

附面层理论

吴国钊等 编著

737356

航空工业出版社



737356

V211.1/12

附 面 层 理 论

吴国钊 等编著

41k=11/07



C0159009

航空工业出版社

1989

内 容 简 介

本教材是在作者总结多年来从事研究生教学和科研工作的经验基础上写成的。着重论述粘性牛顿流体运动的基本规律,包括层流、层流的稳定性和紊流。本书的特点是,重视基础理论和基本概念 的阐述,同时对当前附面层理论发展中的新概念、新技术和前沿课题,作了不同程度的介绍和讨论。例如,对非定常附面层,附面层的测量和控制,所花的篇幅比一般教材为多;又如,对附面层分离问题,将工程上最关心的附面层分离的预计方法,简明扼要地分类介绍,并且把作者多年来在国内与国外进行的科研工作的部分成果写入本书。本书还注意到结合专业和工程应用,例如,对叶轮机中的附面层问题,亦作了专门的论述。

本书为航空发动机专业研究生教材或高年级本科生教材,也可作为机械、航天、船舶、化工、水利、气象、海洋工程等工科研究生、高年级本科生的教材或供科技研究人员参考。

附 面 层 理 论

吴国钊 等编著

航空工业出版社出版发行
(北京市和平里小关东里14号)
一部政编码: 100013-1
全国各地新华书店经售
南京航空学院印刷厂印刷

1989年4月第1版 1989年4月第1次印刷
开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 17.75
印数: 1-600册 字数: 435.2千字

ISBN 7-80046-119-X/T·002

定价: 3.60元

前 言

本书系根据发动机专业硕士研究生附面层理论课程的教学要求编写的，学习时数为60小时。本书也可作为本科高年级学生附面层理论课程的参考教材。

附面层概念是普朗特在二十世纪初提出来的，它为理论与实验互相紧密结合奠定了基础，使数学难题大大简化，成为研究实际粘性流动的有力手段。附面层概念标志着飞行理论中最重要的进步之一，正如今天某些人们所说的，是一个突破。随着科学技术的进步，附面层理论得到了很大的发展，它的应用愈来愈广泛，如航空、航天、机械、水利、船舶、化工、气象、海洋、兵器等各部门中附面层理论已成为工程技术人员必须掌握的基础理论知识。

本书是在总结历届对硕士研究生教学实践经验和国内、外多年科研成果的基础上编写的。本书注意到在教学大纲范围内力求联系发动机中的一些附面层问题，对目前存在的或正在大力研究的一些重要的前沿问题（例如非定常附面层问题，以稍多的篇幅作了适度的介绍；又如对附面层分离问题，以集中的篇幅作了较为系统的论述，写入了作者多年来在国内、外对紊流附面层分离的科研工作中的一些心得），也作了充分的介绍和讨论，使读者对附面层理论的目前发展水平有所了解。每章后的习题，帮助读者进一步深入和牢固地掌握所学的内容。

本书由吴国钊（南京航空学院）和邢宗文（西北工业大学）合写。全书分七章，第一、四、五、六、七章和附录A和C由吴国钊编写；第二、三章和附录B由邢宗文编写。全书由吴国钊负责主编工作。由杨岷生教授负责审稿。

由于水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，欢迎读者指正。

编著者

1988年8月

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 引言.....	(1)
§ 1-2 粘性流体的特性.....	(2)
习题.....	(7)
第二章 基本方程	(8)
§ 2-1 连续方程.....	(8)
§ 2-2 运动方程.....	(9)
§ 2-3 能量方程.....	(14)
§ 2-4 初始条件和边界条件.....	(17)
§ 2-5 基本方程的数学性质.....	(21)
§ 2-6 基本方程的无量纲化和相似分析.....	(24)
§ 2-7 不可压缩粘性流动的涡量分析.....	(29)
习题.....	(33)
第三章 粘性流体力学方程的求解	(34)
§ 3-1 库特剪切流动.....	(34)
§ 3-2 充分发展的管内流动.....	(37)
§ 3-3 管内非定常流.....	(40)
§ 3-4 运动边界的非定常流.....	(43)
§ 3-5 相似律解.....	(45)
§ 3-6 可压缩流动.....	(52)
§ 3-7 小雷诺数运动.....	(55)
§ 3-8 电子数字计算机解.....	(65)
习题.....	(66)
第四章 层流附面层	(67)
§ 4-1 引言.....	(67)
§ 4-2 层流附面层方程.....	(72)
§ 4-3 定常二元流动的相似律解.....	(76)
§ 4-4 二元流动的其他分析解.....	(85)
§ 4-5 近似方法.....	(86)

