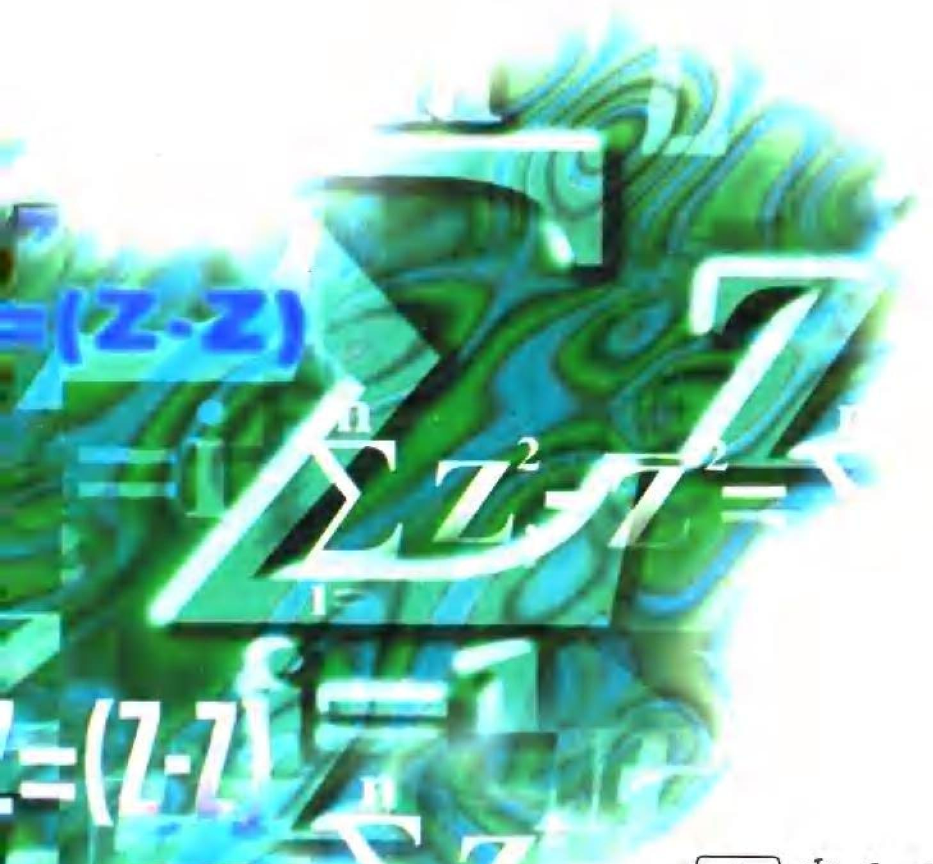
高等专科学校教材

中国计算机学会大专教育学会推荐出版

《概率与数理统计》学习辅导及题解

金炳陶　主编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

高等专科学校教材

《概率与数理统计》学习辅导及题解

金炳陶　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是与高等专科学校规划教材《概率与数理统计》相配套的辅导性读物。书中各章均由学习要求、内容概要、习题题解、复习思考题题解等四部分组成。本书对各章的“三基”进行了简明扼要的归纳和提炼，并在此基础上对于原书中的习题、复习思考题给出了详略适度的解答。考虑到处理概率统计习题的独特思维方式及其计算繁琐的特点，对于某些有思考性的题目，在解题之后附有体现在求解过程中的技巧性、综合性、灵活性的思路分析，以帮助读者提高分析问题、解决问题的能力，从而启发读者积极思考，探索和总结解题规律正确解题。

本书作为高等工程专科学校基础课教材配套的学习辅导用书，适合于从事本课程教学的师生阅读。特别对于有志于自学成材的读者，更是一本无师自通的参考读物。

丛 书 名：高等专科学校教材
书　　名：《概率与数理统计》学习辅导及题解
主　　编：金炳陶
责任编辑：张凤鹏
特约编辑：侯维垣
排版制作：电子工业出版社计算机排版室
印 刷 者：北京牛山世兴印刷厂
装 订 者：三河市路通装订厂
出版发行：电子工业出版社、发行
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036　发行部电话 68214070
URL：http://www.phei.com.cn
经　　销：各地新华书店经销
开　　本：787×1092 1/16　印张：10.5　字数：268.8 千字
版　　次：1998 年 5 月第 1 版　1998 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-4440-4 / G·347
定　　价：14.00

