

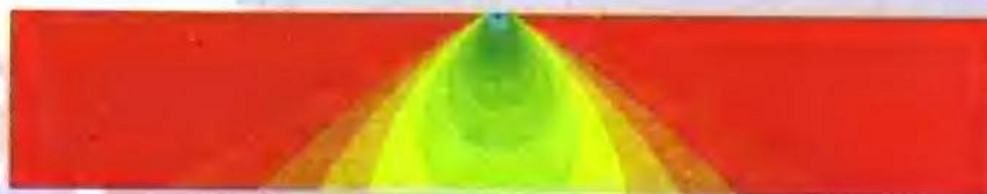
子波是近几年国际科技和众多学术团体高度关注的前沿领域，是继傅里叶分析



全国高技术重点图书

子波变换 与子波分析

• 赵松年 熊小芸 著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

URL: <http://www.phei.co.cn>

子波变换与子波分析

赵松年 熊小芸 著



电子工业出版社

内 容 简 介

子波(Wavelet,小波)是近几年国际科技界和众多学术团体高度关注的前沿领域,是继傅里叶分析方法之后重大的突破。

本书详细论述了子波变换与子波分析的主要内容,着重介绍了本学科中创新概念和科学思想的发轫。全书图文并茂,分析深入浅出,物理解释详尽透彻,语言流畅,论证详尽,使读者能尽快掌握子波的理论、方法和应用技巧。全书按照基础理论、算法实现和应用方法三方面组织内容,包括:时间—频率分析;连续子波变换;子波和时间尺度分析;一维子波实例;离散子波变换;二维子波;周期子波;子波变换的应用共八章。为了阅读方便,对函数空间、信号分析和图像处理等有关内容也作了充分介绍。

本书是学习和掌握子波基础理论、方法与应用的入门著作,既可供信号分析、图像处理、通信与电子系统、自动控制、无线电遥感、计算机信息处理、地球物理、生物医学工程、物理学、应用数学、力学以及大气科学等众多学科专业的大学生、研究生和大专院校教师作为教材和教学参考书;又可作为从事基础研究、技术发展和工程设计的广大科技人员阅读与自学之用。

书 名:子波变换与子波分析

著 者:赵松年 熊小芸 著

责任编辑:王明君

排版制作:电子工业出版社排版室

印 刷 厂:北京牛山世兴印刷厂

装 订 者:三河市路通装订厂

出版发行:电子工业出版社出版、发行

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036 发行部电话 68214070

经 销:各地新华书店经销

开 本:787×1092 1/16 印张:10 字数:256 千字

版 次:1996 年 12 月第 1 版 1997 年 3 月第 1 次印刷

印 数:1--1000 册

书 号:ISBN 7-5053-3864-1
TN·1018

定 价:18.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换

版权所有·翻印必究

《全国高技术重点图书》 出版指导委员会名单

主任:朱丽兰

副主任:刘 杲 卢鸣谷

委员:(以姓氏笔划为序)

王大中	清华大学核能技术设计研究院院长
王为珍	山东科技出版社社长
牛田佳	人民邮电出版社社长
王守武	中国科学院半导体所研究员 学部委员
刘 仁	国防工业出版社总编 副编审
刘 杲	全国政协委员 国家版权局顾问
卢鸣谷	中国版协科技出版工作委员会主任委员
叶培大	北京邮电学院名誉院长 教授
朱丽兰	国家科委常务副主任
孙宝寅	清华大学出版社副社长 副教授
师昌绪	中国科学院技术科学部主任
任新民	航空航天工业部总工程师 中国宇航学会理事长 学部委员
杨牧之	新闻出版署副署长
杨嘉墀	航空航天工业部五院院长 研究员 学部委员
陈芳允	国防科工委科技委顾问 学部委员
陈能宽	中国工程物理研究院科技委高级科学顾问 国防科工委科技委兼职副主任 学部委员
罗见龙	中国版协科技出版工作委员会副主任委员 编审
周炳琨	清华大学电子系教授 学部委员
欧阳莲	广东科技出版社社长 总编辑
张钰珍	国家科委高技术司副司长
张效祥	中国计算机学会理事长 研究员 学部委员
赵忠贤	中国科学院物理研究所研究员 学部委员
顾孝诚	北京大学生物系主任
谈德颜	科学出版社总编 编审
龚 刚	上海科技出版社社长
梁祥丰	电子工业出版社社长 编审
总干事:罗见龙	梁祥丰

前 言

本书是为想学习和掌握子波基本理论与方法的所有读者而写的一本入门著作。无论是大学生、研究生,大专院校教师,还是广大科技人员,教授,科学家,面对在傅里叶分析方法之后重大突破性进展的子波变换,都有学习和掌握它的必要。作为一种新的强有力的分析工具和数学方法,子波变换已在众多的学科领域里取得了重大进展。由于它具有伸缩、平移和放大功能,可以对信号进行多尺度分析,实现既在时域又在频域的高分辨局部定位,因而将子波变换誉为数学显微镜。掌握这样一种高性能的分析方法,无疑将使自己的研究工作提高到一个新水平。

总览当前中、外文子波文献与专著,大多出自数学家之手,写作风格,内容选取,难易程度很难适应广大科技人员的阅读学习,加之外文图书资料短缺,不易借阅查找,使国内欲想学习子波理论与应用的广大读者遇到许多困难。我们既然有机会更早一些接触并学习这一理论与方法,就总想能为对子波感兴趣的人们作一些切实可行的事。