§ 4-6 热附面层计算	(95)
§ 4-7 三元附面层	(96)
§ 4-8 非定常附面层	(97)
习题	(110)
第五章 层流的稳定性理论	(112)
§ 5-1 小扰动稳定性理论	(112)
§ 5-2 小扰动方程	(112)
§ 5-3 奥尔-沙墨菲尔德方程	(115)
§ 5-4 边界条件	(116)
§ 5-5 奥尔-沙墨菲尔德方程的特性	(117)
§ 5-6 几种流动的稳定性	(118)
§ 5-7 转捩	(121)
§ 5-8 转捩点的预计	(124)
§ 5-9 逆转捩	(125)
习题	(126)
第六章 不可压缩紊流平均流	(127)
§ 6-1 引言	(127)
§ 6-2 平均流基本方程式	(138)
§ 6-3 雷诺应力	(140)
§ 6-4 紊流附面层的动量积分关系式	(146)
§ 6-5 剪切紊流的半经验理论	(148)
§ 6-6 紊流附面层的结构	(153)
§ 6-7 紊流猝发与拟序结构	(154)
§ 6-8 速度分布	(156)
§ 6-9 壁面定律	(157)
§ 6-10 尾迹定律	(160)
§ 6-11 管道紊流	(162)
§ 6-12 平板紊流附面层	(165)
§ 6-13 有压力梯度的紊流的附面层	(177)
§ 6-14 射流和尾迹	(192)
§ 6-15 三元紊流附面层	(202)
§ 6-16 不可压缩紊流附面层的对流传热	(205)
习题	(211)
第七章 可压缩附面层流动	(212)
§ 7-1 引言	(212)
§ 7-2 可压缩层流的相似律解	(215)

§ 7-3	高马赫数平板流	(217)
§ 7-4	可压缩附面层积分关系式	(218)
§ 7-5	可压缩紊流附面层方程	(223)
§ 7-6	可压缩紊流的壁面定律	(225)
§ 7-7	有压力梯度的可压缩紊流附面层	(229)
§ 7-8	壁面曲率的影响	(230)
§ 7-9	流动的分离	(231)
§ 7-10	附面层的逆问题	(247)
§ 7-11	叶轮机中的附面层问题	(248)
§ 7-12	附面层的测量	(254)
§ 7-13	附面层的控制	(259)
	习题	(262)
附录 A	各种牛顿流体的传输特性	(263)
B	基本方程及基本关系式	(265)
C	波累斯顿管的标定数据表	(271)
参考文献		(272)

第一章 绪 论

§ 1-1 引 言

流体力学在十八世纪分为两个分支：一是水动力学 (Hydrodynamics)，它研究流体运动时，不考虑粘性，运用数学工具分析流体的运动规律；另一是水力学 (Hydraulics)，它不用数学理论而完全建立在实验基础上对流体进行研究。这两个分支的研究方法完全不同。这种理论与实验分家的现象继续了一百五十多年，直到二十世纪初期 L·普朗特提出了附面层理论时为止。

L·普朗特之前，欧拉之后，一个有意义的成果是对欧拉方程加上摩擦阻力项。斯托克司 (Stokes) 首先引用了第一粘性系数 μ 。现在这些方程叫做纳维-斯托克司 (Navier-Stokes) 方程。纳维-斯托克司方程描绘了粘性流体的运动规律，但是数学上求解是很困难的，直到今日有约七十多种特殊情况的解。只是在最近二十年，有了大型电子计算机之后，才有希望求理论解。在斯托克司时代，水力学工作者并没有看到他的工作的重要意义。

1904 年 L·普朗特在海德堡的数学会议上宣读了他的论文“摩擦极小的流体运动”，文中指出如何精确地分析粘性流动。他证明绕一固体的流动，可以分为两个区域：在物体邻近存在非常薄的一层，在这一层内摩擦起主要作用，在这一层以外的其余区域内，摩擦可以忽略不计。这一层叫做附面层。借助于这一假设，L·普朗特成功地深刻阐明了在估价阻力时粘性的重要性，开辟了粘性流动的理论分析方法，使数学难题得到了最大简化。因此，完成了使理论与实验重新结合起来的的第一步。附面层理论是水动力学发展中非常有效的研究工具之一，在很短的时间内，它成了现代水动力学、机翼理论和气体动力学的基石之一。