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定，在电子工业部教材办的组织与指导下，按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”的精神，大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委员会大专教育学会密切合作于1986～1995年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作。共出版教材48种，可以较好地解决全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要；在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排；在速度上适应市场经济发展形势的需要，在电子工业部教材办的指导下，大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作，从1994年7月起经过两年的努力制定了1996～2000年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践，从师生反映较好的讲义中经学校选报，编委会评选择优推荐或认真遴选主编人，进行约编的。广大编审者，编委和出版社编辑为确保教材质量和出版，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，编审与出版的缺点和不足，望使用学校和广大师生提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会

电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营734厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
华东工学院
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
电子工业部第47研究所职工大学
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍工职工工学院
天津商学院
国营738厂职工大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营761厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营774厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家口大学
河南新乡纺织职工大学
河南新乡市平原大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学

湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
湖南怀化师范专科学校
湘穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南湘潭机电专科学校
湖南株州大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学
湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳金筑大学
广东佛山大学
广东韶关大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学计算机系
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

编 者 的 话

本书是与金炳陶主编的《概率与数理统计》(高等专科学校规划教材·电子工业出版社1997年第1版)配套而编写的学习辅导用书。

书中的内容及章序与原书《概率与数理统计》一致,各章均由学习要求、内容概要、习题题解、复习思考题题解与解题思考等部分组成。

"学习要求"指出了每章所涉及的范围及其重点、难点,并明确了学习中应达到的要求,以便读者心中有数,把握学习的主动权。

"内容概要"则从笔者长期从事本课程教学、科研的实践和体会出发,将贯穿于各章的基本概念、基本理论、基本运算技能简明扼要地加以归纳和提炼,从而使读者对每章概貌有一个清晰的了解。无疑,这对于全面把握课程内容,提高分析问题与解决问题的能力大有裨益。

"题解"对于原书中的习题、复习思考题按原有顺序逐一给出了详略适度的解答。为了配合原书教学,解题使用的记号、方法均以原书为准。书中凡用"*"标出的部分供读者选读。

"解题思考"是针对处理概率统计习题有思路独特、规律难循、方法多变、计算繁琐的特点,对于某些有思考性的题目,将体现在求解过程中的技巧性、综合性、灵活性思路,给出了有利于扩展思维、开阔眼界的简短提示或要点分析。此外,有选择地对于问题的实际背景、必要的解法指导、同类题目不同方法的展示、一题多解利弊的比较、基本解法的扩充、典型错解的剖析或需要留给读者继续思考的问题等也一并录入其中,以引导读者积极思考,探索解题规律。

由于解题过程中所需的概念、方法及其依据,大体上都可在"内容概要"中找到,因而本书也可以单独使用。

参与本书编写的是南京建筑工程学院金炳陶、上海第二工业大学张祖骥、南京电子工业职工大学赵晓彬。

由于编者水平有限,书中难免有不当之处,敬请读者不吝赐教。

金炳陶　张祖骥　赵晓彬

1997年4月

第一章　随机事件与概率计算

一、学习要求

1. 事件系本章以至于本课程的初始概念。对此，我们既要充分了解它的基本属性，也要十分熟悉事件之间的关系和运算法则。

2. 对于事件的概率，重点是熟练掌握古典概型下计算概率的若干常见类型。初学者务必认真对待这一难点。

3. 涉及概率的基本运算法则，包括加法公式、条件概率与乘法公式、全概率公式、逆概率公式以及基于独立性概念而形成的二项概率公式、泊松公式都要清晰地了解它们的条件和结论，并能灵活运用。

事件的独立性概念及其判断法则既是重点也是难点，计算概率的加法公式、乘法公式与二项概率公式是应用的重点，必须熟练掌握。

二、内容概要

1. 事件与概率

(1) 事件是随机事件的简称，是本课程的研究对象。它在一次试验中可能发生也可能不发生，无规律可循。

试验的直接结果被称为基本事件，否则便称为复合事件。特别把给定试验下，由所有基本事件构成的复合事件称为必然事件。而把不包括任何基本事件的随机事件称为不可能事件。

必然事件、不可能事件均可视为事件的极端情形。

(2) 事件在大量重复试验中，发生的可能性大小具有稳定趋势，呈现出明显的规律性——统计规律性。这是事件本身的固有属性。

用以度量事件在试验中发生可能性大小的数称为事件的概率。其基本性质是：

1) 对于任一事件 A，恒有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2) 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

