

动力稳定性

陆维松 编著

原理

国家自然科学基金资助项目

高等教育出版社

动力稳定性原理

64907/24 陆维松 编著

国家自然科学基金资助项目

高等教育出版社

(京)新登字046号

内 容 简 介

本书系统地阐述了动力稳定性理论的重要分支——线性和非线性理论。在线性部分着重探讨了各种基流的稳定性及各种环境因子对其影响,临界层、波-流相互作用等,并用弱非线性、低谱法、变分法等深入探讨了非线性理论。

本书可供流体力学、气象、海洋、水文、空气动力学等学科的科技工作者和高等院校高年级学生、研究生及教师参考。

动力稳定性原理

陆维松 编著
责任编辑 黄丽荣

科学出版社出版
(北京西郊白石桥路46号)

北京市燕山联营印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

开本: 787×1092 1/32 印张: 9.625 字数: 210千字

1992年2月第一版 1992年2月第一次印刷

印数: 1—1500 定价: 7.50元

ISBN 7-5029-0788-2/P·0409

前 言

六合为巨，未离其内；秋豪为小，待之成体；天下莫不沉浮，终身不故；阴阳四时运行，各得其序；惛然若亡而存；油然不形而神；万物畜而不知：此之谓本根，可以观于天矣¹⁾！

动力稳定性理论在近一个世纪以来一直被认为是流体力学的中心问题之一。同样，稳定性理论在大气科学中也占有十分重要的地位。大到大气环流的演变，小到积云对流的形成，以及日常所见天气系统的发生发展消亡，都与稳定性理论密切相关。当前大气科学中许多重要的国际前沿课题，如气候变化和预测，低频振荡，阻塞形势，定常行星波理论等等，也都可从稳定性理论方面进行研究。我们尽量包含当前国际上在这方面的新成果，并且侧重理论的解析解。虽然，数值试验和资料分析结果也很重要，但由于篇幅限制，这些结果论述较少。

本书共分为八章，第一章—第四章主要论述线性稳定性问题，第五章—第八章主要论述非线性稳定性问题。在前四章中，首先介绍经典大气动力稳定性理论，然后，论述各种基流(非纬向流和Rossby波基流)的稳定性，和各种环境因子对稳定性的影响，并对线性临界层及其超反射理论、波包演变和波-流相互作用等作了介绍。在后四章中，用3种方法

1) 庄子《外篇·知北游》。

(弱非线性方法、低阶谱方法、变分方法)介绍了非线性稳定性的一些重要成果，最后，还介绍了波动准共振，非线性临界层的新进展。

本书旨在为推动动力稳定性理论和应用方面的研究尽绵薄之力。本书曾就其部分章节给大气科学的硕士研究生作了几次讲授，本书包含了作者数年的部分研究成果。但由于作者学识所限，加之时间仓促，有许多不足之处，敬请读者指正。

本书引用了许多学者的论文和著作，作者受到不少裨益，谨此向他们表示衷心的感谢！

陆维松

目 录

前言

第一章 经典的大气动力稳定性理论(1)

§1 稳定性的概念(1)

§2 正压不稳定(3)

§3 斜压不稳定(14)

§4 惯性不稳定(36)

§5 Kelvin-Helmholtz不稳定.....(39)

§6 重力内波不稳定(41)

§7 CISK机制.....(45)

参考文献(48)

第二章 Rossby波和非平行基流的稳定性(50)

§1 一维Rossby波的正压不 稳定.....(50)

§2 Rossby-Haurwitz波的正压不稳定(53)

§3 二维Rossby波的正压不稳定(58)

§4 Rossby波的斜压不稳定(I)(63)

§5 Rossby波的斜压不稳定(II)(69)

§6 非纬向基流的斜压不稳定(74)

§7 弱非平行纬向流 的正压不稳定.....(77)

§8 一般非平行基流的不 稳定.....(84)

参考文献(88)

第三章 环境因子对稳定性的影响(89)

§1 大地形和正压不稳定(89)

§2 Ekman摩擦和斜压不稳定.....(90)

§3	凝结加热对斜压不稳定的影响	(97)
§4	绝对不稳定和局地不稳定——基流纬向非均匀性对斜压不稳定的影响	(103)
§5	水平切变对斜压不稳定的抑制	(111)
§6	非地转对斜压不稳定的影响	(116)
§7	浅水波方程切变流的普遍稳定性判据	(123)
§8	Rossby-Kelvin不稳定	(130)
§9	感热对斜压不稳定的影响	(136)
	参考文献	(138)