附面层理论可以应用于物体表面摩擦阻力的计算，例如进气道的阻力、机翼的阻力、翼型支架的阻力、火焰稳定器的阻力和透平叶片的损失等。

最初，附面层理论用于层流，后来推广应用于紊流。紊流附面层，从实际应用的观点来看，更为重要。雷诺 (O·Reynolds) 引用了“虚紊流摩擦”重要概念，但是这个概念不足以对紊流流动进行理论分析。L·普朗特的混合长度理论结合系统的实验，为采用附面层理论对紊流流动进行理论研究开辟了道路，然而对完全发展的紊流流动的研究，仍旧没有合理的理论。从二十世纪初开始，应用统计力学的方法来研究紊流，虽然取得了很大的进展，但是由于紊流结构复杂，目前统计理论还基本上局限于研究实际上并不存在的各向同性紊流这一最简单情况，而对于广泛存在的各种剪切紊流，如自由紊流、附面层紊流等，只能依靠半经验理论来解决。半经验理论只着重于研究时均紊流的运动规律，没有对脉动结构进行深入的分析。在解决紊流的脉动结构及其统计特征值的变化规律方面，现有的半经验理论又显得无能为力了。于是又在吸取统计力学和半经验理论研究成果的基础上提出了紊流的随机理论。总之，紊流问题是工程技术中大量遇到的问题，又是难而深的问题，它引起许多理论研究人员、实验工作者和工程技术人员的注意。本书只介绍一些基本知识和某些工程上应用的结果。

§ 1-2 粘性流体的特性

在流体力学内物质一般可分为两类，流体和非流体（固体）。固体能够抵抗剪力而保持静止，流体一般来说却不能。我们以后要讨论的是在剪力作用下很容易流动的流体，所有的气体、普通的液体，例如水、煤油、汽油、酒精等都是流体，它们具有以下四种特性：

一、运动学特性，指应变率、速度、加速度、涡量等。严格说，这些特性是流体运动时才具有的，是流场的特性而不是流体本身固有的特性。

二、传输特性，指粘性、导热性、扩散性等。

三、热力学特性，指温度、密度、压力、焓、熵、比热、热膨胀系数等。

四、其他特性，如蒸汽压力、表面张力、紊流扩散等。

下面分别讨论这些特性。

一、运动学特性

流体的运动学特性是指流体运动时所具有的特性，它与流体运动的情况有关。处理流体运动的一般问题有两种观点：一种是选定任意一个流体质点，并跟随这一质点观察其运动特性，叫做拉格朗日 (Lagrange) 方法；另一种是选定流体所占据的空间中任意一个位置，在整个运动过程中，观察流体质点经过这一位置时的运动特性，叫做欧拉 (Euler) 方法。麦克斯韦尔 (Maxwell) 将前者称为历史的方法，后者称为统计的方法。

叶轮机械内的流动绝对运动是不定常的，相对运动是定常的，因此，处理流体运动时，注意到：(1) 选择最恰当的坐标系统，使流动成为定常流动，(2) 研究作为位置和时间的函数的速度场，而不去跟随某一个流体质点，往往会带来很大的方便，这是欧拉方法的优点。

欧拉法研究流体的速度场，速度向量可以表示成下列直角坐标形式：

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{i}u(x, y, z, t) + \vec{j}v(x, y, z, t) + \vec{k}w(x, y, z, t) \quad (1-1)$$

在流体力学中的问题，常常是求标量变数 u, v, w 的值。

令 Q 代表流体的任意一种运动学特性，例如速度或加速度等， dx, dy, dz, dt 表示四个独立自变量的变化值，则 Q 的全微分为

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \quad (1-2)$$

跟随流体质点所走的距离为

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt \quad (1-3)$$

将式 (1-3) 代入式 (1-2)，得到流体质点的某一种特性 Q 对时间的导数

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} + w \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (1-4)$$

$\frac{dQ}{dt}$ 称为“跟随流体运动的导数”。习惯上把它写成 $\frac{DQ}{Dt}$ ，是为了强调跟随流体质点运动的导数，以区别于一般的导数。

