现代数学译丛

动力系统几何理论引论

〔巴西〕J. 帕利斯　W. 梅罗 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

动力系统几何理论引论

〔巴西〕J. 帕利斯 W. 梅罗 著

陈藻平 董镇喜 金成桴 译

科学出版社

1988

内 容 简 介

动力系统几何理论是近代数学的一个活跃分支．本书阐述动力系统的结构稳定性和通有性理论的一些基本概念与重要定理．全书共分四章．第一章介绍微分流形与向量场，第二章论述局部稳定性，第三章论述 Kupka-Smale 定理，第四章讨论 Morse-Smale 向量场的通有性与结构稳定性．本书叙述深入浅出．书中有大量的例题与习题．

本书可供大专院校数学系高年级学生、研究生、教师及有关的科学工作者阅读．

Jacob Palis, Jr. Welington de Melo
Geometric Theory of Dynamical Systems
An Introduction
Springer-Verlag, 1982

现代数学译丛
动力系统几何理论引论
〔巴西〕J. 帕利斯 W. 梅罗 著
陈藻平 董镇喜 金成桴 译
责任编辑 吕 虹 张鸿林
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1988年4月第一版 开本：850×1168 1/32
1988年4月第一次印刷 印张：7 5/8
印数：0001-2,750 字数：195,000

ISBN 7-03-000016-1/O·3

定价：3.20 元

序 言

……（微分方程）定性理论的研究本身也具有头等意义……

Henri Poincaré, 1881.

本书对动力系统几何理论作一概述，它是引论性的，但也使读者对结构稳定性和通有性这两个重要论题中的若干基本概念有一了解.

从 Poincaré, Liapunov 和 Birkhoff 开始，很多数学家已经研究了这一理论. 在最近一些年，它的某些一般目标已经确立，并且得到了相当大的发展.

Andronov 和 Pontryagin (1937) 引进了结构稳定的基本概念，Peixoto 在一些论文 (1958—1962) 中证明了在二维曲面上结构稳定的向量场的稠密性，这两个重大事件相隔长达二十余年. 接着，Smale 把研究通有性与稳定性作为主要目标，并且在这方面得到了不少结果，以及提出在这一领域中至关紧要的一些问题，从而大大地丰富了这个理论. 在同一时期，Hartman 与 Grobman 证明了局部稳定性是一个通有的性质. 此后不久，Kupka 和 Smale 就周期轨道成功地解决了这个问题.

我们打算通过大量的例子，以及系统证明 Hartman-Grobman 定理和稳定流形定理（第二章），Kupka-Smale 定理（第三章）和 Peixoto 定理（第四章），向读者介绍这一理论的精华. 我们给出的若干定理的证明比原始的简单，且便于作重要的推广. 在第四章我们还讨论有无限个周期轨道的稳定微分同胚的基本例子. 我们叙述动力系统的结构稳定性的一般结果，且对其它一些论题，如分歧理论，作一些简短的说明. 在第四章的附录中，我们介绍旋转数

这一重要概念，且用它来描述由 Cherry 得出的一个流的漂亮的例子.

阅读本书只需要微分方程和微分流形理论的基本知识，后者中与本书有关的一些结果在第一章作一概述. 在第二章，只需要有关线性代数及 Banach 空间的隐函数定理和压缩映射定理的知识. 第三章的内容远不是初等的，但无疑不是最难的. 此处我们系统地运用匀断相交定理. 形式上第四章依赖第三章，因为我们对二维曲面这个较初等的特殊情形利用了 Kupka-Smale 定理.

由书中证明的几个定理引出了很多有关的结果和不同的研究方向. 本书的最后一部分对这些结果作了简短的(但并非完备的)介绍. 我们期望本书能使读者对这个理论有一初步的了解，从而能够较顺利地研究有关的文献.