带着这个愿望,开始了写作本书的准备工作,经过三年的努力,终于完成了书稿,最终奉献给读者的这本书凝结着我们的辛劳。欣慰的是,我们真正努力了并力求对子波的每一个重要概念给出物理的、几何的、信号分析的、直观清晰的解释,重要的数学描述配以详尽的推导论证,使读者无论原来的专业背景如何,都能容易理解书中的基本内容,通过应用实例的详尽介绍加深读者对基本方法的掌握。我们相信,只要读者耐心、认真、仔细阅读这本书,一定会对子波变换,尤其是多分辨分析有深刻而透彻的了解。遗憾的是,由于我们毕竟不是正宗的数学工作者,对于数学的内涵和内在美领悟不深,也很难顾及数学表述的严谨性,但是,当我们找到一种途径能把数学的严谨与内在美和解决实际问题的方法联系起来的时候,也就确信从事数学应用研究的人员读一读这本书是值得的。

从1807年J. Fourier提出用正、余弦级数展开函数到现在近二百年来,科学家在不断探索真理的过程中造就自己,同时也就发展了新方法,创立了新概念,子波变换就是几代科学家共同努力的结果。幸运的是,子波研究是一个刚刚兴起的新领域,为科学中的辛勤耕耘者,展示了一片美好的新天地。

我们真诚地希望来自各方面的批评与指正,请寄到北京德外中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室,邮政编码:100029。

作者谨识

一九九六年八月十二日 北京

致 谢

本书得以出版,有赖于王明君先生和刘娜女士对本书值得出版的学术价值与应用价值的认可,从而给予难能可贵的帮助。

其次要感谢中国科学院力学研究所《力学进展》编辑部程屏芬研究员与众多编委所给予的鼓励。

最后,在本书写作时曾参阅了许多中、外文专著与论文,除在参考文献中列出外,对于这些论著的作者一并表示衷心的感谢。

国家自然科学基金委员会地学部资助本书作者开展有关子波课题的研究,中国科学院数学研究所现任所长龙瑞麟教授积极支持我们举办子波问题的短训班,并亲自推荐他的学生沈立新博士来讲课,使我们受益匪浅,作者谨此表示衷心感谢。

作者所在的《大气边界层物理和大气化学国家重点实验室》对于本书的写作也给予了支持,胡非博士对子波研究的热情和他提供的宝贵资料加速了本书的写作过程,当书稿完成之时,我们谨向胡非博士表示诚挚的感谢。

目 录

第一章 时间—频率分析	1
1.1 引言	1
1.2 时间—频率分析	2
1.3 窗口 Fourier 变换(Gabor 变换)	3
1.3.1 定义	3
1.3.2 时间—频率局域化	9
第二章 连续子波变换	14
2.1 定义	15
2.2 时间—频率局域化和 Heisenberg 测不准原理	18
第三章 子波与时间尺度分析	22
3.1 时间尺度变换	22
3.2 尺度谱图、子波方差与协方差	22
3.3 非平稳性和 Wigner-Ville 谱	24
第四章 一维子波实例	27
4.1 Haar 子波	27
4.2 Mexico 草帽子波	28
4.3 Morlet 子波	29
4.4 连续子波变换的基本性质	32
4.4.1 线性与共变性	33
4.4.2 相似性与消失矩	34
4.4.3 冗余度和再生核	34
第五章 离散子波变换	36
5.1 Hilbert 空间	36
5.2 正交子波变换和多分辨分析	39
5.2.1 正交子波变换	39
5.2.2 多分辨分析及其表示	42
5.2.3 尺度函数	45
5.2.4 Shannon 子波	51
5.2.5 紧支集	53
5.3 非正交子波变换	53
5.3.1 框架	54
5.3.2 子波框架	57
5.3.3 Daubechies 子波	57
5.4 双正交子波	64

5.5	基数样条子波分析	67
5.6	正交子波包	71
第六章	二维子波	81
6.1	二维连续子波	81
6.1.1	二维 Morlet 子波	81
6.1.2	全向(Halo)子波	83
6.2	二维离散正交子波	83
第七章	周期子波	87
7.1	周期子波的例子	87
7.2	区间上的子波	91
7.3	局部正、余弦分析	92
第八章	子波变换的应用	97
8.1	数据序列分解与重构的 Mallat 算法	97
8.2	子波数值分析	101
8.2.1	Haar 基的算法	101
8.2.2	二维子波基	104
8.2.3	积分算子的 Daubechies 子波展开	110
8.3	图像数据压缩与边缘检测的子波变换	112
8.3.1	局部极大模方法的基本原理	113
8.3.2	一维信号的重建	116
8.3.3	二维信号(图像)的重建	121
8.3.4	图像重建算法	122
8.3.5	信号的预处理、平移与采样、交替投影算子和 Lipschitz 指数 α	125
8.3.6	图像数据压缩的 K-L 变换及其子波快速算法	131
8.4	信号检测中的非线性子波方法	134
8.4.1	基本原理	134
8.4.2	数值差分	138
8.4.3	离散卷积	139
8.5	结束语	140
附录 A	数学符号表	142
附录 B	子波文献注释	146
参考文献		148

第一章 时间—频率分析

1.1 引言

子波分析是当前应用数学中一个迅速发展的新领域,经过近十年的探索研究,重要的数学形式化体系已经建立,理论基础更加坚实,与 Fourier 变换、窗口 Fourier 变换(Gabor 变换)相比,子波变换是空间(时间)和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析(Multiscale Analysis),解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题,从而子波变换被誉为“数学显微镜”,它是调和分析发展史上里程碑式的进展,成为国际上众多学术团体和学科领域共同关注的热点,可以预计在今后的若干年内,子波变换的理论和应用都会获得更深入的发展。

子波变换在信号分析、语音合成、图像识别、计算机视觉、数据压缩、CT 成像;地震勘探、大气与海洋波的分析,分形力学,流体湍流以及天体力学方面都已取得了具有科学意义和应用价值的重要成果。除了微分方程的求解问题之外,原则上能用 Fourier 分析的地方均可用子波分析,甚至能获得更好的结果。

