较详细的阐述, 特别是收集了近几年来有关杂志上发表的关于因式分解的新方法比较多, 几乎是每一种方法都作了理论上的证明, 这些证明中学生都能看懂.

为了使读者能较好地掌握因式分解的各种方法, 本书里举了较多的例题, 还编选了一定数量的练习题, 希望通过这些例题和习题来说明一些思考问题的方法, 使读者对于解题的方法, 不仅知其然, 而且知其所以然. 为了便于读者自己检验, 书里的一些练习题都附有答案, 较难一点的题目, 还附有提示.

本书初稿完成后, 曾由武汉大学数学系张远达教授审阅, 在此表示衷心的感谢.

本书虽经多次修改, 但由于编者的水平所限, 一定会有谬误和缺点, 殷切地期望广大读者批评指正.

编 者

1982 年10月

目 录

第一章 因式分解的基本方法	1
§ 1. 什么是因式分解.....	1
§ 2. 提公因式法.....	4
§ 3. 分组分解法.....	6
§ 4. 公式法.....	19
§ 5. 十字相乘法.....	28
第二章 用待定系数法分解因式	50
§ 1. 什么是待定系数法.....	50
§ 2. 用待定系数法进行因式分解.....	56
§ 3. 用待定系数法分解三、四次多项式的因式.....	59
§ 4. 多项式恒等定理的应用.....	64
§ 5. 公式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)$ $\cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 的应用.....	68
第三章 用综合除法分解因式	77
§ 1. 什么是综合除法.....	77
§ 2. 整系数方程有理根的求法.....	79
§ 3. 用综合除法分解因式.....	81
§ 4. 两同次幂的和及差的因式分解.....	85
§ 5. 综合除法的改进.....	87
§ 6. 多位综合除法.....	95
第四章 轮换对称函数的因式分解	109
§ 1. 什么是对称函数	109

§ 2.	什么是轮换对称函数	110
§ 3.	轮换对称函数的因式分解	111
§ 4.	整系数多元多项式的因式分解	118

第一章 因式分解的基本方法

因式分解是初等数学中最重要的基本方法之一，它是解方程式、分式化简和三角式变形等的有力工具。掌握好因式分解的方法对于学好初等数学甚至学习高等数学都会带来很多的方便。读者对此应该予以足够的重视。

一个多项式是否可约（即是否可因式分解），是相对于什么数的范围来说的。例如， $x^4 - 4$ 的因式：在有理数范围内，有 $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$ ；在实数范围内，有 $x^4 - 4 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2)$ ；在复数范围内，有 $x^4 - 4 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$ 。因此，一个多项式是否可约，是相对的，相对于在什么数的范围内而言的。为了简便起见，我们只研究有理数范围内的因式分解。

§ 1. 什么是因式分解

1. 因数和因式

在算术中已经知道，几个数相乘，其中每一个数都叫做积的因数。例如 $6 = 2 \times 3$ ，其中 2 和 3 都是积 6 的因数。同样，几个多项式相乘，其中每一个多项式都叫做积的因式。例如 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ，其中 $x + y$ 和 $x - y$ 都是积 $x^2 - y^2$ 的因式。又如 $3x(x^3 + y^3) = 3x(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ ，其中 $3x$ 、 $x + y$ 和 $x^2 - xy + y^2$ 都是积 $3x(x^3 + y^3)$ 的因式。

2. 质数和质式

在算术中把正整数分为三类：单位数 1；质数(或素数)，如 2, 3, 5, 7, 11, …等等；合数，如 4, 6, 8, 9, 10, …等等。只有两个因数的自然数就叫做质数。换句话说，就是只有 1 和自己是它的因数的这种大于 1 的自然数叫做质数。同样，在代数中，只有常数^①和自己是它的因式的这种整式叫做质式。例如 $5x$ 、 x^2-2 、 x^2+y^2 、 $a+b$ …都是质式。