J. 帕利斯

W. 梅罗

1981年9月于里约热内卢

符 号 表

$\mathbb{R}$ 实直线

$\mathbb{R}^n$ Euclid n 空间

$\mathbb{C}^n$ 复 n 空间

C^n 有 n 阶连续导数的可微映射类

C^∞ 无限次可微

C^ω 实解析

$df(p)$, df_p 或 $Df(p)$ f 在 p 点的导数

$(\partial/\partial t)f$, $\partial f/\partial t$ 偏导数

$D_2 f(x, y)$ 对第二个变量的偏导数

$d^n f(p)$ f 在 p 点的 n 次导数

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 线性映射空间

$L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ r 线性映射空间

$\| \ \|$ 范数

$g\circ f$ 映射 g 和 f 的合成

$\varnothing$ 空集

$f|M$ 映射 f 在子集 M 上的限制

$\overline{U}$ 集合 U 的闭包

TM_p M 在 p 点的切空间

TM M 的切丛

$\mathscr{X}^r(M)$ M 上所有 C^r 向量场组成的空间

f_*X 由 X 导出的在 f 的值域上的向量场

X_t 由 X 的流导出的在时间 t 的微分同胚

$\mathscr{O}(p)$ p 的轨道

$\omega(p)$ p 的 ω 极限集

$\alpha(p)$ p 的 α 极限集

S^n　单位 n 维球面

T^2　二维环面

$\operatorname{grad} f$　f 的梯度场

$\int f$　f 的积分

id_M　M 的恒等映射

$\langle , \rangle$　Riemann 度量

$\langle , \rangle_p$　由 Riemann 度量定义的在 p 点的切空间的内积

$C^r(M, N)$　C^r 映射空间

$\| \|_r$　C^r 范数

$\operatorname{Diff}^r(M)$　C^r 微分同胚空间

$f \pitchfork S$　f 与 S 匀断相交

$\mathcal{O}_X(p)$　X 过 p 点的轨道

$\mathcal{O}_+(p)$　p 的正轨道

$\alpha'(t)$　线段上的映射在 t 的导数

T^n　n 维环面

$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子空间

$\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$　$\mathbb{C}^n$ 上的线性算子复向量空间

L^k　$L \circ L \circ \cdots \circ L$

$\operatorname{Exp}(L)$, e^L　L 的指数

$GL(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的可逆线性算子群

$H(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的双曲线性同构空间

$\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的双曲线性向量场空间

$\operatorname{Sp}(L)$　L 的谱

$\mathscr{G}_0$　所有奇点为简单的向量场空间

$\det(A)$　A 的行列式

$\mathscr{G}_1$　所有奇点为双曲的向量场空间

G_0　所有不动点为初等的微分同胚空间

G_1　所有不动点为双曲的微分同胚空间

$C_b^0(\mathbb{R}^m)$　从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续有界映射空间

$\dim(M)$　M 的维数

$W^s(p)$　p 的稳定流形

$W^u(p)$　p 的不稳定流形

$W^s_\beta(p)$　大小为 β 的局部稳定流形

$W^u_\beta(p)$　大小为 β 的局部不稳定流形

$W^s_{\mathrm{loc}}(0)$　局部稳定流形

$W^u_{\mathrm{loc}}(0)$　局部不稳定流形

$\mathscr{G}_{12}$　属于 $\mathscr{G}_1$ 的，其闭轨道都是双曲的所有向量场组成的空间

$\mathscr{X}(T)$　属于 $\mathscr{G}_1$ 的，周期 $\leqslant T$ 的闭轨道都是双曲的所有向量场组成的空间

$L_\alpha(X)$　X 的轨道的 α 极限集之并

$L_\omega(X)$　X 的轨道的 ω 极限集之并

$\Omega(X)$　X 的非游荡点的集合

M-S　Morse-Smale 向量场的集合

∂M　M 的边界

$\mathrm{int}A$　集合 A 的内域

目　录

序言……ii
符号表……v
第一章　微分流形与向量场……1
§0. $\mathbf{R}^n$ 中的微积分与微分流形……1
§1. 流形上的向量场……11
§2. C^r 映射空间的拓扑……22
§3. 匀断相交性……27
§4. 结构稳定性……30
第二章　局部稳定性……46
§1. 管状流定理……44
§2. 线性向量场……48
§3. 奇点与双曲不动点……66
§4. 局部稳定性……70
§5. 局部分类……80
§6. 不变流形……88
§7. λ 引理(倾角引理). 局部稳定性的几何证明……98
三章　Kupka–Smale 定理……110
§1. Poincaré 映射……110
§2. 闭轨为双曲的向量场的通有性……120
§3. 不变流形的匀断相交性……130
第四章　Morse–Smale 向量场的通有性与结构稳定性……141
§1. Morse–Smale 向量场; 结构稳定性……142
§2. 定向曲面上的 Morse–Smale 向量场的稠密性……158
§3. 一些推广……179
§4. 关于结构稳定的一般叙述及其它……183
附录: 旋转数与 Cherry 流……218
参考文献……228

第一章　微分流形与向量场

本章建立的一些概念和基本事实对于理解以后各章是必需的.