式 (1-4) 中的最后三项称为“迁移导数”；表示由于流体质点在运动，位置改变使 Q 发生变化。如果流体速度为零，则这三项就等于零。 $\frac{\partial Q}{\partial t}$ 称为“局部导数”，表示在同一个位

置, 由于时间的变化而引起的 Q 变化。式 (1-4) 也可写成

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)Q \quad (1-5)$$

式中 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$

下面我们看流体质点的加速度。

如果流体的任意一种运动学特性 Q 代表速度 \vec{v} , 就得到加速度

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = i \frac{Du}{Dt} + j \frac{Dv}{Dt} + k \frac{Dw}{Dt} \quad (1-6)$$

由此可知加速度与 u, v, w 以及 12 个标量导数有关 (即三个局部导数 $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ 和 9 个空间导数 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, i, j 和 k 表示三个坐标方向)。

$\frac{D}{Dt}$ 中的“迁移项”在数学上很难处理, 因为它是变量的非线性乘积。因此, 具有迁移加速度的粘性流动是非线性的, 分析时不能用叠加法则。值得注意的是这些非线性项是加速度而不是粘性应力, 可见粘性流动研究中的主要困难却在于非粘性项。至于粘性应力本身, 如果可以假定粘性是常数的话, 倒是线性的。

无粘性流动中, 非线性迁移加速度项仍存在, 但是不造成困难, 因为存在等式

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \frac{V^2}{2} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (1-7)$$

通常无粘流动是无旋的, $\nabla \times \vec{v} = 0$, 于是迁移加速度项只剩下伯努利 (Bernoulli) 方程中的动能项。因为此动能项是非线性项, 所以无粘性流动也是非线性的。但是此动能项可以用总压和静压之差表示, 其余的速度项都是线性的。

二、传输特性

传输特性是指粘性、导热性和扩散性, 它们分别表示动量、热量和质量的传递或交换。具体是由粘性系数、导热系数和扩散系数表示。三个系数都表示传输量与特征梯度之间的关系。粘性系数表示动量传输量与速度梯度之间的关系; 导热系数表示热量传输量与温度梯度之间的关系; 扩散系数表示质量传输量与浓度梯度之间的关系。它们的表达式见后面公式 (1-10)、(1-15) 和 (1-19)。动量、热量和质量流问题的数学特性常常是很相似的。不同的地方是在多元问题中, 热量流和质量流是向量 (一阶张量) 而动量流 (应力) 是张量 (二阶张量)。

(一) 粘性系数

粘性是流体抗拒变形的内摩擦。实际流体都具有不同程度的粘性, 例如水是粘性很小的流体, 油和蜂蜜具有一定的粘性, 沥青的粘性很大, 不易变形。粘性系数是具体表示粘性大小的系数, 它表示应力和应变率关系。为了了解粘性的实质, 下面看广泛引用的一个例子。

有两块平行平板, 相距 h , 下面的板静止不动, 上面的板以速度 V 在其自己的平面内作等速运动 (图 1-1)。现在看两

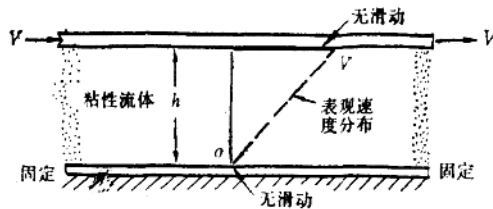


图 1-1 两平行平板间的流体运动

板间的流体运动情况。由于流体有粘性，靠近平板的流体附着在平板上，与平板之间没有滑动。两平板中间的流体，可以想象是由许多层流层组成的，这些流层以速度 u 流动，速度 u 是流层到静止平板之间的距离 y 的函数，即 $u = u(y)$ 。应变率 ϵ_{xy} 为

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{du}{dy} \quad (1-8)$$

对于普通的流体，作用的剪切力只是应变率的函数

$$\tau_{xy} = f(\epsilon_{xy}) \quad (1-9)$$

因为上板是作等速运动，所以剪切力是常数， τ_{xy} 是常数， ϵ_{xy} 也是常数， $\frac{du}{dy}$ 也是常数。于是速度分布是直线（图 1-1）。不论公式 (1-9) 中的函数关系是什么形式，这个结果总是正确的。做不同 τ_{xy} 的实验，可以确定式 (1-9) 的函数形式。对于简单的流体，如水、油或气体，函数形式是线性的，即

$$\tau_{xy} \sim \epsilon_{xy}, \text{ 或 } \tau_{xy} = \mu \frac{V}{h} = 2\mu\epsilon_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-10)$$