第四章 线性临界层的超反射理论和

	波包演变理论	(141)
§1	临界层的流线特征	(141)
§2	波动超反射和正压切变不稳定	(142)
§3	辐射不稳定和共振超反射	(147)
§4	正压大气中Rossby波包的演变	(151)
§5	斜压大气中Rossby波包的演变	(159)
§6	波-流相互作用 Charney-Drazin非加速原理和E-P通量	(164)
	参考文献	(173)

第五章 非线性不稳定 弱非线性方法

§1	非线性斜压不稳定	(175)
§2	非线性正压不稳定	(186)
§3	地形强迫波的非线性正压不稳定	(190)
§4	Rossby波的非线性正压不稳定	(196)
§5	强迫定常波的非线性不稳定	(208)
	参考文献	(212)

第六章 非线性不稳定 低阶谱方法

§1	大气的多平衡态和阻塞	(214)
§2	确定性的非周期流 Lorenz系统	(224)

§3 两层斜压模式的形式曳力不稳定、多平衡态和传播的行星波	(231)
§4 有限振幅斜压波的混沌状态	(241)
§5 多平衡态理论的重新确定	(244)
参考文献	(249)
第七章 非线性不稳定——变分方法	(251)
§1 准地转非平行流的非线性稳定性	(251)
§2 非定常基流的非线性稳定性	(256)
§3 有限振幅守恒律与另一稳定性定理	(265)
§4 不稳定平行切变流的非线性饱和	(271)
§5 摩擦耗散大气运动的非线性稳定性	(275)
参考文献	(282)
第八章 波动准共振与非线性临界层	(284)
§1 波动共振和准共振	(284)
§2 非线性Rossby波临界层的SWW解	(289)
§3 Rossby波临界层吸收、反射或超反射	(294)
参考文献	(297)

第一章 经典的大气动力稳定性理论

§ 1 稳定性的概念

在实际大气中，各种波动常常在某些条件下得到产生和发展，而在另一些条件下受到抑制和阻尼。例如中纬度气旋的形成和发展，对流层中上部长波的发展，月或季平均图上的大尺度异常环流持续性发展和维持，气候对冰盖、海面温度、 CO_2 等物理因子的敏感性等等，这些现象都与扰动或波动的动力不稳定有关。因此，研究动力稳定性问题有着十分重要的意义。

1. 动力稳定性的定义

由于我们难以确定精确的地球大气无波动的基本动力状态，所以往往预先给定一个初始状态作为基态，来考虑此基态的稳定性。

一般将此基态设为一定常的基本气流，由于某种原因受到了微小的扰动，那么这个小扰动有3种可能的变化：随时间增长；随时间基本保持不变；随时间阻尼衰减。对第一种情况，称扰动是不稳定的，而对第二、三种情况，称扰动是稳定的。有时也称叠加稳定扰动的基本气流是稳定的，称叠加不稳定扰动的基本气流是不稳定的。

还可以类似定义所谓平均稳定性。当叠加在定常基流上的任意大小扰动的总能量对每个 $t \geq 0$ 时刻保持有界，则此基流或扰动是平均稳定的；而当 $t \rightarrow \infty$ 时，扰动总能量趋于零

且上述条件仍成立，则此基流或扰动是平均渐近稳定的。这里的扰动总能量还可以推广其它扰动正定量，如位涡拟能等等。显然，前面的小扰动稳定性比后面的平均稳定性强。

对于非定常基本气流，上述两种稳定性定义有可能失效，需要加以某些修正。对于随时间作周期变化的基流，如果存在着一个扰动在每一个调制周期内有净增长，则此周期基流是不稳定的；如果每个扰动在每一时刻都衰减，则基流是稳定的，且是自动稳定的；如果一个扰动在调制周期某部分可能增加到适当振幅，但扰动最终衰减，则此基流是瞬变稳定的。对于非周期非定常基流，当扰动总能量与基流总能量之比值随时间的变率对充分大的时间都小于或等于零，则此非周期非定常基流是稳定的。

2. 动力稳定性问题的求解

地球大气中的扰动或波动，特别在其初始阶段，相对于基本气流而言是比较小的。所以，稳定性问题可以近似地按小扰动方法，用线性化的微扰方程来讨论。

我们一般用所谓标准波型法，即设微扰方程的单波特解为

$$f(x, y, z, t) = F(x, y) e^{ik(x-ct)} \quad (1.1)$$

式中 f 为任一扰动量， k 、 c 分别为波数和波速。但 c 可以是实数也可以是复数，取决于方程和边界条件。令

$$c = c_r + ic_i \quad (1.2)$$

则代入(1.1)有

$$f(x, y, z, t) = F(x, y) e^{ci t} e^{i(kx - c_r t)} \quad (1.3)$$

若 $c_i > 0$ ，则扰动振幅 $F(x, y) e^{ci t}$ 随时间呈指数增长；若 $c_i < 0$ ，则扰动振幅随时间呈指数衰减。由于复数总是成对出现，则方程通解为上述增长部分和衰减部分各特解之迭