我们首先介绍$\mathbb{R}^n$中的微积分,常微分方程,以及$\mathbb{R}^n$中的子流形的一些经典结果;然后定义流形上的向量场,并将$\mathbb{R}^n$中的常微分方程理论的一些局部性结果应用到这种向量场.我们用α极限集和ω极限集的概念来介绍向量场的定性研究,并证明重要的Poincaré-Bendixson定理.

第二节,我们在流形间的可微映射集合上定义C^r拓扑.证明具有C^r拓扑的C^r映射集合是一可分的Baire空间,C^∞映射集合在该空间中稠密.由此,我们得到向量场空间和微分同胚空间的具有相同的性质的拓扑.

第三节专门介绍今后经常要用到的匀断相交定理.

我们以确立动力系统的几何理论或定性理论的一般目的来结束本章.特别地,讨论定义在$\mathbb{R}^n$的子流形上的微分方程的拓扑等价和结构稳定性概念.

§0.　$\mathbb{R}^n$中的微积分与微分流形

这一节我们将叙述$\mathbb{R}^n$中的微积分,微分方程以及微分流形的某些概念和基本结果.其中有关$\mathbb{R}^n$中的微积分所列举的事实的证明可以在[46],[48]中找到,关于微分方程的可参看非常可取的初等教程[4],[41],[116],或较高级教程[33],[35],也可参看[47];关于微分流形的可参看[29],[38],[49].

设f: $U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$是定义在$\mathbb{R}^m$的开子集$U$上的一个映射.我们说$f$在$U$中的一点$p$处**可微**,如果存在一个线性变换$T$: $\mathbb{R}^m$

$\to \mathbb{R}^k$, 使得对小的 v, $f(p+v)=f(p)+T(v)+R(v)$, 满足

$$\lim_{v\to 0} R(v)/\|v\|=0.$$

称线性映射 T 为 f 在 p 点的导数, 记作 $df(p)$, 有时也记作 df_p 或 $Df(p)$. 特别地, 由 f 在 p 点导数的存在可得出 f 在 p 点连续. 如果 f 在 U 中的每一点可微, 则得一映射 $df: U\to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, 对 U 中每一点 p, 它对应于 f 在 p 点的导数. 其中 $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ 表示由 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的线性映射的向量空间, 其范数为 $\|T\|=\sup\{\|Tv\|:\|v\|=1\}$. 如果 df 在 U 中连续, 则说 f 在 U 中是 C^1 类的. 众所周知, f 是 C^1 类的当且仅当 f 的各坐标函数的偏导数 $\partial f^i/\partial x_j: U\to \mathbb{R}$ 都存在且连续. $df(p)$ 关于 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^k$ 的标准基底的矩阵是 $[(\partial f^i/\partial x_j)(p)]$. 类似地, 我们用 df 在 p 点的导数定义 $d^2f(p)$. 这样, $d^2f(p)$ 属于空间 $L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k))$, 后者与 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的双线性映射空间 $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 同构. 根据这个同构, 在 $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ 上诱导出范数

$$\|B\|=\sup\{\|B(u, v)\|;\ \|u\|=\|v\|=1\}.$$

我们说 f 在 U 中是 C^2 类的, 如果 $d^2f: U\to L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 连续. 我们可归纳地定义 $d^rf(p)$ 为 $d^{r-1}f$ 在 p 的导数. 于是有 $d^rf(p)\in L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$, 其中 $L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 是范数为

$$\|C\|=\sup\{\|C(v_1, \cdots, v_r)\|;\ \|v_1\|=\cdots=\|v_r\|=1\}$$

的 r 线性映射空间. 从而, 如果 $d^rf: U\to L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 连续, 我们就说 f 在 U 中是 C^r 类的. 最后, 如果对一切 $r\geqslant 0$, f 是 C^r 类的, 我们就说 f 在 U 中是 C^∞ 类的. 注意, f 是 C^r 类的当且仅当 f 的各坐标函数的所有直到 r 阶的偏导数都存在且连续. 设 U, V 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U\to V$ 是一个 C^r 满射. 如果存在 C^r 映射 $g: V\to U$, 使得 $g\circ f$ 是 U 上的恒等映射, 我们就说 f 是一个 C^r 微分同胚.