2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 都是 30 的因数，其中 2, 3, 5 是质数，所以叫做 30 的质因数。同样， $x+y$ 和 $x-y$ 都是 x^2-y^2 的因式，同时也是 x^2-y^2 的质因式。但是， x^3+y^3 是 $3x(x^3+y^3)$ 的因式，而不是它的质因式，因为 x^3+y^3 有因式 $x+y$ 和 x^2-xy+y^2 。一般地，如果 A 有因式 B 和 C (B 和 C 都是有理式)，那么 A 就不是质因式。

值得注意的是：在算术中我们有一定的法则来判定一个整数是不是质数；而在代数中，要判定一个式子是不是质式是很困难的。因此，只有多做练习题从演算中熟悉一些质式的形式，别无其他好办法。还应注意，对于数的范围不同，质式的形式也不同。例如，在有理数范围内， x^4-4 的质式是 x^2+2 和 x^2-2 ；在实数范围内， x^4-4 的质式是 $x+\sqrt{2}$ 、 $x-\sqrt{2}$ 和 x^2+2 ；在复数范围内， x^4-4 的质式是 $x+\sqrt{2}$ 、 $x-\sqrt{2}$ 、 $x+\sqrt{2}i$ 和 $x-\sqrt{2}i$ 。

3. 因式分解的定义

把一个多项式化成几个质因式的积的形式，就叫做因式分解（或叫做多项式的分解式）。例如

① 在多项式中，零次多项式（不等于零的常数），就除法的性质而言，和整数中 -1 和 1 的作用完全一样。例如，若 $f_1(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，而 C 是任一不为零的常数，则 $Cf_1(x)$ 亦为 $f(x)$ 的因式，且认为因式 $Cf_1(x)$ 和 $f_1(x)$ 实质上相同。

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$5x(x^3 + y^3) = 5x(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

都叫做因式分解.

一般地, 设多项式 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots f_k(x)$ 都是多项式 $f(x)$ 的因式, 则

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_k(x) \quad (k \geq 2)$$

就叫做 $f(x)$ 的分解式.

4. 因式分解的意义

学习因式分解, 主要讨论两个基本问题: 一是怎样判断一个多项式是否可约; 二是如果多项式是可约的, 究竟如何去分解. 这两个基本问题是紧密联系着的, 它们之间是因果关系.

多项式的乘法和因式分解是两个互为逆运算的恒等变形. 多项式的乘法是把几个多项式相乘合成一个多项式, 是把乘积化为和、差的问题; 而因式分解则是把一个多项式分解为几个多项式相乘的形式, 是把和、差化为积的问题. 前者是展开, 后者是分解, 它们是两个互为逆运算的恒等变形. 因此, 它们是一对矛盾, 是同一事物矛盾着的两个方面. 但是, 不管是展开还是分解, 它们总是保持恒等的, 都是多项式的恒等变形, 因此, 它们又是对立的统一, 统一于恒等变形. 这就是它们之间的内在联系. 它们的这种联系, 可用如下图形形象地表示:

$$\begin{array}{c}
 \text{乘法运算} \\
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\
 f_1(x) f_2(x) \cdots f_k(x) = f(x) \\
 \xleftarrow{\hspace{1cm}} \\
 \text{因式分解}
 \end{array}$$

例如

$$\begin{array}{c}
 \text{乘法运算} \\
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\
 (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \\
 \xleftarrow{\hspace{1cm}} \\
 \text{因式分解}
 \end{array}$$

§ 2. 提公因式法

几个式子都含有的因式叫做这几个式子的公因式。例如， m 是 ma , mb , mc 的公因式。又如 $3ax$ 是 $3a^2x$, $6ax^2$, $9a^2x^2$ 的公因式。