加，迭加结果扰动仍随时间增长。故 $c_i \neq 0$ 的波为不稳定波， $c_i = 0$ 的波为稳定波。 $|kc_i|$ 称为不稳定波的增长率。

将单波解(1.1)代入微扰方程和边条件，则得振幅 F 的常微分方程和齐次边条件，这样，标准模方法将稳定性问题化为本征值 c 的边值问题，从而求得包含 c 、 k 等参数的波速方程。由波速方程可以确定波速 c 为复数的条件，这种条件称为不稳定性的充分条件，而由 $c_i \neq 0$ 导得的条件称为不稳定的必要条件。

由于用标准模方法所求得的本征值 c 是分立的，即所谓离散谱，但 c 在实数域内还有连续谱。因此，还必须研究连续谱，才能完全解决稳定性问题。对于连续谱，仍有必要采用通用的方法，即研究普遍的初值问题（柯西问题）。

标准模方法主要用于线性稳定性问题，对于非线性稳定性问题此方法失效。在非线性稳定性问题的研究中，主要有三类解析方法，第一类是低谱方法；第二类是弱非线性方法；第三类是变分方法或广义能量方法。这三类方法将在第五、六、七章分别介绍。

动力稳定性问题主要讨论下面3个问题：一是确定无波动的基本动力状态，或满足方程的平衡态；二是基态或初态对小扰动的稳定性特征及其随后的演变；三是基态的不稳定波和稳定波以及稳定和不稳定基态的合理的地球物理意义。

§ 2 正压不稳定

准地转的正压涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

式中 ψ 为流函数。将上式线性化，得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi' + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

按标准波型法, 取扰动流函数 ψ' 为

$$\psi'(x, y, t) = \Phi(y) e^{ik(x-ct)} \quad (1.6)$$

将(1.6)式代入(1.5)式, 得

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - k^2 \Phi \right) + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \Phi = 0 \quad (1.7)$$

将流体限制在 $y = y_1$ 和 $y = y_2$ 这两个刚壁之间, 则由 $\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$ ($y = y_1$ 和 y_2), 得

$$\Phi(y) = 0, \quad y = y_1 \text{ 和 } y = y_2 \quad (1.8)$$

1. Rayleigh-郭晓岚拐点定理

因对于不稳定波总有 $\bar{u} - c \neq 0$, 故(1.7)可得

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}}{\bar{u} - c} \right) \Phi = 0 \quad (1.9)$$

作运算 $\int_{y_1}^{y_2} \Phi^* \cdot (1.9) dy$, 并对右端第一项作分部积分, 并利用边条件(1.8), Φ^* 是 Φ 的复共轭, 得

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}}{\bar{u} - c} |\Phi|^2 dy = 0 \quad (1.10)$$

上式的虚部为

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}}{|\bar{u} - c|^2} |\Phi|^2 dy = 0 \quad (1.11)$$

对不稳定波而言, $c_i \neq 0$, 则

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}}{|\bar{u} - c|^2} |\Phi|^2 dy = 0 \quad (1.12)$$

则由第一积分中值定理, (1.12)式成立, 必须在 $y_1 < y < y_2$ 区间内至少有一点 y_c 存在, 使得

$$\left(\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy} \right)_{y=y_c} = \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_{y=y_c} = 0 \quad (1.13)$$

式中基流绝对涡度 $\bar{\zeta}_a = -\frac{d\bar{u}}{dy} + f$ 。这就是Rayleigh-郭晓岚

定理, 即正压不稳定的必要条件。这表明正压不稳定要求基本气流的绝对涡度梯度 $\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}$ 在 $y_1 < y < y_2$ 区间内要改变符号, 也表明基流的绝对涡度 $\bar{\zeta}_a$ 在此区间内必须具有极值点。

2. Fjörtoft 定理

取(1.10)式的实部, 得

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r)}{|\bar{u} - c|^2} \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) |\Phi|^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right) dy \end{aligned} \quad (1.14)$$

