经 济 应 用 数 学

（二）

线性代数与线性规划

中央电大经济系基础理论教研室　编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学

（二）

线性代数与线性规划

中央电大经济系基础理论教研室 编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖北省新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张19.75 千字400

1986年6月第1版 1986年9月第1次印刷

印数 1—170,000

书号：13300·41 定价：2.60元

前　言

《经济应用数学(二)线性代数与线性规划》是中央广播电视大学自编试用教材,内容包括线性代数及线性规划.

本书是经济类各专业的教材.因此,除注意到数学学科的内在系统性外,尽可能结合经济专业的特点,充实了经济活动中应用很广泛的一些内容,如投入产出数学模型,对偶线性规划和灵敏度分析等. 对于一些重要理论,着重分析基本概念、基本思路和基本方法,不过份强调严格的论证,而着眼于培养读者的逻辑思维能力和分析问题解决问题的能力. 叙述上尽可能地详尽而又重点突出,力求写得通俗易懂,深入浅出,便于自学. 同时,还注意到知识的可扩展性,对一些较高深的问题引而不发,为对此有兴趣的读者在学习本教材后进一步扩大知识面打下必要的基础.

本书注重概念和数学方法,引进概念从具体到抽象,叙述数学方法结合经济意义和几何解释,加深感性认识到理性认识的过程. 本书配有较多例题,一方面旨在通过例题叙述解题的基本方法和技巧,另一方面考虑到电大教学的特点,便于主讲教师及面授辅导教师的教学以及学员自学. 此外,还编入了一些我们认为比较重要,但又超出教学大纲要求的内容(标*号),供读者参考.

在本书编写过程中得到了中央广播电视大学经济系领导的关心和支持,得到了上海广播电视大学、湖北广播电视大学教学处和广西电大南宁分校的大力帮助. 中央广播电视大学

经济系郭星英老师为本教材的编写做了不少工作;陈效中、郑乐宁、居余马等清华大学应用数学系教师,胡长华、赵章琳、葛振三、杨荣源、胡士元、张旭辉、李格渭等部分省市电大教师,他们仔细阅读了本书的初稿,提出了许多宝贵意见.在此特向他们表示衷心感谢.

各部分内容由下列同志执笔:

彭文学(湖北电大)编写线性代数第二至四章

刘维翰(上海电大)编写线性规划第一至五章

顾静相(中央电大)编写线性代数第一、五章
线性规划第六章

本书由清华大学陈效中、郑乐宁两位副教授主审.

本书是由电大系统教师自编、在较短时间内完成的一本适合于广播电视教学特点的教科书.限于我们的水平和经验,书中定有不少缺点错误,我们诚恳地希望读者批评指出.

编　者

1986 年 4 月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　线性规划

第一篇　线性代数

第一章　行列式

在生产经营管理活动中，在商品的流通和交换过程中，在人们日常的活动中所碰到的问题，有许多可以直接或近似地表示成一些变量间的线性关系，因此研究变量间的线性关系是非常重要的．例如线性方程组和矩阵，而行列式是研究它们的一种重要工具．本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式解 n 元 n 个线性方程组

§1-1　行列式定义

（一）二阶、三阶行列式复习

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引入的，我们把未知量的最高次数是一次的方程组称为线性方程组．

在初等代数中，已经知道怎样求解二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1\text{-}2) \end{cases}$$

这里的x_1、x_2是未知量，我们用加减消元法从方程组里消去一个未知量，为此：

式 (1-1)$\times a_{22}-$(1-2)$\times a_{12}$,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

式 (1-2)$\times a_{11}-$(1-1)$\times a_{21}$,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$,方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\tag{1-3}$$

容易验证(1-3)式确实是方程组的解.

