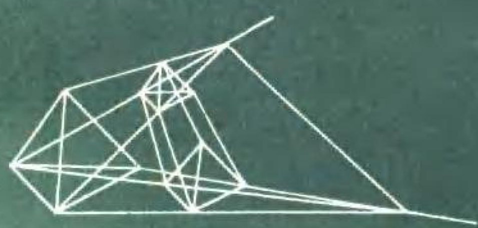
多维空间画法几何及其应用

〔苏〕П.В.费里波夫 著
谢申鉴　周积义　译



清华大学出版社

多维空间画法几何及其应用

〔苏〕П.В.费里波夫 著

谢申鉴 周积义 译

清华大学出版社

内 容 简 介

本书全面阐述了多维空间线性形象和某些非线性形象的图示问题，以及在正投影图和平行轴测投影图中解决定位和度量问题，并引入了多维空间画法几何方法在线性规划，复变函数理论和积分计算中实际应用的例子。

多维空间画法几何方法可广泛应用于物理-化学、冶金、地质、运输、数学以及其它需要解决多参数问题的科学技术领域。本书可作为图学工作者、工程图学专业学生、研究生学习多维画法几何的教学用书，以及其它从事解决多参数问题的广大工程技术人员、科学工作者、教师、研究生和高等学校的大学生们的参考书。

多维空间画法几何及其应用

〔苏〕П.В.费里波夫著

谢申鉴　厢积义 译

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

轻工业出版社印刷厂排版

河北省固安县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各新华书店经售

☆

开本 787×1092 1/32　印张10 7/16　字数 234千字

1983年12月第一版印刷　1983年12月　第一次印刷

印数 1—25 000

统一书号：15235·86　定价1.20元

译者的话

苏联П.В.费里波夫1979年所著“多维空间画法几何”一书是目前所见到的内容较全面、系统性较强的一本专著。书中全面地阐述了多维空间的线性形象和某些非线性形象的图示问题，以及在正投影图和平行轴测投影图中解决它们的定位和度量问题，并引入了多维空间画法几何方法在线性规划、复变函数理论和积分计算中的实际应用例子。

多维空间画法几何方法可以广泛应用于物理—化学、冶金、地质、运输、数学以及需要解决多参数问题的其它科学技术领域。

本书可作为高等工业院校及中等技术学校画法几何及工程制图教师、工程图学专业学生和研究生学习多维空间画法几何的教学用书，以及其它从事解决多参数问题的广大工程技术人员、科学工作者、教师、研究生和高等院校的大学生们的参考书。

本书第一篇、第二篇和第三篇的第一章由谢申鉴译、周积义校，第三篇的第二章和第三章由周积义译、谢申鉴校。

目录

第二篇：多于四维的空间画法几何

第三篇：多维空间画法几何在线性规划、复变函数理论和积分计算中的应用

序　言

最近二十年来，多维空间物体的图示问题，在画法几何中得到越来越广泛的传播。我国和外国的学者们有不少讨论这个问题的著作，多维空间画法几何已在图示法科学中占据了一个牢固的地位。

多维空间画法几何方法的实际意义在于它能够给出三个变量以上的函数关系的直观图样。这样的必要性在用图解法和图解解析法解决各种科学技术领域中的多参数问题时将会遇到。例如：在物理—化学分析领域中〔5,6,29，35，39，64〕，在利用电子计算机绘制技术形式的曲面时〔31，32，36〕，在金属的压制、轧制和切削加工时〔1—4〕，在研究运输机器的热过程时〔73〕，以及在其它许多领域中〔10，14，21，30，74—77〕。

用多维空间画法几何方法解决所提出的问题，对广大工程技术和科学工作者们可能更容易理解。

在当今的众多的多维空间画法几何著作中，仅仅阐述了一些单独的理论和实际问题，系统地研究多维空间物体的图示原理，和在各种领域中都能找到用途的定位问题和度量问题的解法，就象对三维空间物体曾具有的那样，在文献中尚未发现。本书的目标是在某种程度上填补这个缺陷。