子波变换这一创新的概念是由法国从事石油信号处理的工程师 J. Morlet 在 1984 年首先提出的,通过物理的直观和信号处理的实际需要经验地建立了反演公式,当时未能得到数学家的认可,正如 1807 年法国的热学工程师 J. B. J. Fourier 提出任一函数都能展开成三角函数的无穷级数的创新概念未能得到著名数学家 J. L. Lagrange; P. S. Laplace 以及 A. M. Legendre 的认可那样;Fourier 认为“对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉”并深信数学是解决实际问题的最卓越的工具,幸运的是,早在七十年代, A. Calderon 表示定理的发现、Hardy 空间的原子分解和无条件基的深入研究为子波变换的诞生作了理论上的准备,而且 J. O. Strömberg 还构造了历史上第一个非常类似于现在的子波基,1986 年著名数学家 Y. Meyer 偶然地构造出一个真正的子波基,并与 S. Mallat 合作建立了构造子波基的统一方法——多尺度分析之后,子波分析才开始蓬勃发展起来,其中比利时女数学家 I. Daubechies 撰写的《子波十讲(Ten Lectures on Wavelets)》对子波的普及起了重要的推动作用。

现在,子波研究如何从应用数学领域扩展到技术科学领域,在数学研究中已取得的结果如何尽快地为工程技术人员所理解和掌握,是子波研究中的一个迫切而重要的问题,本书拟以滤波、算子和集合论为基础,尽可能采用工程技术人员易于理解的物理直观方式介绍和论述子波变换的基本内容和主要特性,并通过实例说明子波分析的主要方法以及算法实现,同时,用较多的篇幅论述了在子波理论发展中的四个重要概念,即时频窗口与 Heisenberg 测不准原理;多尺度分析(或多分辨分析);框架以及子波包。作者希望这些内容对不熟悉该理论的读者特别是在工程技术领域从事与信号分析处理有关的读者有所帮助,对进一步的研究有参考价值。

1.2 时间—频率分析

信号分析的主要目的是寻找一种简单有效的信号变换方法,使信号所包含的重要特征能显示出来。在子波变换兴起之前,Fourier 级数展开和 Fourier 分析是刻画函数空间、求解微分方程、进行数值计算的主要方法和有效的数学工具,许多常见的微分、积分和卷积运算在 Fourier 变换下均可简化为一般的代数运算。从物理直观上看,一个周期振动可以看成是具有简单频率的简谐振动的叠加,Fourier 级数展开则是这一物理过程的数学描述,而 Fourier 变换如下式所示

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.1)$$

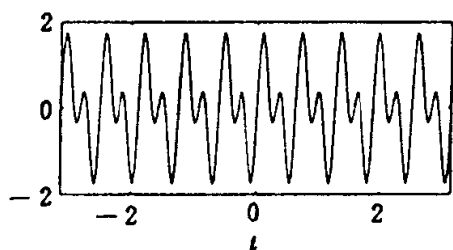
$$f(t) = (\hat{f})^{\vee}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2)$$

其重要性在于 Fourier 变换是域变换,它把时间域与频率域联系起来,在时间域内难以观察的现象和规律,在频率域内往往能十分清楚地显示出来。例如,很容易记录到湍流的脉动过程的时间曲线,它如同噪声,看不出什么规律,但在频率域上,湍流能谱 $S(k)$ 在惯性副区具有一 $5/3$ 方律

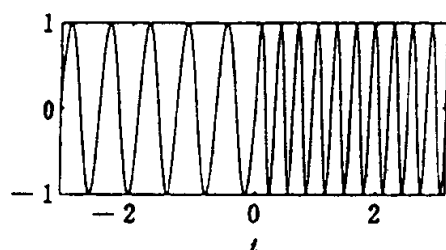
$$S(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.3)$$

所谓频谱分析本质上就是对 $\hat{f}(\omega)$ 的加工、分析和滤波等处理,随着计算技术的迅速发展,现代谱分析算法,针对短记录数据或有限长度信号的谱分析已发展了许多高效高分辨率的算法以及解决实际信号处理的行之有效的方法。当然这些方法是频域的分析方法。

然而,时变频率信号在音乐,地震信号,雷达回波,非平稳地球物理过程中是很常见的,这时人们希望知道信号在突变时刻所对应的频率成份,显然 Fourier 变换的积分作用平滑了非平稳过程的突变成份,作为积分核的 $e^{\pm i\omega t}$ 的幅值在任何情况下均为 1,即 $|e^{\pm i\omega t}| = 1$,因此,频谱 $\hat{f}(\omega)$ 的任一频点值是由时间过程 $f(t)$ 在整个时间域 $(-\infty, \infty)$ 上的贡献决定的;反之,过程 $f(t)$ 在某一时刻的状态也是由频谱 $\hat{f}(\omega)$ 在整个频率域 $(-\infty, \infty)$ 上的贡献来决定的。一个著名的例子就是 P. A. M. Dirac 引入的 $\delta(t)$ 函数,时间上的点脉冲具有在频率域上正负无限伸展的均匀频谱, $f(t)$ 与 $\hat{f}(\omega)$ 彼此是整体刻画,不能反映各自在局部区域上的特征,因此不能用于局部分析。