(1-3)式中的分母相同，而且只与方程组中 x_1、x_2 的系数有关,如果把这些系数按原来方程组中的位置写出,可便于我们记忆(1-3)式. 引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,称为二阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\tag{1-4}$$

(我们也可将 D 称为方程组的系数行列式). 其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 称为这个二阶行列式的元素;横排称为行,竖排称为列;从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

若将行列式 D 中的第一列元素换成方程组中的常数项,得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中的第二列元素换成方程组中的常数项，得到行

列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

分别表示代数和 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 与 $a_{11}b_2-a_{21}b_1$. 于是(1-3)式可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-5}$$

例1 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}2x+y=5\\x-3y=-1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y-12=0\\3x+7y+5=0\end{cases}$

解 (1) 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7$$

所以方程组的解是

$$x=\frac{D_1}{D}=2, \quad y=\frac{D_2}{D}=1$$

(2) 先将原方程组变换成一般形式

$$\begin{cases}2x-3y=12\\3x+7y=-5\end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 7\end{vmatrix}=23 \qquad D_1=\begin{vmatrix}12 & -3\\-5 & 7\end{vmatrix}=69$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 12\\3 & -5\end{vmatrix}=-46$$

所以原方程组的解是

$$x=\frac{D_1}{D}=3 \qquad y=\frac{D_2}{D}=-2$$

三元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & (1\text{-}6)\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & (1\text{-}7)\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (1\text{-}8)\end{cases}$$

与二元线性方程组类似，用加减消元法先消去一个未知量，(例如先消去 x_3)，然后利用二元线性方程组的结果解出另外两个未知量，并将其代入原方程组中任意一个，就可求出被消去的未知量的值. 即式 (1-6)$\times a_{23}-$(1-7)$\times a_{13}$，得

$$(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})x_2=b_1a_{23}-b_2a_{13} \tag{1-9}$$

式 (1-6)$\times a_{33}-$(1-8)$\times a_{13}$，得

$$(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})x_1+(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})x_2=b_1a_{33}-b_3a_{13} \tag{1-10}$$

设方程组(1-9)，(1-10)的系数行列式不等于零，那么可以解出 x_1、x_2，然后再将它们代入(1-6)式求出 x_3. 结果如下：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} \\ \qquad -b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}) \\ x_2 = \dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} \\ \qquad -a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33} - a_{31}b_2a_{13}) \\ x_3 = \dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 \\ \qquad -a_{11}a_{32}b_2 - a_{21}a_{12}b_3 - a_{31}a_{22}b_1) \end{cases} \tag{1-11}$$

其中 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0$. 方程组解的这种表示式很繁琐，为了方便记忆和计算，我们引进记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23} \cdot a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1-12}$$

三阶行列式含有三行、三列，共 9 个元素，(1-12)式等号右边的代数式叫做三阶行列式的展开式，式中共有 6 项，每一项都是行列式中三个不同元素的乘积，而且位于不同的行和不同的列. 因此，三阶行列式的展开式是三个不同元素乘积的代数和.

若分别令(1-11)式的分子等于行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

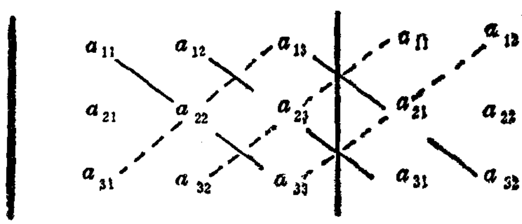
$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1-6)、(1-7)、(1-8)的解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_2=\frac{D_3}{D} \tag{1-13}$$

其中行列式 D_1、D_2、D_3 是将系数行列式 D 中第一、二、三列的元素分别换成对应的常数项得到的.

三阶行列式(1-12)的值如何求呢？与二阶行列式类似，引用对角线法则，很容易把三阶行列式的展开式各项写出来. 首先写出一个有六条对角线的表，如



这对角线表是将原三阶行列式的第一、二两列重复写出依次附加在三阶行列式右边而成，取每一条对角线的三个元素的乘积，在实线对角线上三个元素的乘积冠以“+”号，在虚线对角线上三个元素的乘积冠以“−”号，然后把这六个乘积加起来，就得到三阶行列式的展开式.

例 2　求三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$的值.

