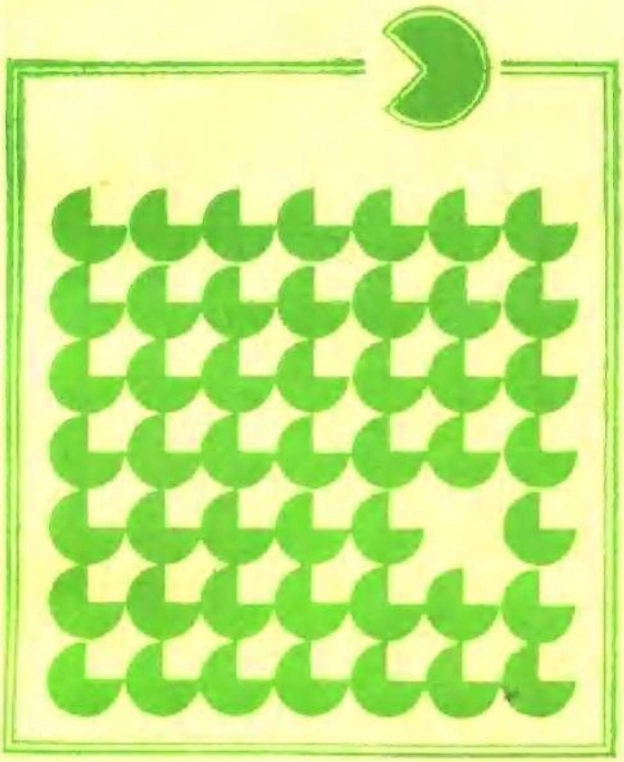
离散数学

提要与范例

阮传概　卢友清　编著



北京广播学院出版社

离散数学

提要与范例

阮传概　卢友清　编著

北京广播学院出版社

内 容 提 要

本书共七章，分别介绍了命题逻辑，谓词逻辑，集合、二元关系，函数，群、环、域，格、布尔代数，图论等方面的详细内容提要、解题范例以及习题与习题解答。本书比较精炼、条理清晰、例题较多，易于接受。

本书可供高等院校、电视大学、函授大学师生及有关专业科技人员参考，也可供在职科技人员的训练班作为教材或参考书，也可作为自学人员的教材。

离散数学提要与范例

阮传概 卢友清 编著

北京广播学院出版社出版发行

（朝阳区东郊定福庄1号）

北京东方印刷厂印刷

各地新华书店经销

开本 787×1092 1/32 印张：13.125 字数：300千字

1991年12月 第1版 1996年3月 第2次印刷

印数：3501－6500

ISBN 7-81004-223-8/O・1

定价：13.00元

前　　言

随着计算机、信息科学与通讯技术的不断发展，各高等院校、电视大学及函授大学有关专业都开设了《离散数学》这门课。特别是，在职科技人员的训练班不断发展，这些人员需要掌握《离散数学》的基本知识与解题方法。但是由于他们是边工作边学习，所以学习时间较少，为了便于他们自学，并在较短的时间内掌握《离散数学》的基本内容与解题方法，我们编写了这本书。

本书共七章，分别介绍了命题逻辑，谓词逻辑，集合、二元关系，函数，群、环、域、格、布尔代数，图论等方面的详细内容提要并举例说明，解题范例以及习题与习题解答。内容提要可提供读者复习及明确基本内容的要点；解题范例可帮助读者巩固学过的知识及运用这些知识解题，并了解解题方法；习题与习题解答可供读者自己做完习题后作为答案参考。为了使读者能比较顺利地阅读其它教科书，本书在内容顺序的安排上参考了左孝凌等编著的《离散数学》（上海科学技术文献出版社）与王遇科编的《离散数学》（北京工业学院出版社）。

本书是在为 1990 年中国电子学会与广播电视学会举办的高科技培训班编写的讲义基础上修改而成。由于作者水平有限，定有不妥之处，殷切希望读者指正。本书在编写过程中，得到北京广播学院数学教研室及教务处的帮助，还得到成常福同志、何鲁敏同志的大力帮助，在此表示衷心地感谢！