0.0 命题. 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是一开集, $f_n: U\to\mathbb{R}^k$ 是 C^1 类映射序列. 假如 f_n 逐点收敛于 $f: U\to\mathbb{R}^k$, 并且序列 df_n 一致收敛于 $g: U\to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, 则 f 是 C^1 类的, 并且 $df=g$. □

0.1 命题(链规则). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$ 是两个开集. 如果 $f: U\to\mathbb{R}^n$ 在 $p\in U$ 可微, $f(U)\subset V$ 且 $g: V\to\mathbb{R}^k$ 在 $q=f(p)$ 可微, 则 $g\circ f: U\to\mathbb{R}^k$ 在 p 可微, 且

$$d(g\circ f)(p)=dg(f(p))\circ df(p). \qquad \square$$

推论 1. 如果 f 和 g 都是 C^r 类的, 则 $g\circ f$ 也是 C^r 类的. $\square$

推论 2. 如果 $f: U\to\mathbb{R}^k$ 在 $p\in U$ 可微, $\alpha: (-1, 1)\to U$ 是满足 $\alpha(0)=p$ 及 $(d/dt)\alpha(0)=v$ 的一条曲线, 则 $f\circ\alpha$ 是一条在 0 可微且满足

$$(d/dt)(f\circ\alpha)(0)=df(p)v$$

的曲线. $\square$

0.2 定理(反函数定理). 设 $f: U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 映射, $r\geqslant 1$. 如果 $df(p): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是一同构, 则 f 在 $p\in U$ 是一个 C^r 局部微分同胚; 就是说, 存在 p 的邻域 $V\subset U$ 和 $f(p)$ 的邻域 $W\subset\mathbb{R}^m$, 以及 C^r 映射 $g: W\to V$, 使得 $g\circ f=I_V$ 且 $f\circ g=I_W$, 其中 I_V 表示 V 上的恒等映射, I_W 为 W 上的恒等映射. $\square$

0.3 定理(隐函数定理). 设 $U\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^n$ 是一 C^r 映射, $r\geqslant 1$. 令 $z_0=(x_0, y_0)\in U$, $c=f(z_0)$. 假设 f 关于它的第二个变量的偏导数 $D_2f(z_0): \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一同构, 则存在包含 x_0 的开集 $V\subset\mathbb{R}^m$ 与包含 z_0 的开集 $W\subset U$, 使得对每一 $x\in V$, 存在唯一的 $\xi(x)\in\mathbb{R}^n$, 使得 $(x, \xi(x))\in W$, 且 $f(x, \xi(x))=c$. 如此定义的映射 $\xi: V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 类的, 且它的导数为

$$d\xi(x)=[D_2f(x, \xi(x))]^{-1}\circ D_1f(x, \xi(x)). \qquad \square$$

注. 这些定理对 Banach 空间也成立.

0.4 定理(浸入的局部形式). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^{n+m}$ 是 C^r 映射, $r\geqslant 1$. 假设对某点 $x_0\in U$, 导数 $df(x_0): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ 是一个单射. 则存在 x_0 的邻域 $V\subset U$, 原点的邻域 $W\subset\mathbb{R}^n$, $f(x_0)$ 的邻域 $Z\subset\mathbb{R}^{m+n}$, 以及 C^r 微分同胚 $h: Z\to V\times W$, 使得对一切 $x\in V$ 有 $h\circ f(x)=(x, 0)$. $\square$

0.5 定理(浸没的局部形式). 设 $U\subset\mathbb{R}^{m+n}$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射, $r\geqslant 1$. 假设对某点 $z_0\in U$, 导数 $df(z_0)$ 是一个满射. 则

存在 z_0 的邻域 $Z\subset U$，$c=f(z_0)$ 的邻域 $W\subset\mathbb{R}^n$，原点的邻域 $V\subset\mathbb{R}^m$，以及 C^r 微分同胚 $h: V\times W\to Z$，使得对一切 $x\in V$ 及一切 $w\in W$，有

$$f\circ h(x, w)=w. \qquad \square$$

设 $f: U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是一 C^r 映射，$r\geqslant 1$. 如果 $df(x)$ 是一个满射，则称点 $x\in U$ 为 f 的正则点；反之，x 称为临界点. 如果每个 $x\in f^{-1}(c)$ 都是正则点，则称 $c\in\mathbb{R}^n$ 为正则值；反之，c 就称为临界值. $\mathbb{R}^n$ 的一个子集称为剩余的，如果它包含可数个开稠子集的交. 由 Baire 定理，$\mathbb{R}^n$ 的每个剩余子集都是稠密的.