利用(1.12)式, (1.14)式化为

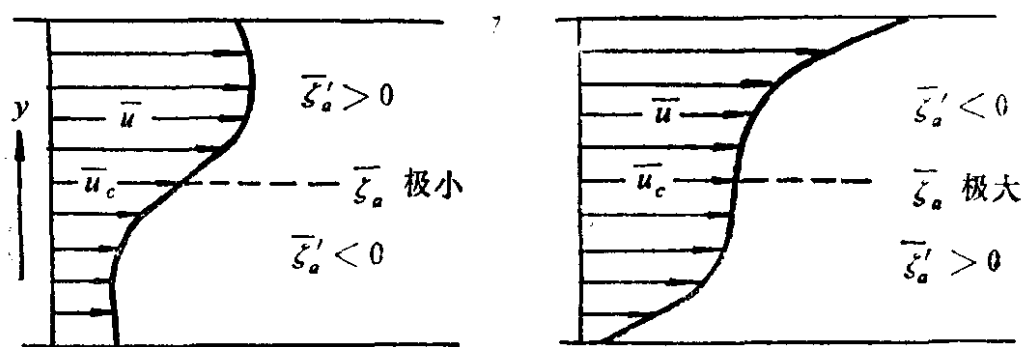
$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - \bar{u}_c) \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right) dy > 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

则由(1.15)式得另一个不稳定的必要条件, 即

$$(\bar{u} - \bar{u}_c) \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \geq 0 \quad (1.16)$$

必须在 $y_1 < y < y_2$ 内成立, 其中 $\bar{u}_c = \bar{u}(y_c)$, y_c 是 $\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}$

$= 0$ 的一个点。其等式仅当 $y = y_c$ 时成立。这就是所谓Fjörtoft定理, 表明 $(\bar{u} - \bar{u}_c)$ 与 $\frac{d\bar{\xi}_a}{dy}$ 成正相关。因此, 正压不稳定是否发生, 须要同时考虑(1.13)和(1.16)这两个不稳定的必要条件。图1.1是正压不稳定和正压稳定西风分布的两个例子。



(a) 正压不稳定

(b) 正压稳定

图 1.1 基本气流廓线

3. Howard 半圆定理

利用变换

$$F = \frac{\Phi}{\bar{u} - c} \quad (1.17)$$

则(1.9)式化为

$$\frac{d}{dy} \left[(\bar{u} - c)^2 \frac{dF}{dy} \right] - k^2 (\bar{u} - c)^2 F + \beta (\bar{u} - c) F = 0 \quad (1.18)$$

作运算, $\int_{y_1}^{y_2} F^* \cdot (1.18) dy$, F^* 是 F 的复共轭, 利用边界条件(1.8)式, 并将所得结果分离实、虚部, 有

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{u}^2 Q dy = \int_{y_1}^{y_2} (c_r^2 + c_i^2) Q dy + \int_{y_1}^{y_2} \beta \bar{u} |F|^2 dy \quad (1.19)$$

和

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{u} Q dy = \int_{y_1}^{y_2} (c_r Q + \frac{1}{2} \beta |F|^2) dy \quad (1.20)$$

式中 $Q = k^2 |F|^2 + \left| \frac{dF}{dy} \right|^2$ 。显然以下不等式成立，即

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{y_1}^{y_2} Q (\bar{u} - \bar{u}_{\max}) (\bar{u} - \bar{u}_{\min}) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} [c_r^2 + c_i^2 - 2c_r \bar{U} + \bar{u}_{\max} \bar{u}_{\min}] Q dy \\ &\quad + \int_{y_1}^{y_2} \beta (\bar{u} - \bar{U}) |F|^2 dy \end{aligned} \quad (1.21)$$

(1.21)式最后的积分中用 $\bar{u}_{\min}$ 代替 $\bar{u}$ ，则得

$$\begin{aligned} [(c_r - \bar{U})^2 + c_i^2] \int_{y_1}^{y_2} Q dy &\leq (\Delta U)^2 \int_{y_1}^{y_2} Q dy \\ &\quad + \beta \Delta U \int_{y_1}^{y_2} |F|^2 dy \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中 $\bar{U} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{\max} + \bar{u}_{\min})$, $\Delta U = \frac{1}{2} (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})$ 。

(1.22)式可化为

$$(c_r - \bar{U})^2 + c_i^2 \leq R^2 = (\Delta U)^2 + \frac{\beta \Delta U}{k^2 + \pi^2 / (y_2 - y_1)^2} \quad (1.23)$$

这就是Howard半圆定理。式中利用了Poincare'不等式

$$\int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{dF}{dy} \right|^2 dy / \int_{y_1}^{y_2} |F|^2 dy \geq \frac{\pi^2}{(y_2 - y_1)^2}。由(1.20)式$$

可得

$$\bar{u}_{\min} - \frac{\beta}{2[k^2 + 2/(y_2 - y_1)^2]} < c_r < \bar{u}_{\max} \quad (1.24)$$