多于三个尺度的空间的第一个概念出现在Ж·拉格朗日（*J.Lagrange*）的著作中〔18〕。拉格朗日研究了这样的空间，在该空间里的质点的位置特点是有四个坐标——空间直

角坐标x、y、z和时间坐标t。

多维空间的研究开始于19世纪40年代〔22，90,97,106,110，111〕并带有抽象的性质，没有提到这种空间里的物体在图上的表示。这个问题第一次被提出是在20世纪初的著作中〔103〕。

由于物理一化学分析领域在绘制多组分系统图时所提出的具体实际问题，多维物体的图示原理在著作〔69—72，88〕中，得到了进一步的发展。

多维空间画法几何方法的实际应用，自然地促进了一系列理论研究的出现，其中我们感兴趣的是包含有总结多维空间的中心投射和平行投射基本原理的著作〔7，8，17，43—45，47，58—60，82，83〕。

由于多维空间画法几何方法的应用领域的扩大，它们在我国也和外国一样，从50年代末期开始，逐渐成为全面研究的对象〔11—13，15，16，19，20，23—27，37，38，40—43，46，49—54，56，57，61—63，66—68，77—81，84—86，89—96，98，99，101，102，105，107—109〕。

已有的表示多维物体的图示方法，可以分为三类：

第一类方法的基础是作图的坐标原理在多维空间元素图上的直接推广。这些方法叙述在〔93〕，〔103〕和一系列其它著作中。

第二类方法的基础是用图样平面或三维空间的几何形象模拟多维空间元素。在这方面最卓越的是E·C·费多罗夫（Федоров）的著作，以及由此发展出来的一些著作。

第三类方法的基础是中心投射和平行投射原理在多维空间物体上的推广。这类方法叙述在Д·Д·莫尔杜哈伊-鲍尔托夫斯基（Мордухай-Болтовский），И·Ф·切特维鲁

新（Четверухин），И·И·科托夫(Котов)，В·Н·彼尔维科娃（Первикова）和一些其它作者的著作中。

目前，正投影法或蒙日法以及平行轴测投影，是三维空间物体最通行的图示方法。这些方法为所有的工程技术工作者和科学工作者所熟知。

如果用三维空间的形象模拟多维空间的元素，并利用上述方法把这些形象表示在图上；那么，对于多维空间物体的图象，可以采用正投影法和平行轴测投影法。

根据这样的原理阐述多维空间画法几何，在所察看的文献中，到现在为止还没有得到广泛的传播，而在本书中提出来了。同时：

1. 系统地、循序渐进地叙述了四维空间的线性和某些非线性物体的图示问题，以及在正投影图和平行轴测投影图中，给出这些物体的定位问题和度量问题的解法。

2. 指出了将四维空间物体的图象绘制方法，以及在上述图样中解决这些物体的定位和度量问题的方法，推广到解决高于四维的空间物体的类似问题的可能性。

3. 举出了利用所提出的多维空间物体的图示方法，解决某些应用问题的例子。

Е·С·费多罗夫关于在三维空间里用各种位置的矢量来模拟四维空间元素的可能性的思想，在本专著中得到了发展和极其重要的更准确的说明。在阐述所有的问题时，广泛地利用多维空间的物体相对于直角坐标系的定向法，使所述空间的物体的解析表达与它们的图解表达能够相互结合起来。

本书中研究了正常的欧氏多维空间，点是它的元素。在某些情况下，引入了这种空间的非正常元素。

用Π^n标记的每一个n维的多维空间，除了包含点以外还

包含线性形象——直线、平面和其它线性子空间。通常把维数为 $(n-1)$ 的线性子空间，称为空间 Π^n 的超平面。

大家知道〔103，111〕：任何 m 维空间 Π^m，由不在维数小于 m 的空间里的 $(m+1)$ 个一般位置的点所确定。例如：三维空间 Π^3 由不在一个平面 Π^2 内的四个点 $(3+1)$ 所确定，四维空间 Π^4 由不在一个三维空间 Π^3 里的五个点所确定，等等。这组确定空间的互不关联的点称为该空间的单纯形。空间 Π^m 的单纯形记作 $S(m+1)$。