0.6 定理(Sard[64]). 如果 $f: U\subset\mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 类的，则 f 的正则值集合是 $\mathbb{R}^n$ 中的剩余集. $\square$

我们应该指出，如果 $f^{-1}(c)=\varnothing$，则 c 是一个正则值. 为使正则点 $x\in U$ 存在，必须有 $m\geqslant n$. 如果 $m<n$，则 U 中所有的点都是临界点，因而 $f(U)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是“贫乏”的，亦即 $\mathbb{R}^n-f(U)$ 是剩余集.

现在我们来叙述有关微分方程的某些基本结果. 开集 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上的向量场是一映射 $X: U\to\mathbb{R}^m$. 我们将只考虑 C^r 向量场，$r\geqslant 1$. X 的过点 $p\in U$ 的积分曲线是一满足 $\alpha(0)=p$ 且对所有 $t\in I$，$\alpha'(t)=X(\alpha(t))$ 的可微映射 $\alpha: I\to U$，其中 I 是包含 0 的一个开区间. 我们称 α 为微分方程 $dx/dt=X(x)$ 的满足初值条件 $X(0)=p$ 的一个解.

0.7 定理(存在唯一性定理). 设 X 为开集 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上的 C^r 向量场，$r\geqslant 1$，$p\in U$. 则存在 X 的满足 $\alpha(0)=p$ 的积分曲线 $\alpha: I\to U$. 如果 $\beta: J\to U$ 是 X 的另一条满足 $\beta(0)=p$ 的积分曲线，则对一切 $t\in I\cap J$，$\alpha(t)=\beta(t)$. $\square$

X 在点 $p\in U$ 的一个局部流是一映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$，其中 V_p 是 p 在 U 中的一个邻域，使得对每一 $q\in V_p$，由 $\varphi_q(t)=\varphi(t, q)$ 定义的映射 $\varphi_q: (-\varepsilon, \varepsilon)\to U$，是 X 通过 q 的一条积分曲线；亦即 $\varphi(0, q)=q$，且对一切 $(t, q)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p$，有

$$(\partial/\partial t)\varphi(t, q)=X(\varphi(t, q)).$$

0.8 定理. 设 X 是 U 中一 C^r 向量场，$r\geqslant 1$. 则对一切 $p\in U$，存在一 C^r 局部流 φ: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$，且有

$$D_1D_2\varphi(t, q)=DX(\varphi(t, q))\cdot D_2\varphi(t, q),$$

$D_2\varphi(0, q)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的恒等映射，其中 D_1, D_2 分别表示关于第一个和第二个变量的偏导数. □

我们还可以考虑依赖于参数的向量场以及它们的解对于参数的依赖性. 设 E 是一 Banach 空间，$F: E\times U\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 映射，$r\geqslant 1$. 对每一 $e\in E$，由 $F_e(p)=F(e, p)$ 定义的映射 F_e: $U\to\mathbb{R}^m$ 是 U 上的一个 C^r 向量场. 下面的定理指出，这个向量场 F_e 的解连续依赖于参数 $e\in E$.

0.9 定理. 对每一 $e\in E$ 及 $p\in U$，存在 e 在 E 中的邻域 W，p 在 U 中的邻域 V，以及 C^r 映射 φ: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W\to U$，使得对每一 $(t, q, \lambda)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W$，有

$$\varphi(0, q, \lambda)=q,$$

$$D_1\varphi(t, q, \lambda)=F(\lambda, \varphi(t, q, \lambda)).$$ □

下面我们介绍微分流形的概念. 为了叙述简单起见，我们将微分流形定义为 $\mathbb{R}^k$ 的子集. 在本节末我们再讨论它的抽象定义.