作者　1991.4　于北京

目　录

第一章　命题逻辑

数理逻辑是用数学的方法研究形式逻辑中推理规律的一种理论，这里所指的数学的方法，主要是指引进一套符号体系的方法。因此，数理逻辑又称符号逻辑。数理逻辑在计算机科学、人工智能等有广泛的应用。命题逻辑是数理逻辑的基本组成部分，是谓词逻辑的基础。

内 容 提 要

§1—1　命题与联结词

1—1.1　**命题概念**　命题是仅具有两种可能，即“真的”或“假的”，而且只能是其中之一的陈述句。一切没有判断内容的句子；无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作命题。命题的“真”和“假”称为命题的真值，分别用大写英文字母 T 和 F 表示，或用 1 和 0 表示。

例　(1)　3 是奇数。

(2)　他既在工作又在学习。

(3)　今天你去上课吗？

上面 (1)、(2) 是命题；(3)　不是命题。

1—1.2　**原子命题和复合命题**　仅由一个简单的陈述句构成的命题称为简单命题或原子命题；由联结词、标点符号，

把几个原子命题联结起来的命题称为复合命题。例如，在1—1．1的例题中，(1) 是原子命题；(2) 是复合命题。

下面说明几个联结词。

1—1．3 **否定命题** 设P表示一个命题，P的否定记为$\neg P$，读作“非P”，若P为T时，$\neg P$为F；若P为F时$\neg P$为T，即“非P”是T当且仅当P是F。真值表如下：

P	$\neg P$
F	T
T	F

或写为

P	$\neg P$
0	1
1	0

1—1．4 合取命题 设P、Q表示两个命题，P、Q的合取命题，记为$P\wedge Q$，读作“P与Q”。当P、Q同时为T时，$P\wedge Q$为T；在其他情况下，$P\wedge Q$都为F，即P和Q同是为T当且仅当$P\wedge Q$为T。真值表如下：

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或写为

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 P：他在工作。

Q：他在学习。

$P\wedge Q$：他既在工作又在学习。

1—1．5 **析取命题** 设P、Q表示两个命题，P、Q的

析取命题，记为$P \vee Q$，读作“P 或 Q”。P 和 Q 同时为 F 当且仅当$P \vee Q$为 F。真值表如下：

P	Q	$P \vee Q$		P	Q	$P \vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或写为	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

例 P：他在工作。

Q：他在学习。

$P \vee Q$：他在工作或在学习。

1—1. 6 **异或命题** 设 P、Q 表示两个命题，P、Q 的异或命题或称不可兼析取命题，记为$P \overline{\vee} Q$。P 和 Q 真值相异当且仅当$P \overline{\vee} Q$为 T。真值表如下：

P	Q	$P \overline{\vee} Q$		P	Q	$P \overline{\vee} Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或写为	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	F		1	1	0

例 P：小王这次“离散数学”的考试成绩为 80 分。

Q：小王这次“离散数学”的考试成绩为 90 分。

$P \overline{\vee} Q$：小王这次“离散数学”的考试成为 80 分或 90 分。

在这里要注意汉语中“或”的意义。设 P、Q 为两个命题，

“P 或 Q”中联结词“或”有“可兼或”和“不可兼或”之分。在“可兼或”中，命题 P、Q 可同时为 T，这时可用 $P \vee Q$ 来表示。反映在 $P \vee Q$ 的真值表中，P 为 T，Q 为 T 时，$P \vee Q$ 为 T。在“不可兼或”中，命题 P、Q 不会同时为 T，这时可用 $P \overline{\vee} Q$ 来表示。反映在 $P \overline{\vee} Q$ 的真值表中，P 为 T，Q 为 T 时，$P \overline{\vee} Q$ 为 F。