在复数 c 的平面内, c_r 和 c_i 均落在图1.2所示的半圆内, $c_r > \bar{u}_{\max}$ 的小半圆阴影部分是 c 不能取值的区域。增长率的另一正界可用变换

$$G = (\bar{u} - c)^{1/2} F \quad (1.25)$$

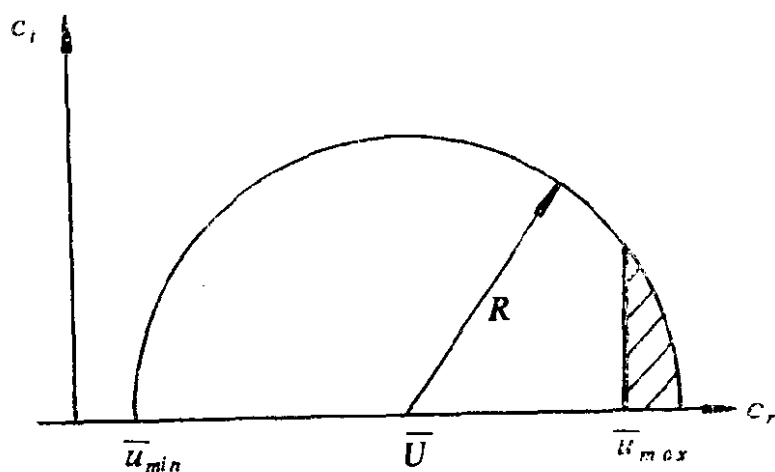


图 1.2 半圆定理示意图

将(1.25)式代入(1.18)式, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[(\bar{u} - c) \frac{dG}{dy} \right] - \left[\frac{1}{2} \bar{u}'' + k^2 (\bar{u} - c) - \beta \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{(\bar{u}')^2}{\bar{u} - c} \right] G = 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

与上类似, $\int_{y_1}^{y_2} G^* \cdot (1.26) dy$, 然后取其虚部, $c_i > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} [|G'|^2 + k^2 |G|^2] dy &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u}')^2}{|\bar{u} - c|^2} |G|^2 dy \\ &\leq \frac{|\bar{u}'|^2}{c^2} \int_{y_1}^{y_2} |G|^2 dy \end{aligned}$$

或

$$(kc_i)^2 \leq \frac{k^2}{k^2 + \pi^2 / (y_2 - y_1)^2} \left(\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2 \right)_{\max} \quad (1.27)$$

式中撇号均表示对 y 的导数, 且利用 $|\bar{u} - c|^2 \geq c_i^2$ 。

4. 中性模存在的变分原理

对于对称速度剖面, 可取

$$K(y) = \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - \bar{u}_c} > 0 \quad (1.28)$$

已设 $c = \bar{u}_c$, 且有 $\bar{\zeta}'_c(y_c) = 0$, 而 $(\bar{u} - c)$ 在 y_c 只有一个一阶零点。则 $K(y)$ 是正则的, 再设 $\lambda = -k^2$, 则(1.9)式可化为

$$\Phi'' + K(y)\Phi + \lambda\Phi = 0 \quad (1.29)$$

(1.29)式与边条件(1.8)构成标准的 Sturm-Liouville 型本征值问题。则得著名的 Rayleigh 商

$$\lambda = \int_{y_1}^{y_2} [(\phi')^2 - K\phi^2] dy / \int_{y_1}^{y_2} \phi^2 dy = J/I \quad (1.30)$$

(1.29)式的最小本征值为

$$\lambda_s = \min \left\{ \int_{y_1}^{y_2} [(f')^2 - Kf^2] dy / \int_{y_1}^{y_2} f^2 dy \right\} \quad (1.31)$$

式中最小值是针对满足边条件且平方可积的导数的函数 f 而言的。则当 $K(y_0) > \pi^2/(y_2 - y_1)^2$ 时, $K(y_0)$ 为积分中值, 则 $\lambda_s < 0$ 从而 $k_s > 0$ 。实际上, 还可用试验函数 $\bar{u}$ 代替 ϕ , $\bar{u}$ 也满足齐次边条件, 将 $\bar{u}$ 代入(1.30)式得

$$\begin{aligned} I(\bar{u})\lambda(\bar{u}) &= \int_{y_1}^{y_2} [(\bar{u}')^2 - K\bar{u}^2] dy \\ &= - \int_{y_1}^{y_2} (K\bar{u}_c + \beta)\bar{u} dy < 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

上式已设 $\bar{u} > 0$ 。则 $\lambda_s < \lambda(\bar{u}) < 0$, 仍有 $k_s > 0$ 。因此, 存在中性模。