式中 μ 叫做流体的粘性系数，单位为 $[\text{Ns}/\text{m}^2]$ 或 $[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ 。事实上，还有一个第二系数 λ ，它表示流体的体积膨胀，在后面讲纳维-斯托克司方程时要提到，但是在实际中很少遇到。

如果式 (1-9) 中的函数关系是线性的，那么这种流体叫做牛顿流体。如果函数关系是非线性的，那么叫做非牛顿流体，如图 1-2 所示。

当应变率一定时，也有的非牛顿流体的剪切应力会随时间改变（图 1-3）。非牛顿流体的剪切应力与应变率的规律一般采用幂次方近似

$$\tau_{xy} \approx 2K\epsilon_{xy}^n \quad (1-11)$$

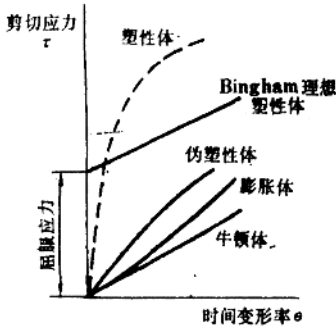


图 1-2 各种流体的粘性特性

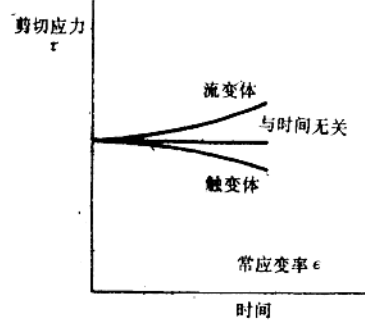


图 1-3 剪切应力随时间变化关系

式中 K 和 n 是物质参数，一般情况与压力、温度有关。式 (1-11) 的关系分成三种情况：

- $n < 1$ 伪塑性流体
- $n = 1$ 牛顿流体 ($K = \mu$)
- $n > 1$ 膨胀体

关于非牛顿流体的进一步的知识已超出本书范围。本书只讨论牛顿流体。

从分子运动理论的观点来看，粘性一方面由分子间的吸引力所引起，另一方面也是分子因不规则的热运动而交换动量的结果。粘性系数宏观上可以认为是热力学特性，它随温度、压力而变化。对各种流体不存在同一的函数关系 $\mu(T, p)$ 。但是可以用无量纲数据（以临界

点 T_c, p_c 的粘性系数 μ_c 作为参考值) 在一定的精确度内 ($\pm 20\%$) 表示。这不是靠热力学基础得出的, 而是根据量纲分析和实验观察得到的。

图 1-4 表示 μ/μ_c 与 T/T_c 的关系 (p/p_c 作为参变量)。

由图可以看出:

- (1) 液体的粘性随温度升高而急剧下降;
- (2) 低压气体的粘性随温度升高而上升;
- (3) 粘性总是随压力增大而增大;
- (4) 在临界点附近正确度很差。

因为液体的粘性主要由分子间的吸引力决定, 当温度升高的时候, 分子间的吸引力减小, 所以粘性减小。对于气体来说, 粘性主要由分子间的动量交换决定, 当温度升高的时候, 动量增大, 粘性增大。

因为大多数气体的 p_c 大于 10 大气压, 所以一般气体流动问题是处于低相对压力和接近于低密度气体曲线。因此, 在空气动力学中, 一般可以忽略压力对气体粘性的影响, 而只考虑温度的变化。

几种常用流体的粘性系数见附录表 A-1 至表 A-4。

低密度气体 低压气体的运动理论已很完善, 根据这一理论, 粘性的宏观概念是流体分子之间发生的动量交换的统计平均值。低压气体的粘性与密度 ρ , 平均自由程 l 以及音速 a 成正比。非极性气体 (如氢、氧、氮等) 的粘性系数为

$$\mu = 0.67 \rho l a \quad (1-12)$$

气体的粘性与温度之间的一般近似式为

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1-13)$$

式中 $n=0.7$, T_0 和 μ_0 是参考值。

苏士兰 (Sutherland) 提出另一个广泛应用的近似式为

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (1-14)$$

式中 S 是有效温度, 叫做苏士兰常数。此式的精确度比式 (1-13) 稍高。

严格地说, 这些低密度气体公式只适用于单组元的物质, 空气也适用, 因为空气的二个主要成份氮和氧是差不多相同的双原子分子。各种常用气体的 n 值和苏士兰常数见附录表 A-7。