乘法的分配律告诉我们：

$$m(a+b-c) = ma + mb - mc$$

反过来，有

$$ma + mb - mc = m(a+b-c) \quad \text{①}$$

①式的左边表明，在多项式 $ma + mb - mc$ 的各项中，含有公因式 m ，把 m 提出来就得到①式右边的积 $m(a+b-c)$ 。这就是把多项式 $ma + mb - mc$ 进行因式分解而得到 $m(a+b-c)$ 。归纳这种演算过程，我们得到：把一个多项式各项都含有的公因式提出来作为这个多项式的一个因式，这种演算过程就叫做提公因式法。

在运用这个方法时，需要注意两点：首先要对所分解的多项式进行观察，看各项系数有没有公因数，如果有，就把最大公因数提出来；其次要观察各项中有没有公有字母，如果有，也把公有字母的最低乘幂提出来。这两种提取方法的不同之处在于提公因数时，要提公因数中数值最大的，字母的乘幂则要提取次数最小的。一个说最大的，一个说最小的，实质上是一致的，即提取数字系数的最大公因数以及公有字母式的最高公因

式. 因为提取公因式法是最基本的方法, 所以也是最重要的方法. 因此, 我们应该弄清楚这种方法的实质, 并能很好地运用它. 为了能较好地运用这一方法, 兹举数例如下:

例 1 分解 $12a^2x^3 - 9ax^2y + 15ax^2y^2$ 的因式

解: 原式各项中系数的最大公因数(即最大公约数)是 3, 各项都含有字母 a 和 x^2 , 故 $3ax^2$ 是原式的公因式. 为了避免发生错误, 初学者可将原式各项写为 $3ax^2$ 与另一个因式的积, 然后再提公因式, 即

$$\begin{aligned} 12a^2x^3 - 9ax^2y + 15ax^2y^2 &= 3ax^2 \cdot 4ax - 3ax^2 \cdot 3y + 3ax^2 \cdot 5y^2 \\ &= 3ax^2(4ax - 3y + 5y^2). \end{aligned}$$

例 2 分解 $-3x^3y + 9x^2y^2 - 12xy^3$ 的因式

解: 原式的第一项含有负号, 为了提公因式后的另一个因式的第一项保持正号, 原式各项的公因式是 $-3xy$, 于是有

$$-3x^3y + 9x^2y^2 - 12xy^3 = -3xy(x^2 - 3xy + 4y^2)$$

例 3 分解 $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 的因式

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= (a+b)(bc+ba+c^2+ca) + abc \\ &= (a+b)(bc+ba+ca) + ac^2 + bc^2 + abc \\ &= (a+b)(bc+ab+ca) + c(ac+bc+ab) \\ &= (ab+bc+ca)(a+b+c). \end{aligned}$$

例 4 利用因式分解法计算 $999^2 + 999$

$$\text{解: } 999^2 + 999 = 999(999 + 1) = 999000$$

在运用提公因式法因式分解时, 初学者对于以下两点容易弄错, 应当很好地注意:

(1) $ma + mb + m$ 的公因式是 m , 提出 m 后, 另一个因式是 $a + b + 1$, 初学者往往错误地认为另一个因式是 $a + b$, 因而分解为

$$ma + mb + m = m(a + b)$$

为了避免出现这种错误，初学者可以这样演算：

$$ma + mb + m = m \cdot a + m \cdot b + m \cdot 1 = m(a + b + 1)$$

(2) 如果多项式的首项带有负号，提公因式后，习惯上喜欢使另一个因式的首项保持正号，因而所提公因式要带上负号，这样，多项式提取公因式后剩下的另一个多项式各项的符号都和原多项式各项的符号相反。可是初学者往往容易把符号弄错。例如，将多项式

$$-ma + mb - mc$$

错误地写为：

$$-ma + mb - mc = -m(a + b - c)$$

或

$$-ma + mb - mc = -m(a + b + c)$$

为了避免这种错误，初学者可以这样演算：

$$\begin{aligned} -ma + mb - mc &= -m \cdot a - m \cdot (-b) - m \cdot c \\ &= -m(a - b + c) \end{aligned}$$