设 M 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^k$ 的一个子集. 我们将利用 M 上的诱导拓扑；亦即 $A\subset M$ 是开的，如果存在开集 $A'\subset\mathbb{R}^k$，使得 $A=A'\cap M$. 我们说 $M\subset\mathbb{R}^k$ 是 m 维微分流形，如果对每一点 $p\in M$，存在 p 的邻域 $U\subset M$，以及一同胚 x: $U\to U_0$，其中 U_0 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集，使得逆同胚 x^{-1}: $U_0\to U\subset\mathbb{R}^k$ 是一个 C^∞ 浸入. 亦即对每一点 $u\in U_0$，导数 $dx^{-1}(u)$: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ 是一个单射. 这时，我们说 (x, U) 是围绕 p 的一个局部卡，U 是 p 的一个坐标邻域. 如果上述同胚 x^{-1} 都是 C^r 类的，则说 M 是 C^r 微分流形. 我们所说的微分流形是指 C^∞ 微分流形. 由浸入的局部形式 0.4 得出：如果 (x, U) 是围绕 $p\in M$ 的一个局部卡，则在 $\mathbb{R}^k$ 中存在 p 的邻域 A，$x(p)$ 的邻域 V，$\mathbb{R}^{k-m}$ 中原点的邻域 W，以及 C^∞ 微分同胚 h: $A\to V\times W$，使得对一切 $q\in A\cap M$，有 $h(q)=(x(q), 0)$. 特别地，一个局部卡是 $\mathbb{R}^k$ 的一个开子集到 $\mathbb{R}^m$ 内的一个 C^∞ 映射的限制（因

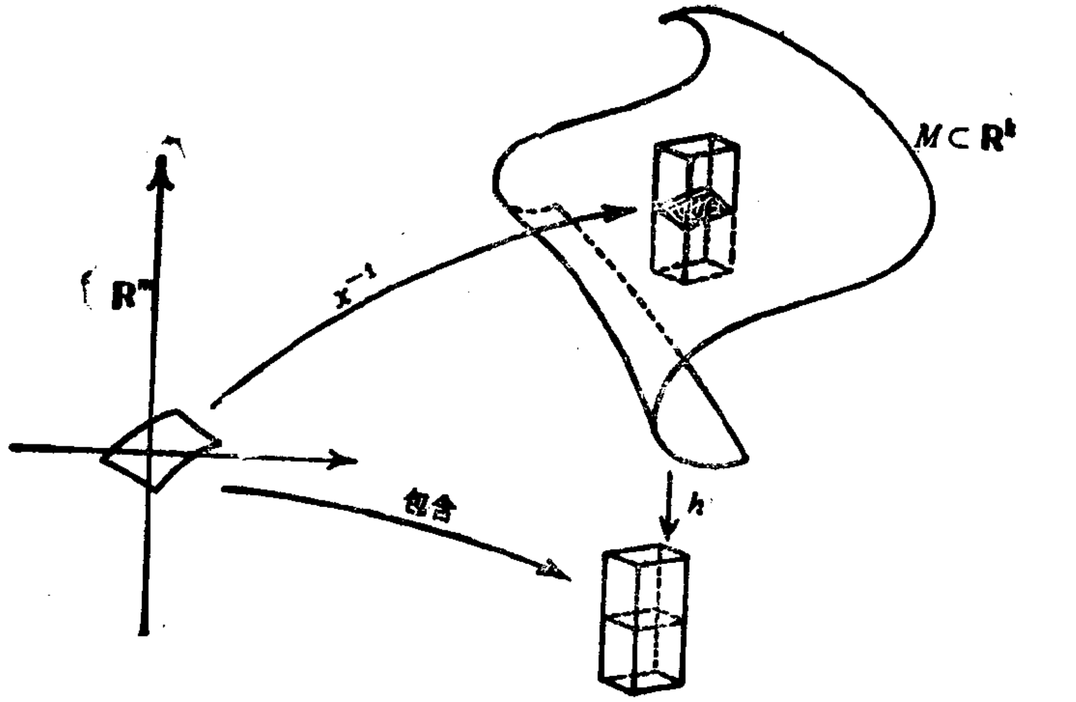

图 1

1). 由此说明,我们得到下面的命题.