(二) 导热系数

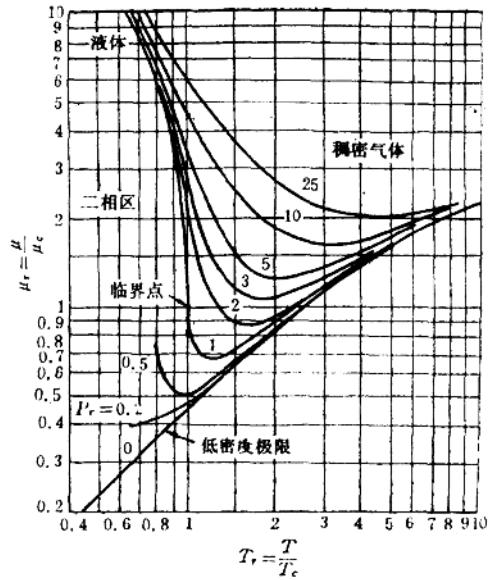


图 1-4 相对粘性与相对温度的关系

由传热学知道，温度梯度造成的热量传导可以用傅利叶 (Fourier) 定律表示

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (1-15)$$

式中 \vec{q} 是每单位面积的热流向量， k 是导热系数。流体的导热性质是没有方向性的，叫做各向同性。导热系数 k 与粘性系数 μ 相似，是随温度和压力而变化的。图 1-5 表示 $k_r (=k/k_c)$ 与 $T_r (=T/T_c)$ 的关系曲线。

导热系数 k 的量纲和粘性系数与比热的乘积 (μc_p) 的量纲相同，两者之比是一个无量纲参数，称为普朗特 (Prandtl) 数：

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad (1-16)$$

它是表示温度场和速度场相似的准则。

导热系数的一般近似式为

$$\frac{k}{k_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1-17)$$

苏士兰 (Sutherland) 近似式

为

$$\frac{k}{k_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (1-18)$$

各种常用气体和液体的 k 值见附录表 A-5 和表 A-6。幂数 n 值和苏士兰常数见附录表 A-8。

(三) 扩散系数

有浓度梯度，就有质量扩散。

浓度的定义有两种：(1) 容积浓度，指每单位容积中 i 成分的质量，即 $\rho_i = m_i/V$ (此处 V 是指总容积)；(2) 质量浓度，是指每单位质量的混合物中 i 成分的质量，即 $C_i = \rho_i/\rho$ 。质量浓度的数值总是小于 1，最大等于 1。