(a) $f_1(t)$



(b) $f_2(t)$

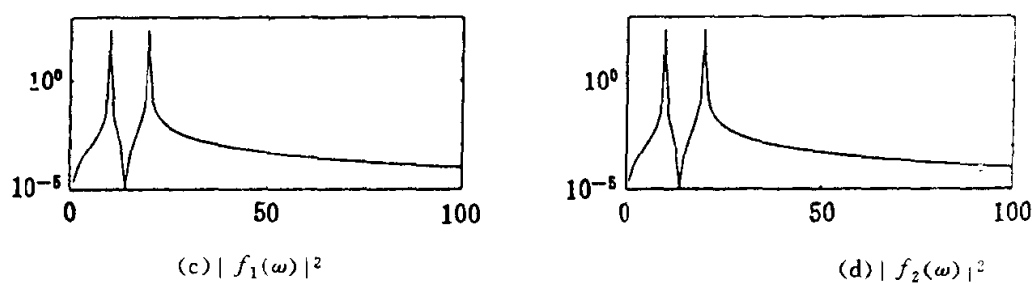


图 1.1 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 Fourier 谱

图 1.1 是上述结果的一个很好的说明。图 1.1(a) 的信号 $f_1(t)$ 由两种不同频率分量 $\sin 10t$ 和 $\sin 20t$ 叠加而成；图 1.1(b) 的信号 $f_2(t)$ 仍由这两种频率分量组成，但它们分别各占信号持续过程的前一半与后一半；图 1.1(c) 和图 1.1(d) 分别给出这两种信号的频谱 $|f_1(\omega)|^2$, $|f_2(\omega)|^2$ ，显然不同的时间过程却对应着相同的频谱，说明 Fourier 分析不能将这两个信号的频谱区别开来。

1.3 窗口 Fourier 变换(Gabor 变换)

为了克服 Fourier 变换不能同时进行时间—频率局域性分析，曾经出现过许多改进的办法，其中比较有成效的办法有 Wigner-Ville 分布和窗口 Fourier 变换两种，前者是一种非线性二次型变换，与子波变换的概念相去甚远，本书将在适当的地方作一些讨论。后者是一种有效的信号分析方法，与当今的子波变换有很多相似之处，它是 D. Gabor 于 1946 年提出的，在非平稳信号的分析中起过很好的作用。

1.3.1 定义

在 Fourier 变换的框架中，把非平稳过程看成是一系列短时平稳信号的叠加，而短时性则是通过时间域上加窗来实现的，并且通过一个参数 τ 的平移来覆盖整个时间域，也就是说采用一个窗函数 $g(t - \tau)$ 对信号 $f(t)$ 的乘积运算实现在 τ 附近的开窗和平移，再进行 Fourier 变换，这就是加窗 Fourier 变换(Windowed Fourier Transform；也称短时 Fourier 变换，STFT)如图 1.2 所示； $Gf(\omega; \tau)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} Gf(\omega, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}_{\omega, \tau}(t) dt \end{aligned} \quad (1.4)$$

式中 $g_{\omega, \tau}(t) = g(t - \tau)e^{-i\omega t}$ 是积分核， $\bar{g}_{\omega, \tau}(t)$ 表示 $g_{\omega, \tau}(t)$ 的复共轭。该变换在 τ 点附近局部地测量了频率为 ω 的正弦分量 ($e^{i\omega t}$) 的幅度，通常选用能量集中在低频处的实偶函数作窗口函数 $g(t)$ 。D. Gabor 采用 Gauss 函数作为窗口函数，相应的 Fourier 变换仍旧是 Gauss 函数，从而保证窗口 Fourier 变换在时域与频域内均有局域化功能。

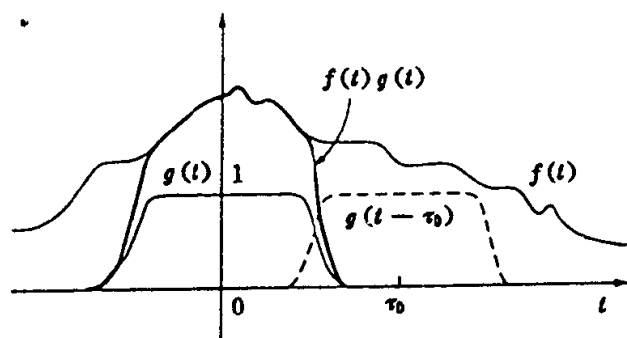


图 1.2 Gabor 变换

其实, Gauss 函数在窗口最小意义下是最优窗口函数, 即

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-t^2/4a} \quad (1.5)$$

式中正常数 a 决定了窗口宽度, $g_a(t)$ 的 Fourier 变换用 $\hat{g}_a(\omega)$ 记之, 则有

$$\begin{aligned} \hat{g}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-t^2/4a} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4a} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt{4\pi a} e^{-a\omega^2} = e^{-a\omega^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_a(t - \tau) e^{-i\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t - \tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-(t-\tau)^2/4a} d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-u^2/4a} du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt{4\pi a} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

显然, 信号 $f(t)$ 的 Gabor 变换精确地按窗口宽度分解了 $f(t)$ 的频谱 $\hat{f}(\omega)$, 提取出它的局部谱信息, 当 τ 在整个时间轴 t 上平移时, 就给出了 $f(t)$ 的完整的 Fourier 变换。因此, 并没有损失 $f(t)$ 在频域上的任何信息。

图 1.3 给出了窗口 Fourier 变换在不同频率下积分核 $g(t)e^{-i\omega t}$ 的实部(实线所示)和虚部(点划线所示), 请注意积分核 $g_{\omega, \tau}(t)$ 对所有的 ω 和 τ 都有相同的支撑区(Support), 但周期数则随频率 ω 而变化。这里支撑区是指一个函数或信号 $f(t)$ 的自变量 t 的定义域, 当 t 在定义域内取值时 $f(t)$ 的值域不为零, 简言之, 支撑(区)定义为一个闭集, 在这个集上信号或过程是非零的; 在支撑区之外信号或过程则迅速降为零。窗口 Fourier 变换是能量守恒变换, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Gf(\omega, \tau)|^2 d\omega d\tau \quad (1.8)$$

换句话说, 定义域为实数集合 R 的平方可积函数 $L^2(R)$ 到 $L^2(R^2)$ 的变换是等距变换。在归一化假定下, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1$ (以下均作这种假定), 式(1.8)是可逆的, 反演变换或相应的