0.10 命题. 设 $x: U\to\mathbb{R}^m$, $y: V\to\mathbb{R}^m$ 是 M 中的两个局部卡, 若 $U\cap V\neq\varnothing$, 则坐标变换

$$y\circ x^{-1}: x(U\cap V)\to y(U\cap V)$$

是一 C^∞ 微分同胚(图 2). □

现在我们来定义流形之间的可微映射. 设 M^m 与 N^n 是流形[1], $f: M^m\to N^n$ 是一映射. 我们说 f 是 C^r 类的, 若对每一点 $p\in M$, 存在围绕 p 的局部卡 $x: U\to\mathbb{R}^m$, 以及满足 $f(U)\subset V$ 的 $y: V\to\mathbb{R}^n$, 使得 $y\circ f\circ x^{-1}: x(U)\to y(V)$ 是 C^r 类的. 由于坐标变换是 C^∞ 的, 这一定义与卡的选择无关.

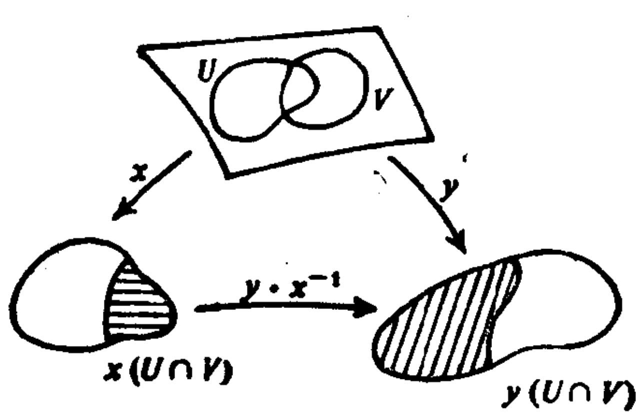

图 2

考虑满足 $\alpha(0)=p$ 的

1) 本书在一些地方不只用 M, N, S 等表示微分流形,也用 M^m, N^n, S^s 表示, 这里上指标 m, n, s 表示微分流形的维数,即 $\dim M^m=m$. 下同.——译者注

可微曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^k$. 容易看出，$\alpha$ 按上述定义是可微的，当且仅当 α 作为 $\mathbb{R}^k$ 中的曲线是可微的. 因此存在切向量 $(d\alpha/dt)(0) = \alpha'(0)$. 经过 p 点的所有这种曲线 α 的切向量集合称为 M 在 p 点的切空间，记作 TM_p. 考虑局部卡 $x: U \to \mathbb{R}^m$, $x(p) = 0$. 容易看出，导数 $dx^{-1}(0)$ 的象与 TM_p 重合. 因此，TM_p 是 m 维向量空间.

设 $f: M \to N$ 是一可微映射，$v \in TM_p$, $p \in M$. 考虑满足 $\alpha(0) = p$ 与 $\alpha'(0) = v$ 的可微曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. 则 $f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ 是可微曲线，故我们可定义

$$df(p)v = (d/dt)(f \circ \alpha)(0).$$

这个定义与曲线 α 无关.

映射 $df(p): TM_p \to TN_{f(p)}$ 是线性的，称之为 f 在 p 的导数.

由于微分流形局部地是 Euclid 空间的一开子集，故早先我们列举的微积分中的所有定理都可推广到流形上去.

0.11 命题（链规则）. 设 $f: M \to N$ 与 $g: N \to P$ 是微分流形之间的 C^r 类映射，则 $g \circ f: M \to P$ 是 C^r 类的，且

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p). \qquad \square$$

映射 $f: M \to N$ 称为 C^r 微分同胚，如果它是 C^r 类的，且有 C^r 类的逆 f^{-1}. 这时，对每一点 $p \in M$, $df(p): TM_p \to TN_{f(p)}$ 是一同构，其逆是 $df^{-1}(f(p))$. 特别地，M 与 N 具有相同的维数. 我们说 $f: M \to N$ 在 $p \in M$ 是一局部微分同胚，如果存在邻域 $U(p) \subset M$ 与 $V(f(p)) \subset N$, 使得 f 在 U 上的限制是映到 V 上的微分同胚.