如果在空间 Π^n 中有两个线性子空间 Π^m 和 Π^k，那么，它们相互相交或从属于第三个子空间的条件，由众所周知的关系所确定〔17，103，111〕。若 $m+k\geqslant n$，则线性子空间 Π^m 和 Π^k 沿线性子空间 Π^l 相交，Π^l 的维数由下述关系确定：

$$l=m+k-n \tag{1}$$

子空间的这种相交结果用符号写成下列形式：

$$\Pi^m\times\Pi^k=\Pi^l \tag{2}$$

若 $m+k<n$，则子空间 Π^m 和 Π^k 不相交，但两者同属于子空间 Π^p，Π^p 的维数按下述公式确定：

$$p=m+k+1 \tag{3}$$

子空间的这种并集（объединение）结果，可用符号写成下述形式：

$$\Pi^m\cdot\Pi^k=\Pi^p \tag{4}$$

例如：在四维空间 Π^4 里，两个平面 Π^2 和 Π^2_* 彼此相交，确定具有零维的线性形象，即：一个点；因为根据(1)，$2+2-4=0$。在四维空间 Π^4 里，两条任意位置的直线 Π^1 和 Π^1 不相交，因为 $1+1<4$。但是，根据(3)，这两条直线确定一个属于空间 Π^4 的三维子空间 Π^3，因为 $1+1+1=3$。

在空间 Π^n 中除了线性形象以外，还包含非线性形象：

——曲线、二维曲面和三维曲面等等，直到$n-1$维曲面。$n-1$维曲面被称为空间Π^n的超曲面。

大家知道〔106〕：若在Π^n里，两个非线性形象相交，或一个非线性形象与一个线性形象相交，则它们相互相交的结果，在一般情况下，确定某一个非线性形象、而在特殊情况下，确定一个或几个线性形象。作为已知形象的相交结果所得的形象的维数的求法，与线性形象的求法相同。例如：若在空间Π^n里有两个任意位置的非线性形象N^m和N^k，则它们要相互相交，必须满足不等式$m+k\geqslant n$。

形象N^m和N^k的相交结果确定一线性或非线性形象，它的维数按公式(1)求出。如果用一线性形象替换非线性形象N^m或N^k，那么从两个形象相互相交所得形象的维数的观点来看，结果是不变的。

对于上述两个形象的相互相交，条件$m+k\geqslant n$是必要的，但不是充分的。除此之外，这些形象的相互相交，还取决于它们在空间Π^n的相对位置和它们的几何特性。

正如已经指出的那样，我们将广泛利用多维空间物体相对于直角坐标系的标定方向。如果这样的系统属于n维空间，它由n个互相垂直的坐标轴组成，在这个系统中的每一个坐标轴，垂直于位于其余$(n-1)$个坐标轴确定的子空间内的所有直线。例如：在属于三维空间的直角笛卡儿坐标系$Oxyz$中，轴Oz垂直于位于坐标平面xy内的所有直线，在属于四维空间的直角坐标系$Oxyzt$中，轴Ot垂直于位于三维子空间xyz内的所有直线。这样的类比，可以推广到更高维的空间。

在以后的叙述中，在正投影中完成的图样称为正投影图；而在轴测投影中完成的图样称为轴测图。

第一篇

四维空间画法几何

第一章　点在正投影图和轴测图上的表示

§1.　点在正投影图上的表示

在图1中表示出属于直角坐标系$Oxyz$的三维欧氏空间的某一点A_1^0，如所周知：这个点的位置由三个直角坐标x_A，y_A和z_A唯一确定。然后，再经过点A_1^0引任意方向的矢量$A_1^0A_2^0$。它的长度可以看作是属于四维空间的某个点A的第四个坐标t_A。如果经过三维空间的一点B_1^0作矢量$B_1^0B_2^0$平行于矢量$A_1^0A_2^0$，则矢量$B_1^0B_2^0$的长度也可以看作是四维空间的一点B的第四个坐标t_B。四维空间的点的第四个坐标的符号，由矢量的方向来确定。若假定矢量$A_1^0A_2^0$的方向是正的，则与它相反的矢量$P_1^0B_2^0$的方向就是负的。因此，若四维空间的点A的所有四个坐标都是正值，则在同一空间里的点B的第四个坐标t_B就是负值。