浓度梯度造成的通过每单位面积的扩散的质量可以用费克 (Fick) 定律表示：

$$\frac{m_i}{A} = -D \nabla(\rho_i) \quad (1-19)$$

式中 m_i ——指向浓度减小方向的 i 成分的质量流；

A ——面积；

D ——质量扩散系数，单位为 $[m^2/sec]$ 。

如果用质量浓度 C_i 表示，则式 (1-19) 变为

$$\frac{m_i}{A} = -\rho_i D \nabla(\ln C_i) \quad (1-20)$$

因为 $m_i/A = \rho_i \vec{v}_i$ ，所以费克 (Fick) 定律可以写成

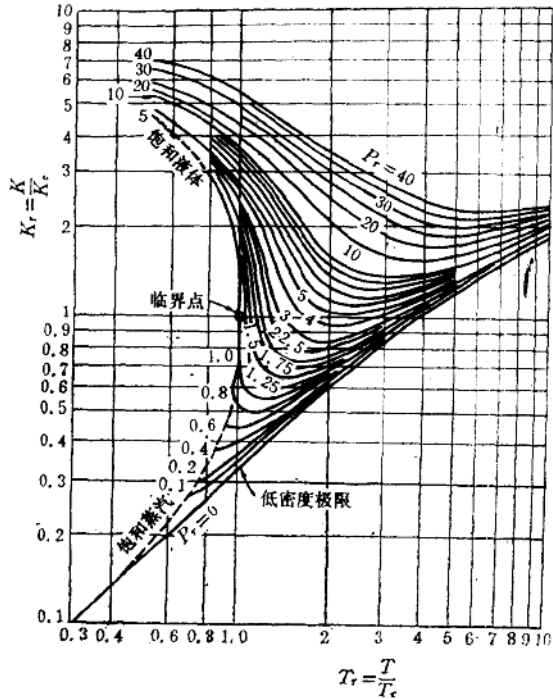


图 1-5 相对导热系数与相对温度的关系

$$\vec{v}_i = -D\nabla \ln(C_i) \quad (1-21)$$

式中 \vec{v}_i 叫做 i 成分的扩散速度。

上面我们只考虑了浓度梯度引起的扩散，事实上，分子运动理论证明质量流也能由压力梯度或温度梯度引起。因此，一般表达式为

$$\vec{v}_i = -D\nabla(\ln C_i) - D_P\nabla(\ln p) - D_T\nabla(\ln T) \quad (1-22)$$

式中 D_P 和 D_T 分别为压力和温度梯度造成的扩散系数。

一般情况下，压力梯度小于浓度梯度，压力扩散项较小。 D_T 比 D 小很多，热扩散项也可以忽略不计。

扩散系数 D 的量纲与运动粘性系数 ν 相同，或者与热扩散率（或称导温系数） $a = k/(\rho c_p)$ 相同，都是 $[m^2/sec]$ 。因此，可以组成无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} Sc &= \frac{\mu}{\rho D} = \frac{\nu}{D} \\ Le &= \frac{D}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

Sc 称为施密特 (Schmidt) 数，它表示粘性扩散与质量扩散之间的关系。 Le 称为刘易斯 (Lewis) 数，它表示质量扩散与热扩散之间的关系。

习 题

1. 一圆球，直径为 4.11 厘米，放在速度为 40 米/秒的自由流中（温度为 $15^\circ C$ ，压力为 1 大气压）。计算球的直径雷诺数，如果流体为 (a) 空气，(b) 水，(c) 氢气。

2. 流体流动的速度场为

$$\vec{v} = (t^2 + 4t)\vec{i} + (y^2 - z^2 - 2)\vec{j} - (y^2 - yz)\vec{k}$$

计算在点 (3, 1, 4) 处， $t=2$ 时，(a) 流体的加速度，(b) 流体的膨胀率，(c) 涡量。

3. 二元非定常流动的速度分量为

$$u = \frac{x}{1+2t}, \quad v = \frac{y}{1+3t}$$

求时间 $t=0$ 时通过点 (x_0, y_0) 的流线的方程式。

第二章 基本方程

描述粘性流体运动的纳维-斯托克司 (Navier-Stokes) 方程早在一百多年前就已出现, 但是该方程的求解非常困难, 因此长时间没有得到应用。普朗特 (Prandtl) 的附面层方程, 使粘性流体力学基本方程组简化后, 得到了实际应用。目前, 由于电子计算机的迅速发展以及实验手段的加强, 使粘性流体力学基本方程组的直接求解有了可能, 对此, 已经和正在开展广泛的研究工作, 并且在实际工作中, 例如在美国航天飞机发动机的设计中, 开始得到了应用。

本章将建立粘性流体的应力模型、推导和讨论粘性流体运动的基本方程组及其相应的边界条件, 并且对粘性流体运动的特性作一初步讨论。

§2-1 连续方程

在流场中, 任取一控制体 R (它固定在空间中而不随时间改变) (图 2-1), 该控制体的界面 S 称为控制面。根据质量守恒定律: 单位时间内通过控制面 S 流出与流入控制体 R 的质量流量总和应等于控制体内流体质量的减少率, 其数学表达式为

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_R \rho dR$$

式中 \vec{v} —— 流体速度矢量;

\vec{n} —— 控制面 S 外法线方向的单位矢量。

根据高斯 (Gauss) 公式

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_R \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dR$$

另外, 由于控制体 R 的位置是固定的, 不随时间变化, 因此积分号之前对时间的偏导数运算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可以移到积分号里面去,

于是有

$$\int_R \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dR = - \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dR \quad (2-1)$$

这是积分形式的连续方程。

上式可写成

$$\int_R \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dR = 0$$

由于控制体 R 是任取的, 且被积函数连续, 所以积分号内的被积函数应处处等于零, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-2)$$