重构公式如下

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, \tau) g(t - \tau) e^{i\omega t} d\omega d\tau \quad (1.9)$$

参数 τ 和 ω 的值可以直接设定为离散值, 并根据实际问题的需要适当选取时间步长与频率步长, 例如, $\tau = n\tau_0, \omega = m\omega_0$, 由此可得到窗口 Fourier 变换的表达式

$$G_d(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - n\tau_0) e^{-im\omega_0 t} dt \quad (1.10)$$

$G_d(m, n)$ 反映了信号 $f(t)$ 在时刻 $n\tau_0$ 时, 频率成份 $m\omega_0$ 在整个频谱中所占的比数, 因此离散窗口 Fourier 变换也能刻画信号在时域与频域上的局部特征。在满足条件 $\tau_0\omega_0 < 2\pi$ 时, 离散的窗口 Fourier 变换是可逆的。遗憾的是, 对于 Gabor 变换来说, 无论怎样离散化均不能使其成为一组正交基, 从而既在理论分析方面, 也在数值计算方面带来很大困难, 应用受到限制。

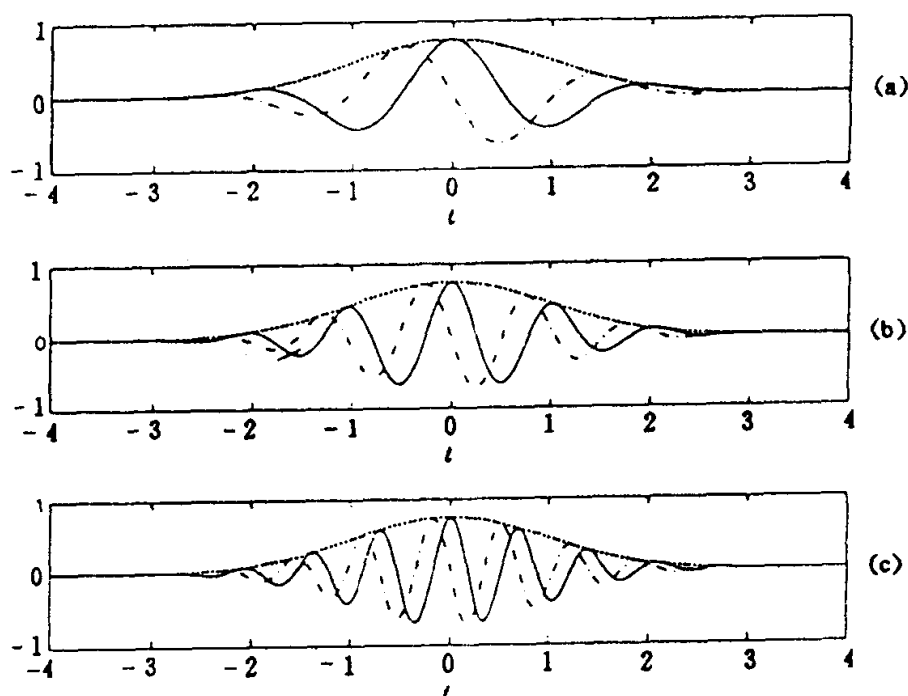


图 1.3 窗口 Fourier 变换的谱图

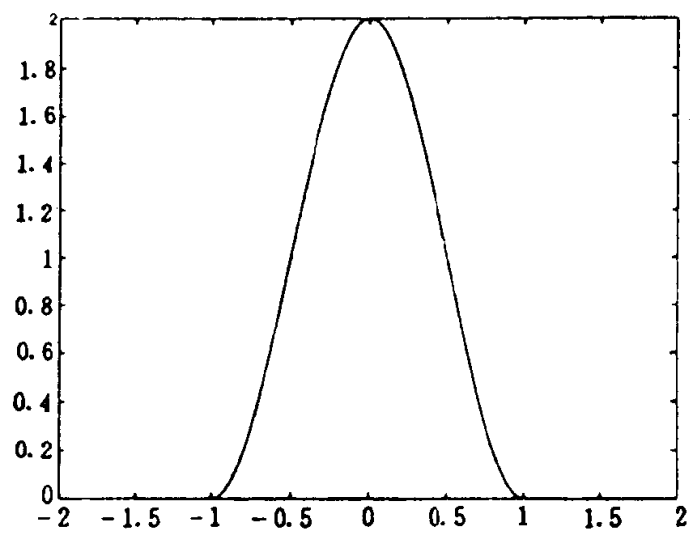
为了更直观地理解窗口 Fourier 变换分别在时域与频域中的局部化功能, 图 1.4 给出了一组实例, 其中窗口函数为

$$g(t) = \begin{cases} 1 + \cos\pi t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1.11)$$

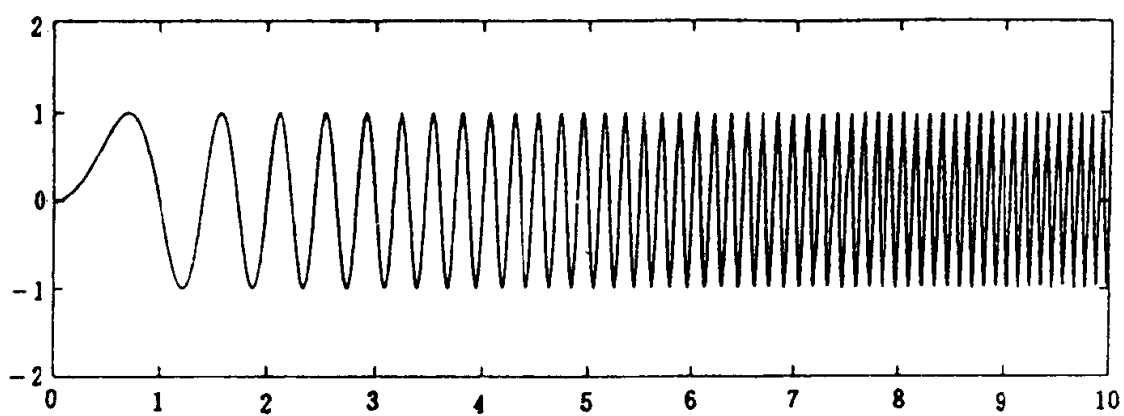
时间窗口的中心在 $t = 0$ 处, 见图 1.4(a)。现在让我们对图 1.4 作一些简要的分析说明, 作为被分析的是线性调频信号 (Chirp Signal) $f(t) = \sin\pi t^2$, 它的特点是瞬时角频率 ω_i 随时间 t 线性增加, 如图 1.4(b) 所示 ($0 \leq t \leq 10$), 因为