由此可知，三维空间的平行矢量，可以模拟四维空间的点，即在三维空间里可以建立四维空间模型。同时，三维空

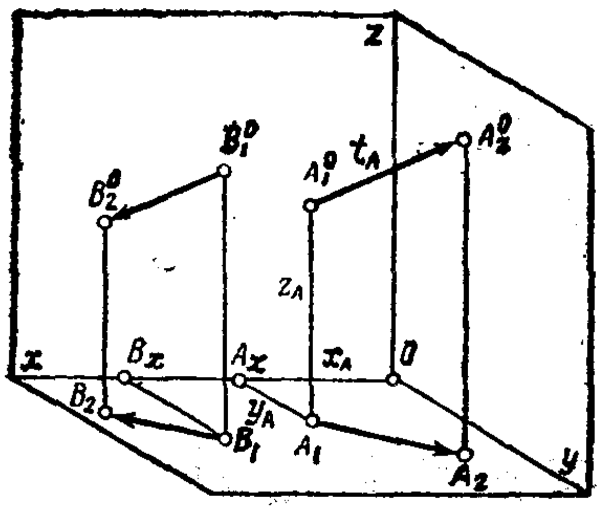


图 1

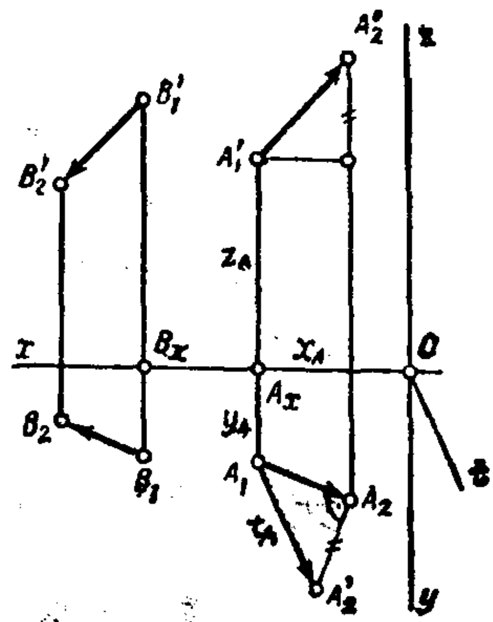


图 2

间的普通点，也可以看作是四维空间的点，但是，这种点的第四个坐标等于零。

如果将矢量$A_1^0A_2^0$和矢量$B_1^0B_2^0$垂直地投射到各坐标平面上，然后，象在画法几何中所采用的那样，使这些平面与图纸平面重合，则在所形成的正投影图上将表示出四维空间的两个点A和B。在图2中，这些点由它们的两个正投影表示。

与点A和B类似，在正投影图中可以表示出四维空间里任意数量的点。但是每一个点应该用矢量的两个投影来表示，这两个投影相应地平行于矢量$A_1^0A_2^0$和$B_1^0B_2^0$的投影。并且矢量可以蜕化成一点。这样的矢量称为点矢量。因此，在正投影图中可以建立四维空间模型。

由于矢量的平行方向选得与坐标平面不平行（图1），所以，表示点的第四个坐标值的这些矢量的长度，在正投影图中出现变形（图2）。

为了确定每个矢量的长度，必须进行画法几何中所熟知

的补充作图，即利用作直角三角形的方法，或者将矢量旋转到与投影面平行的位置，或者最后选取一个与矢量方向平行的新投影面的方法。在图2中，矢量$A_1^0A_2^0$的长度，也就是四维空间点A的坐标t_A。它是利用矢量$A_1^0A_2^0$的水平投影A_1A_2作直角三角形而定出的。为了确定点B的坐标t_B，利用矢量$B_1^0B_2^0$的水平投影B_1B_2作出与三角形$A_1A_2A_2^1$相似的三角形就足够了。这样的作图可以用经过投影B_2作直线平行于直线$A_2A_2^1$，和经过投影B_1作直线平行于直线$A_1A_2^1$的方法来实现。这两直线彼此相交，确定矢量的终点B_2^1，它的起点位于B_1。