或

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-3)$$

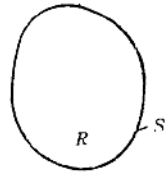


图 2-1 推导连续方程的简图

式(2-2), (2-3)是微分形式的连续方程。

对于定常流动, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 则连续方程为

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2-4)$$

对于不可压缩的均质流体, $\rho = \text{常数}$, 则连续方程简化为

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-5)$$

在直角坐标系中, 连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2-6)$$

对定常流动, 为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2-7)$$

对不可压缩均质流体, 则为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-8)$$

以上各种形式的连续方程适用于连续介质的流动, 一般气体每立方厘米内约含 2.7×10^{19} 个分子, 气体的平均自由行程约为 6×10^{-6} 厘米, 因此可认为是连续介质。连续方程只涉及质量守恒问题, 并没有涉及到力的作用, 对粘性流体和非粘性流体, 连续方程都是相同的。

§ 2-2 运动方程

一、纳维-斯托克司方程

在流场中任取一体积为 R 的流体 (该体积的大小、形状及位置可随时间而变) (图2-2), 其界面为 S 。根据动量定律, 该体积流体动量的变化率应等于作用在该体积流体上的表面力和质量力之和

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_R \rho \vec{V} dR \right) = \int_R \rho \vec{F} dR + \int_S \vec{\tau}_n dS \quad (2-9)$$

其中 \vec{F} 表示作用在单位质量流体上的质量力。所谓质量力 (或称体积力) 是指作用在体积 R 内每一个流体微团上的力, 其大小与流体体积或质量成正比, 而与体积 R 以外的流体无关。这类力中最常见的有重力; 此外, 对于非惯性坐标系, 质量力还应包括惯性力。例如, 气体在压气机或涡轮内运动时, 取与转子相同的角速度旋转的动坐标来研究气体运动时, 就要考虑惯性离心力和哥氏力。

方程中的 $\vec{\tau}_n$ 表示作用在 S 表面上单位面积上的表面力, 它是与所取流体相接触的流体或物体的作用而产生的。根据连续介质的概念, 这个力是连续分布在所划流体表面上的。在运动粘性流体中, 表面应力是个二阶对称张量, 以 τ_{ij} 表示, 可以写成

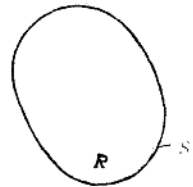


图 2-2 运动方程的推导

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

式中第一个下标表示作用面的方位，第二个下标表示应力的方向。

利用高等数学的关系式

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_R \rho \vec{v} dR &= \int_R \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dR + \int_R \rho \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} dR \\ &= \int_R \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dR + \int_S \rho \vec{v} V_n dS \end{aligned}$$

则式(2-9)可改写成

$$\int_R \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dR + \int_S \rho V_n \vec{v} dS = \int_R \rho \vec{F} dR + \int_S \vec{\tau}_n dS \quad (2-10)$$

这就是积分形式的运动方程。

另外，根据张量运算，有

$$\int_S \vec{\tau}_n dS = \int_R \nabla \cdot \tau_{ij} dR$$

以及

$$\frac{D}{Dt} \int_R \rho \vec{v} dR = \int_R \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dR$$

式(2-9)又可写成

$$\int_R \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dR = \int_R \rho \vec{F} dR + \int_R \nabla \tau_{ij} dR$$

由于 R 是任取的，所以得到

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (2-11)$$

这就是微分形式的运动方程，其中 $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$ 表示单位体积的惯性力， $\rho \vec{F}$ 表示单位体积上的质量力，而 $\nabla \cdot \tau_{ij}$ 则表示单位体积上应力张量的散度，它是与表面力等效的体积力分布函数。于是运动方程表示单位体积上的惯性力等于单位体积上的质量力与应力张量散度之和。

(一) 牛顿流体的变形定律

粘性流体的运动方程比理想流体的复杂得多，其原因是出现了应力张量。牛顿提出了关于粘性流体作平面直线层流运动时，两流体层之间剪切应力的假设。认为剪切应力与速度梯度成正比，即

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

上式左边对应于平面直线运动特殊情况下应力张量的一个切向分量，右边的导数项对应于应变率张量的一个分量。因此，上式表示 τ_{yx} 与 ε_{yx} 成正比，即

$$\tau_{yx} = 2\mu \varepsilon_{yx} \quad (2-12)$$

斯托克司将这个关系式推广到粘性流体的任意流动情况中去，假设：

1) 流体是连续的，它的应力张量是应变率张量的线性函数；