0.12 命题（反函数）. 如果 $f: M \to N$ 是 C^r 类的，$r \geq 1$, 且对某点 $p \in M$, $df(p)$ 是一同构，则 f 是在 p 点的一个 C^r 局部微分同胚. $\square$

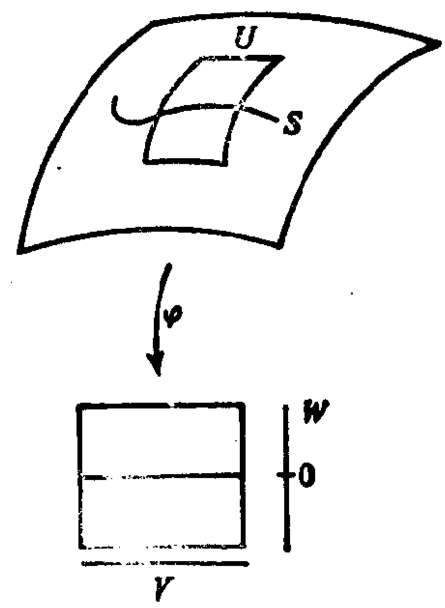

图 3

现在考虑流形 M 的一个子集 S. S 是 M 的一个 s 维 C^r 子流形，如果对每一点 $p\in S$，存在包含 p 的开集 $U\subset M$，包含 0 的开集 $V\subset\mathbb{R}^s$，以及包含 0 的开集 $W\subset\mathbb{R}^{m-s}$ 和 C^r 微分同胚 φ: $U\to V\times W$，使得 $\varphi(S\cap U)=V\times\{0\}$(图 3).

我们注意，$\mathbb{R}^k$ 是一微分流形．因此，若 $M\subset\mathbb{R}^k$ 是如上定义的一流形，则 M 是 $\mathbb{R}^k$ 的子流形．$M\subset\mathbb{R}^k$ 的子流形是包含在 M 中的 $\mathbb{R}^k$ 的子流形.

0.13 命题 (浸入的局部形式)．设 f: $M^m\to N^{m+n}$ 是一 C^r 映射，$r\geqslant 1$，$p\in M$ 是使 $df(p)$ 为单射的一点．则存在邻域 $U(p)$，$V(f(p))$，$\mathbb{R}^m$ 中的 $U_0(0)$，$\mathbb{R}^n$ 中的 $V_0(0)$，以及 C^r 微分同胚 φ: $U\to U_0$ 和 ψ: $V\to U_0\times V_0$，使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)=(x, V\to 0). \qquad \square$$

C^r 映射 f: $M\to N$ 是一浸入，如果对所有的 $p\in M$，$df(p)$ 是一单射，单射浸入 f: $M\to N$ 是一嵌入，如果 f: $M\to f(M)\subset N$ 是一同胚，其中 $f(M)$ 具有诱导拓扑．这时 $f(M)$ 是 N 的一个子流形．如果 f: $M\to N$ 仅仅是一个单射浸入，我们就说 $f(M)$ 是一个浸入子流形．图 4 中的例子所表示的两个子流形，都是浸入的，但不是嵌入的.

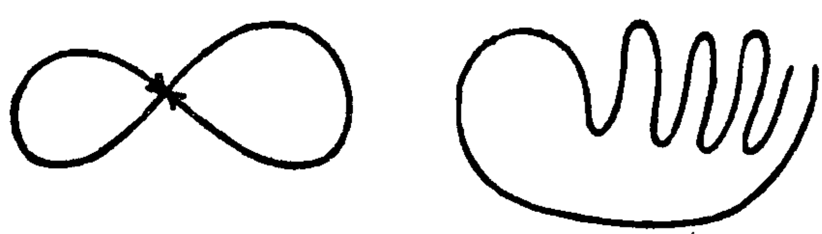

图 4

0.14 命题(浸没的局部形式)．设 f: $M^{m+n}\to N^n$ 是一 C^r 映射，$r\geqslant 1$，$p\in M$ 是使 $df(p)$ 为一满射的点，则存在邻域 $U(p)$，$V(f(p))$，$\mathbb{R}^m$ 中的 $U_0(0)$，$\mathbb{R}^n$ 中的 $V_0(0)$，以及微分同胚 φ: $U\to U_0\times V_0$ 和 ψ: $V\to V_0$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x, y)=y$. $\square$

点 $q\in N$ 称为 C^r 映射 f: $M^m\to N^n$ 的正则值，$r\geqslant 1$，如果对一切满足 $f(p)=q$ 的 $p\in M$，$df(p)$ 是一满射．由上面最后一个命题得知，$f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-n$ 维 C^r 子流形.