在确定四维空间的点的第四个坐标值时，必须进行补充作图，这无疑是由于这些点的矢量平行方向选择不好的缺陷造成的。为了消除所指出的矢量平行方向的缺陷，应该选择平行于平面xy或平面xz的方向⁽¹⁾。在这种情况下，矢量在平面xy或xz上的长度，亦即点的第四个坐标在图示时没有变形。在图3中，四维空间的点A和B，是用平行于坐标平面xz的矢量的两个正投影来表示的。矢量的正面投影长度，表示所描述的点的坐标t_A和t_B的值。同时，和先前一样，认为坐标t_A是正的，而坐标t_B是负的。

如果将矢量的平行方向取得与平面xy平行，则矢量的水平投影长度表示所描述点的坐标t的值。

矢量平行方向的更合理的选择是平行于轴Oy或Oz⁽²⁾。在这种情况下，矢量在一个坐标平面上的投影不变形，而在另

（1）如果所研究的正投影图由坐标平面xz和yz合并而成，那么矢量的平行方向可以选成平行于平面yz。

（2）如果正投影图由平面xz和yz组成，矢量方向的合理选择是平行于轴Ox。

一个坐标平面上的投影是一个点。

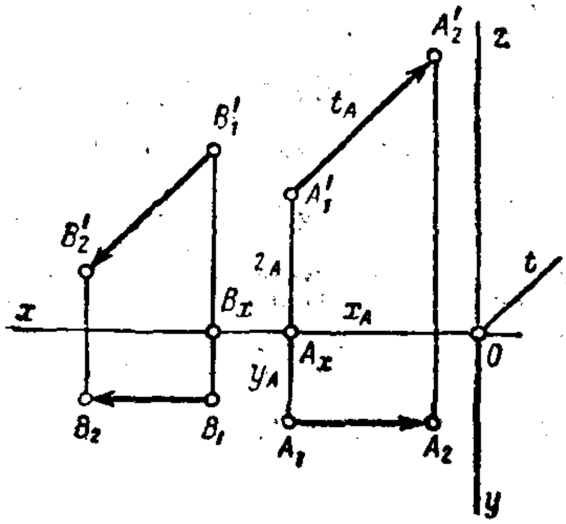


图 3

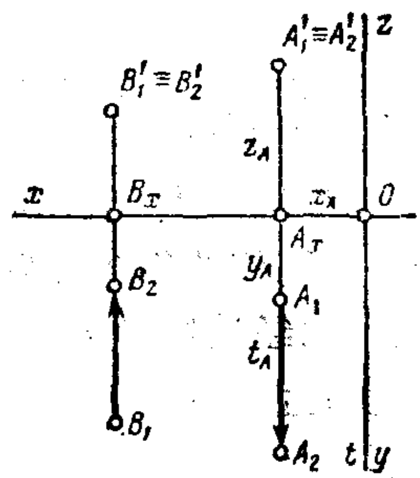


图 4

我们采用平行于轴Oy的方向为矢量的平行方向，并且认为与坐标t的正值相对应的矢量方向，是与轴Oy的正方向相重合的。在这样选择矢量的平行方向时，它们在平面xy上的长度不发生变形，而在平面xz上则被投射成一个点。在这种情况下，四维空间每个点的所有四个坐标，在正投影图中都不发生变形，且每个点的投影具有最简单的形式。仔细研究图4，可以得出上述这些特点。和前述的图一样，在这个图中表示出了四维空间的点A和B的正投影。

属于四维空间的坐标系，由相互垂直的四个坐标轴Ox、Oy、Oz和Ot组成。当然，出现的问题是怎样确定图2—4中轴Ot的位置。在这些图的每一个图中，轴Ot的位置很容易确定，如果需要，可作四维空间的这样的点，它的坐标沿轴Ox、Oy和Oz等于零，只有沿轴Ot的坐标具有正值。

为了在图4中作出这样的点，应该从点O沿轴Oy的正方向量取这个点的第四个坐标值。因此，被选为矢量方向的