$$\omega_i = 2\pi f_i = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\pi t^2}{dt} = 2\pi t \quad (1.12)$$

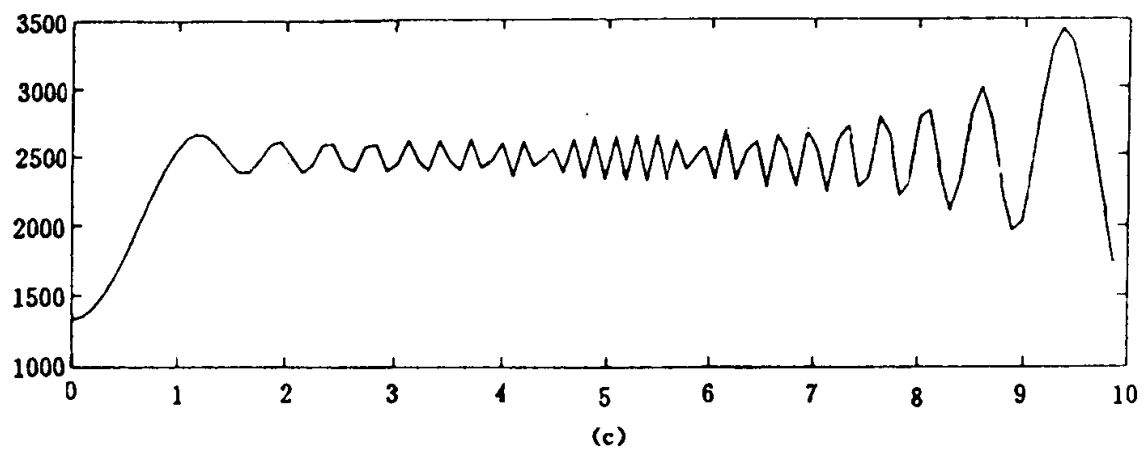
谱密度 $|\hat{f}(\omega)|^2$ 如图 1.4(c) 所示, 给定 $f_i = \omega_i/2\pi = 3; 7$; 加窗后相应的信号分别如图 1.4