例　(1) P：小王看书。

Q：小李看电视。

因为小王看书，小李看电视可同时存在，于是可用 $P \vee Q$ 表示：小王看书或小李看电视，即只有 P 为 T，或只有 Q 为 T，或 P、Q 同时为 T 时，$P \vee Q$ 为 T。

(2) P：今天天气很好。

Q：今天下雨。

因为今天天气很好，今天下雨，不可能同时存在，于是可用 $P \overline{\vee} Q$ 表示：今天天气很好或下雨，即只有 P 为 T，或只有 Q 为 T 时，$P \overline{\vee} Q$ 为 T。

1—1.7　**条件命题**　设 P、Q 表示两个命题，$P \to Q$ 称为条件命题，读作“如果 P 则 Q”或“如果 P，那么 Q”。当 P 的真值为 T 和 Q 的真值为 F 时，命题 $P \to Q$ 的真值为 F；在其它情况下，$P \to Q$ 为 T。真值表如下：

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在条件命题 $P \rightarrow Q$ 中，命题 P 称为 $P \rightarrow Q$ 的前件或前提；命题 Q 称为 $P \rightarrow Q$ 的后件或结论。

例 P：明天我们不上课。

Q：明天做实验。

$P \rightarrow Q$：如果明天我们不上课，则做实验。

1—1.8 **双条件命题** 设 P、Q 表示两个命题，$P \leftrightarrows Q$ 称为双条件命题，读作"P 当且仅当 Q"，也可简写为"PiffQ"或 $P \leftrightarrow Q$。当 P 和 Q 的真值相同时，双条件命题 $P \leftrightarrows Q$ 的真值为 T；在其它情况下，$P \leftrightarrows Q$ 的真值为 F。真值表如下：

P	Q	$P \leftrightarrows Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

P	Q	$P \leftrightarrows Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 P：三角形 ABC 是等腰三角形。

Q：三角形 ABC 的两个底角相等。

$P \leftrightarrows Q$：三角形 ABC 是等腰三角形，当且仅当三角形 ABC 的两个底角相等。

1—1.9 **命题标识符** 表示命题的符号称为命题标识符。常用大写英文字母表示命题。

1—1.10 **命题常量** 一个命题标识符，表示某个确定的命题，就称为命题常量。

1—1.11 **命题变元** 一个命题标识符，表示任意的命题，就称为命题变元。

1—1．12　**合式公式**(wff)合式公式是当且仅当按下列规则生成的公式：

(1) 单个的命题变元是一个合式公式；

(2) 如果 A 是一个合式公式，则 $\neg A$ 也是一个合式公式；

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \rightleftarrows B)$ 都是合式公式；

(4) 经过有限次使用规则 (1)、(2) 和 (3)，所得到的由命题变元、联结词和圆括号所组成的字符串是合式公式。

为了减少使用圆括号的数量，约定最外层圆括号可以省略。一般我们还规定联结词的先后次序为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightleftarrows$。通常合式公式也称为命题公式或简称公式。

例　字符串 $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$，$(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightleftarrows (P \rightarrow \neg R)$ 是合式公式。$P \rightarrow Q \wedge \vee P$ 不是合式公式。

1—1．13 **真值表**　对于命题变元的每一种可能的真值指派和由它们决定出命题公式的真值所列的表，称为命题公式的真值表。

例　构造命题公式 $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$ 的真值表。

解　$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$ 的真值表如下：

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	T	F	F

包含两个命题变元P和Q的命题公式中，能够出现2^2个可能的真值指派，包含三个命题变元的命题公式中，能够出现2^3个可能的真值指派。一般地，包含n个命题变元的命题公式中，能够出现2^n个可能的真值指派。

例 构造命题公式$P\rightarrow(Q\wedge R)$的真值表。

解 $P\rightarrow(Q\wedge R)$的真值表如下：

P	Q	R	$Q\wedge R$	$P\rightarrow(Q\wedge R)$
F	F	F	F	T
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	F	T	F	F
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