§ 3. 分组分解法

分组分解法是一种比较困难的方法，需要充分利用读者自己的灵活与机智。如果给出多项式，不便于或不能直接应用其他方法时，必须经过适当分组再用其他方法进行分解。由于多项式的形式各种各样，分组的方法相应地也应有各种不同的情况。例如，一个四项式可分为一项与三项两组，也可分为二项与二项两组，有时还需要补项变成六项式，那么就可能分为一项与五项、二项与四项、三项与三项两组，或者二项一组分为三组。因此，在运用这个方法时必须善于分析研究多项式的特点，从而确定分组的方法。一旦得到合理的分组方法，具体分解就不困难了。为了使初学者较快地掌握这个方法，下面分别

予以讨论.

(一) 分组的条件

我们先看一个例子:

$$\begin{aligned}(1) \quad am + bm + an + bn &= (am + bm) + (an + bn) \\ &= m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n)\end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned}(2) \quad am + bm + an + bn &= (am + an) + (bm + bn) \\ &= a(m + n) + b(m + n) = (a + b)(m + n)\end{aligned}$$

(1) 是以 m 、 n 作标准^① 分组; (2) 是以 a 、 b 作标准分组. 虽然 (1) 和 (2) 分组的标准不同, 但是结果一样. 如果分组不恰当, 原多项式就不能分解. 例如, 按照下面分组:

$$am + bm + an + bn = (am + bn) + (an + bm)$$

就不能分解.

再看一个例子:

$$\begin{aligned}(1) \quad ax + ay + az + bx + by + bz &= (ax + ay + az) \\ &\quad + (bx + by + bz) \\ &= a(x + y + z) + b(x + y + z) = (a + b)(x + y + z)\end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned}(2) \quad ax + ay + az + bx + by + bz &= (ax + bx) \\ &\quad + (ay + by) + (az + bz) \\ &= x(a + b) + y(a + b) + z(a + b) = (a + b)(x + y + z)\end{aligned}$$

(1) 是以 a 、 b 作标准分组; (2) 是以 x 、 y 、 z 作标准分组. 虽然 (1) 和 (2) 分组的标准不同, 但是结果一样. 如果分组为:

$$\begin{aligned}ax + ay + az + bx + by + bz &= (ax + by) \\ &\quad + (ay + bz) + (az + bx)\end{aligned}$$

就不能分解. 因此, 分组是有条件的. 找出上面两例分组的特

① 以 m 、 n 作标准分组, 就是各组依次以 m 、 n 为公因式.

点, 总括起来分组的条件是:

1. 每组的项数必须一样多;

2. 每项的各项必须有公因式;

3. 将每组中各项的公因式提出后, 所得到的另一个因式必须是各组的公因式. 这三个条件在分组时是必不可少的, 一定要充分注意.

(二) 分组分解的方法

根据分组的条件可知, 将多项式的各项适当分组, 使各组都能提出公因式, 并留下一个相同的因式, 然后再次提公因式, 这种因式分解的方法就叫做分组分解法.

分组分解法的应用很广, 技巧性也很强, 因此, 难度较大. 一般说来, 凡是能因式分解的多项式, 都能用分组分解法分解. 下面我们来说明它的用法.

1. 直接分组法

按照分组条件把原式分为项数相等的两组或多组, 使各组之间有公因式可提.

例 1 分解 $ax + ay + bx + by - cx - cy$ 的因式

解: (1) 以 a, b, c 作标准分组

$$\begin{aligned} & ax + bx + ay + by - cx - cy \\ &= (ax + ay) + (bx + by) - (cx + cy) \\ &= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) = (x + y)(a + b - c). \end{aligned}$$

(2) 以 x, y 作标准分组

$$\begin{aligned} & ax + ay + bx + by - cx - cy \\ &= (ax + bx - cx) + (ay + by - cy) \\ &= x(a + b - c) + y(a + b - c) = (x + y)(a + b - c). \end{aligned}$$

例 2 分解 $x^3 + ax^2 + abx + bx^2 + bcx + acx + cx^2 + abc$ 的