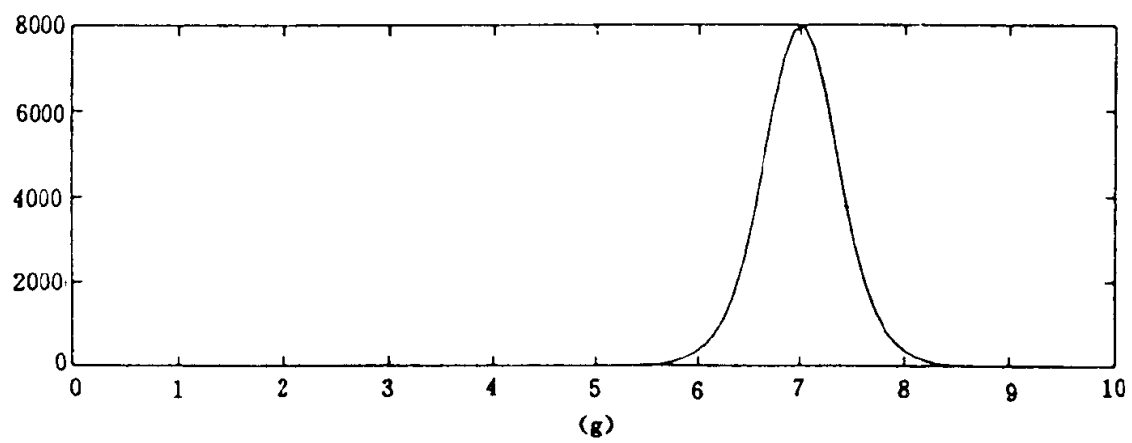
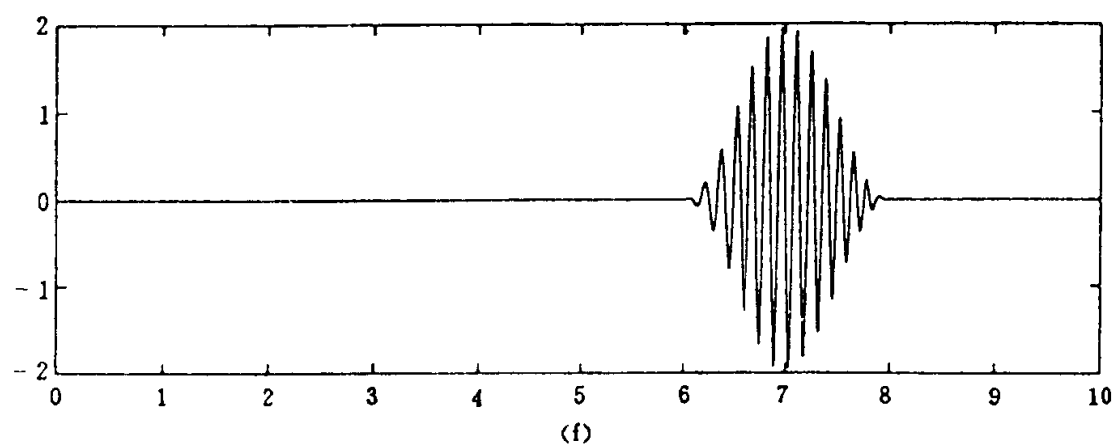
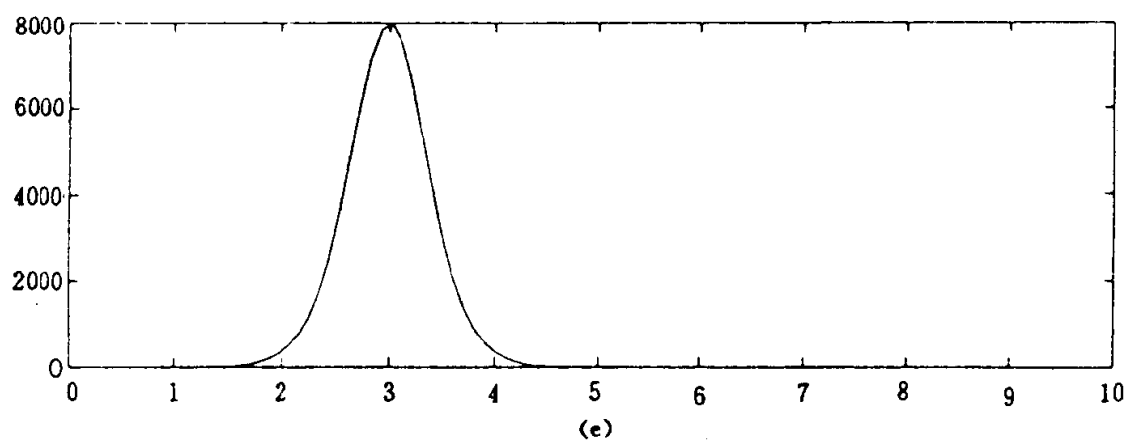
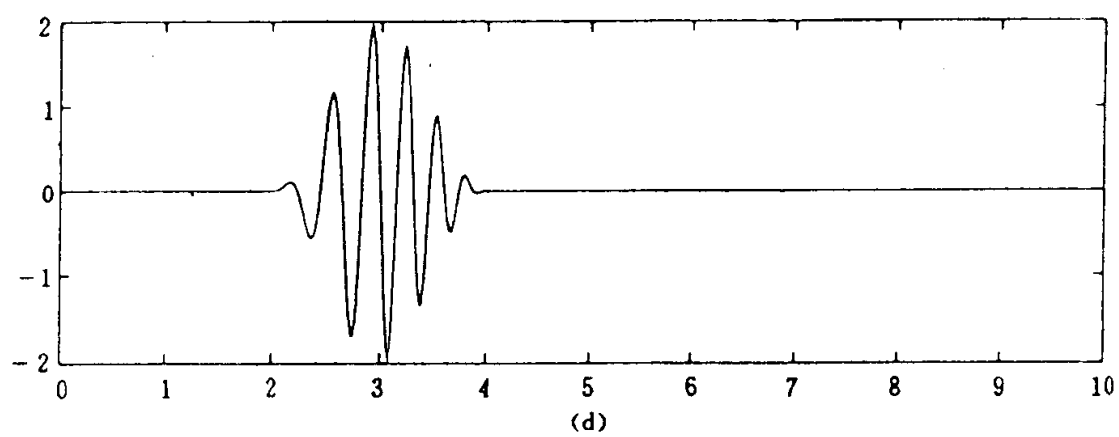
(a)



(b)



(c)