1—1.14 **永真式** 给定一个命题公式，若无论给公式中各命题变元指派何种真值，公式所得出的真值永为真，则称给定命题公式为重言式或永真表。

1—1.15 **永假式** 给定一个命题公式，若无论给公式中各命题变元指派何种真值，公式所得出的真值永为假，则称给定命题公式为矛盾式或永假式。

例 判定命题公式$(P\rightarrow Q)\wedge(P\wedge\neg Q)$是否是永假式？

解 $(P\rightarrow Q)\wedge(P\wedge\neg Q)$的真值表如下：

P	Q	$\neg Q$	$P\rightarrow Q$	$P\wedge\neg Q$	$(P\rightarrow Q)\wedge(P\wedge\neg Q)$
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	T	F	T	F	F

从真值表可看出：$(P\rightarrow Q)\wedge(P\wedge\neg Q)$ 是永假式。

显然 $P\vee\neg P$ 是永真式；$P\wedge\neg P$ 是永假式。

§1-2 命题演算的等价式与蕴涵式

1—2.1 **命题公式等价** 如果 A、B 是两个命题公式，设 P_1，P_2，…，P_n 是出现在 A 和 B 中的所有命题变元。若对于 n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的 2^n 个可能的真值指派，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 等价或称逻辑相等，记作 $A\Leftrightarrow B$。

当命题 A 和 B 等价时，由等价的定义知，对于 P_1，P_2，…，P_n 的所有指派，A 和 B 的真值都相同，所以 $A\leftrightarrows B$ 为永真式；反之，如果 $A\leftrightarrows B$ 为永真式，则 A 和 B 等价。因此，要验证 A 和 B 是否等价，只要验证 $A\leftrightarrows B$ 是否为永真式。这可以用构造 $A\leftrightarrows B$ 的真值表来验证。

例 证明：$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$。

证 $\neg(P\vee Q)\leftrightarrows\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表如下：

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg(P\vee Q)\leftrightarrows\neg P\wedge\neg Q$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	F	T

从真值表中可看出，$\neg(P \vee Q) \rightleftarrows \neg P \wedge \neg Q$ 为永真式，于是 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$。

1—2. 2 **命题定律** 含有命题变元的否定、合取和析取的常用等价式，称为命题定律。

1—2. 3 常用的命题等价公式。

序号	公式	
E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双合律
E_2	$P \vee P \Leftrightarrow P$	等幂律
E_3	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
E_4	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
E_5	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
E_6	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
E_7	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	
E_8	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	分配律
E_9	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
E_{10}	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E_{11}	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	
E_{12}	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	德·摩根律
E_{13}	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	
E_{14}	$P \vee F \Leftrightarrow P$	同一律
E_{15}	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	
E_{16}	$P \vee T \Leftrightarrow T$	零律
E_{17}	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	
E_{18}	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	补余律
E_{19}	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	

E_{20}	$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{21}	$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
E_{22}	$\neg (P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{23}	$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$
E_{24}	$(P \wedge Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$
E_{25}	$P \leftrightarrows Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
E_{26}	$P \leftrightarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{27}	$\neg (P \leftrightarrows Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrows \neg Q$

1—2. 4 **对偶式** 在给定命题公式 A 中，只用联结词 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$。如果在 A 中把 $\vee$ 换成 $\wedge$，$\wedge$ 换成 $\vee$，T 换成 F，F 换成 T，所得到命题公式 A^* 称为 A 的对偶式。

例 命题公式 $(P \vee Q) \wedge (F \wedge \neg R)$ 的对偶式为 $(P \wedge Q) \vee (T \vee \neg R)$。

1—2. 5 设 A 和 A^* 是对偶式，P_1，P_2，…，P_n 是出现在 A 和 A^* 中的所有命题变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

例 设命题公式 $A(P, Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee Q$，验证：$A(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow A^*(P, Q)$。

证 $A(P, Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee Q$

$A(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee \neg Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q)$
$\vee \neg Q \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge T$
$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$