解

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 4\times 5+(-1)\times 1\times 2+2\times 3\times(-6)$$

$$-2\times 4\times 2-2\times 1\times(-6)-(-1)\times 3\times 5=13$$

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} x-y+2z=13 \\ x+y+z=10 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 1\times(-1)+(-1)\times 1\times 2+2\times 1\times 3-2\times 1\times 2$$

$$-1\times 1\times 3-(-1)\times 1\times(-1)=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-5 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-35$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=1 \qquad y=\frac{D_2}{D}=2 \qquad z=\frac{D_3}{D}=7$$

（二）n 阶行列式

前面我们用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解，那么 n 元 n 个线性方程组的解是否也能利用行列式将它表示出来呢？这就需要把二阶、三阶行列式的意义推广到一般的 n 阶行列式. 为此首先分析三阶行列式的结构，找出一般规律，然后引出 n 阶行列式的概念.

从(1-12)式中可以看到:

1. 等式右边的每一项都是三个取自不同行、不同列的元素的乘积，即每一项都可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-14}$$

其中 j_1、j_2、j_3 取 1、2、3 所有可能的六种不同排列中的一个排列.

2. 等式右边的每一项或者带正号，或者带负号. 那么怎样确定每一项的符号呢？从(1-12)式可以看到，带有正号的那些乘积的第二个指标 j_1、j_2、j_3 形成下列三个排列

$$1,2,3; \quad 2,3,1; \quad 3,1,2 \tag{1-15}$$

带有负号的那些乘积的第二个指标 j_1、j_2、j_3 形成下列三个排列

$$1,3,2; \quad 2,1,3; \quad 3,2,1 \tag{1-15$'$}$$

现在我们要问排列(1-15)和(1-15′)的区别在那里？下面，用逆序这个概念来说明它们的区别.

任意两个数，如果大的在小的前面，我们就说这两个数有一**逆序**. 一个排列中所有逆序的个数称为这个排列的**逆序**

数. 于是(1-15)中第一个排列没有逆序，我们就说逆序的个数是零；在第二个排列中，如果逐次把每一个数同它后面各个数比较，很容易看出有两个逆序，一个是 2 在 1 前，另一个是 3 在 1 前；同样可看出(1-15)中第三个排列也有两个逆序，一个是 3 在 1 前，另一个是 3 在 2 前. 于是我们得知(1-15)中所有排列都是偶数个逆序. 用完全同样的方法来研究(1-15′)中的排列，得知它们都有奇数个逆序. 一个排列如果它的逆序数是偶数就称为**偶排列**，是奇数就称为**奇排列**. 因此我们就得到(1-12)中各项符号确定的法则：乘积(1-14)在(1-12)中的符号是正号或是负号，完全由它的第二个指标形成的排列 j_1, j_2, j_3 是偶排列或奇排列来决定. 于是我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, j_3)} (-1)^{[j_1, j_2, j_3]} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \qquad (1\text{-}16)$$

其中符号$[j_1, j_2, j_3]$表示排列 j_1, j_2, j_3 的逆序数，符号 $\sum\limits_{(j_1, j_2, j_3)}$ 表示对 1, 2, 3 的所有可能的排列取和.

3. 等号右边带正号的项与带负号的项的个数各占一半.

上面这些规律对二阶行列式显然也成立. 现在我们就可以给出 n 阶行列式的定义：

假设有 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，将它们排列成一个有 n 行、n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}17)$$

我们就把(1-17)式称为n阶行列式，它表示所有这样乘积的代数和，每个乘积中含有n个元素，每行一个，每列也一个，于是这些乘积都可以写成下面的形式

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-18}$$

其中每个元素的第1个下标(行标)是按1, 2, …, n的自然顺序排列，第2个下标(列标)$j_1, j_2, \cdots, j_n$是1, 2, …, n的某一个排列，每个这样的排列依1, 2, …, n的顺序来比较，就有一个逆序数．当这个逆序数是偶数时，这项取正号，是奇数时，这项取负号．用式子表示，就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-19}$$

(1-19)式称为n阶行列式的表达式(或称为完全展开式)．

因为n个元素的全部排列共有$n!$个，所以n阶行列式的展开式中共有$n!$项，其中带正号的项和带负号的项各占一半．

当$n=2$或$n=3$时，(1-19)式表示二阶或三阶行列式．我们还规定由一个元素a构成的一阶行列式$|a|$就是a本身．

例 4 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$