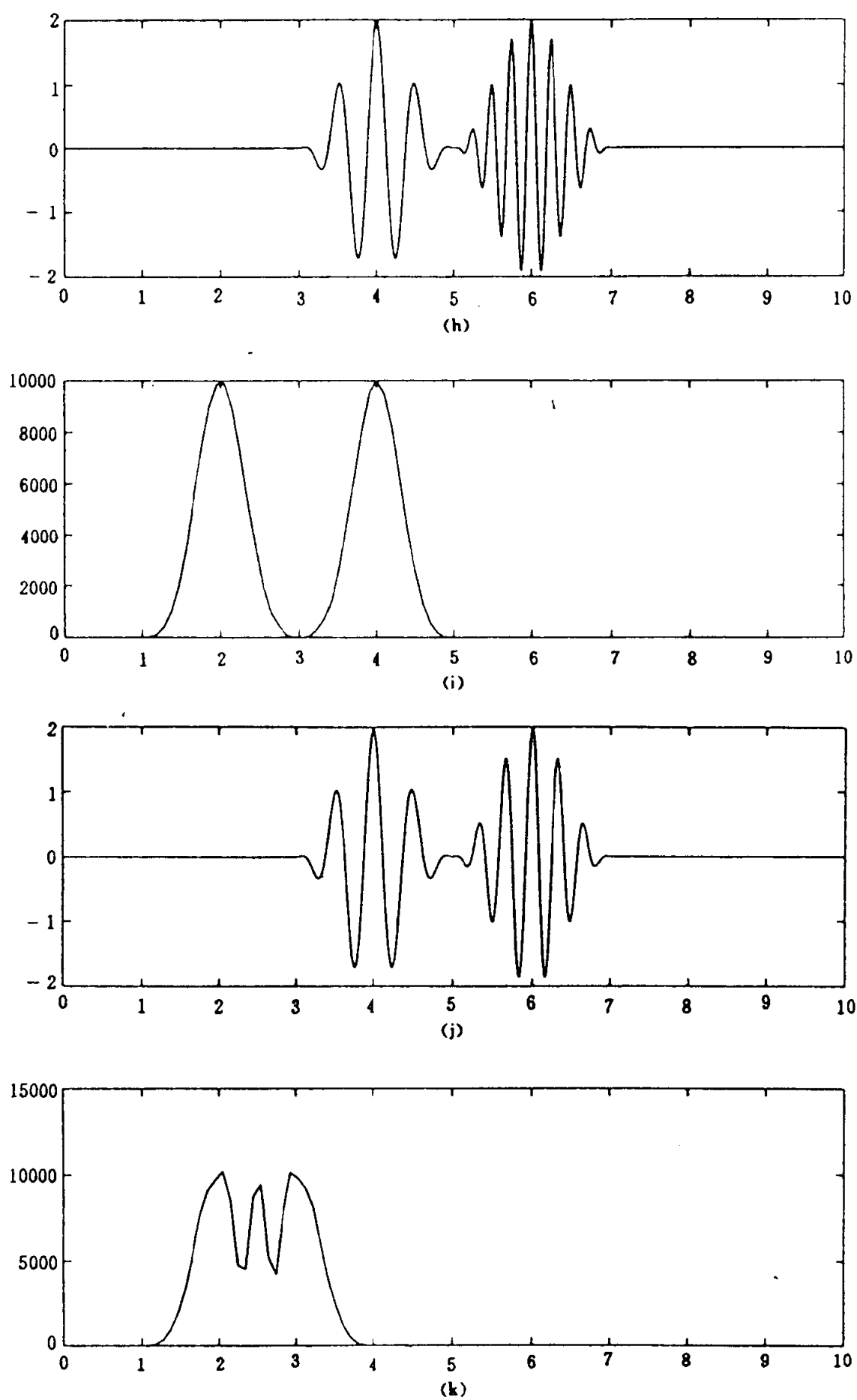


图1.4 窗口 Fourier 变换的时-频域局部化性能

(d)和图1.4(e)所示;而谱密度则如图1.4(f)与图1.4(g)所示,它们都有很好的时-频局部性质。为了检测窗口变换的频率分辨率,假设被分析的信号为 $h(t) = g(t-4)\cos 4\pi t + g(t-6)\cos 8\pi t$, 在窗口函数 $g(t)$ [见式(1.11)]作用下的时-频特性如图1.4(h)和图1.4(i)所示,仍有很好的频率分辨率 ($\Delta f = 2$);当 $h(t)$ 中两个频率相差为1时 ($\Delta f = 1$), $h(t) = g(t-4)\cos 4\pi t + g(t-6)\cos 6\pi t$, 从图1.4(j)和图1.4(k)可以明显看出,时间的局部性能虽然很好,但频域的局部性能已经降低,在点频2与3之间出现一个峰值,使得在 $\Delta f = 1$ 时已经无法判断图上的3个峰点中哪两个为真值。

1.3.2 时间-频率局域化

为了研究窗口 Fourier 变换的时间-频率局域化特性,我们需要研究 $|g_{\omega,\tau}|^2$ 和 $|\hat{g}_{\omega,\tau}|^2$ 的特性,因为它们决定了被分析的信号 $f(t)$ 的特性。事实上,Fourier 变换在时域与频域中能量保持守恒,也就是说能量在变换中是不变量,这一物理原理的数学表示便是 Parseval 公式,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}_{\omega,\tau}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{g}_{\omega,\tau}(\omega)d\omega \quad (1.13)$$

式中 $\bar{g}_{\omega,\tau}(t)$ 和 $\bar{g}_{\omega,\tau}(\omega)$ 分别为 $g_{\omega,\tau}(t)$ 与 $g_{\omega,\tau}(\omega)$ 的复共轭函数,当为实函数时两种表示是相等的。为了方便起见,将上述两个函数乘积的积分运算用内积符号表示,就是说在实数域 (R) 中平方可积的函数,其内积定义如下

$$\langle f, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{y}(x)dx, \quad f, y \in L^2(R) \quad (1.14)$$

这样,式(1.13)即可表示为

$$Gf(\omega, \tau) = \langle g_{\omega,\tau}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{g}_{\omega,\tau}, \hat{f} \rangle \quad (1.15)$$

当 $f(x) = y(x)$ 时,有

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f(x)\|^2 \quad (1.16)$$

这是信号 $f(x)$ 的总功率,符号 $\|f(x)\|$ 称做 $f(x)$ 的范数。这一表达式所包含的深刻的物理意义是,Fourier 变换的时域 (t) 和频域 (ω) 的一对共轭变量 (ω, t) 具有对易关系,从而使 Fourier 变换与窗口 Fourier 变换具有对称性,如果用角频率变量 ν 代替时间变量 t ,用频域窗口函数 $\hat{g}(\nu, \omega)$ 代替时域窗口函数 $g(t - \tau)$,则从式(1.4)表示的时域窗口 Fourier 变换就很容易得到频域窗口 Fourier 变换

$$\begin{aligned} Gf(\omega, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) [\hat{g}(\nu - \omega)e^{-i\nu\tau}]e^{-i\nu\tau}d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \bar{\hat{g}}_{\omega,\tau}(\nu)e^{i\nu\tau}d\nu \end{aligned} \quad (1.17)$$

显然 $\hat{g}_{\omega,\tau}(\nu)$ 是时域窗口函数 $g_{\omega,\tau}(t)$ 的 Fourier 变换,式(1.17)的物理意义是:在频率域中信号 $\hat{f}(\nu)$ 通过窗口函数 $\hat{g}_{\omega,\tau}(\nu)$ 的加窗作用而获得了 $\hat{f}(\nu)$ 在频率 ω 附近的局域信息,即 $\hat{f}_{\omega}(\nu) = \bar{\hat{g}}(\nu - \omega) \hat{f}(\nu)$,如果选用的窗口函数既在时域又在频域具有良好的局部性质(在窗口之外幅值迅速降为零值),那么就可以断言窗口 Fourier 变换给出了信号 $f(t)$ 的局域时