3) 对于不可能事件 ϕ，有 $P(\phi)=0$。

(3) 事件关系与相应的概率关系

1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生而导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$。对于任一事件 A，必有 $\phi \subset A \subset \Omega$。

若 $B \supset A$，又 $A \supset B$，则称 A、B 相等，记为 $A=B$。

相应的概率关系是：当 $A \supset B$ 时，有 $P(A) \geqslant P(B)$[①]；当 $A=B$ 时，有 $P(A)=P(B)$。

2）事件的互斥

若事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\phi$，则称 A、B 为互斥事件。

相应的概率关系为 $P(AB)=0$。

3）事件的对立

若事件 A 与 B 同时满足 $AB=\phi$、$A+B=\Omega$，则称 A、B 互为对立事件。

相应的概率关系为 $P(A)+P(B)=1$。

记 A 的对立事件为 $\overline{A}$，于是 $\overline{A}$ 即 B，故有 $A\overline{A}=\phi$、$A+\overline{A}=\Omega$。

相应的概率关系为 $P(A)=1-P(\overline{A})$。

4）事件的独立

在 $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$ 的约定下，若事件 A 与事件 B 有概率关系 $P(B|A)=P(B)$ 或 $P(A|B)=P(A)$，则称 A、B 互为独立事件。

5）事件的和（并）

由事件 A 与 B 至少有一发生构成的事件，称为 A、B 的和事件，记为 $A+B$ 或 $A \cup B$。

相应的概率关系是：当 A、B 为互斥事件时，$P(A+B)=P(A)+P(B)$；当 A、B 为相容事件时，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

6）事件的积（交）

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件，称为 A、B 的积事件，记为 AB 或 $A \cap B$。

相应的概率关系是：当 A、B 互为独立事件时，$P(AB)=P(A)P(B)$；当 A、B 为相依事件时，$P(AB)=P(A)P(B|A)$ 或 $P(AB)=P(B)P(A|B)$。

和事件、积事件可以推广到有限场合或可列多个事件的情形。容易验证它们满足交换律、结合律、分配律、幂等律、交并对偶律，并可进行互斥分解。此外还满足：

$$AB \subset A \subset A+B \qquad AB \subset B \subset A+B$$

上述法则可形象地说成：事件求交越交越“小”；事件求并越并越“大”。

相应的概率关系分别是：$P(AB) \leqslant P(A) \leqslant P(A+B)$；$P(AB) \leqslant P(B) \leqslant P(A+B)$。

在 $A \supset B$ 的约定下，又有：

$$AB = B \qquad A+B = A$$

上述法则可形象地说成：有包含关系的两事件，求交取“小”的；求并取“大”的。这一法则可简称为事件运算的吸收律。

相应的概率关系分别是：$P(AB)=P(B)$；$P(A+B)=P(A)$。

7）事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生构成的事件，称为 A、B 的差事件，记为 $A-B$ 或 $A\overline{B}$。

相应的概率关系是：当事件 A 与事件 B 有包含关系 $A \supset B$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$；否则，$P(A-B)=P(A)-P(AB)$。

8）互斥完备事件组

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时满足：

$$A_iA_j=\phi, \quad i \neq j, \quad i、j=1,2,\cdots,n \ (A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 两两互斥})；$$

① “内容概要”是假定读者对原书所涉及的内容有所了解的情况下拟写的，所列内容经重新组合后给出，为的是较深入地揭示相关内容之间的内在联系，但是前后顺序不一定存在因果关系。

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega\ (A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 构成完备事件组})。$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成互斥完备事件组。

相应的概率关系是 $P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$。

2. 概率的定义及计算要点

(1) 概率的统计定义

假设试验在相同条件下可以无限次地重复，当试验次数 N 充分大时，事件 A 的频率 $\omega(A)$ 始终围绕某一常数 p 作稳定的微小摆动，则称事件 A 有概率。常数 p 就是事件 A 的概率，即 $P(A)=p$。

人们经常运用统计定义测定事件发生的概率。由统计定义求概率通常分两步完成：

1) 做试验取得频率 $\omega(A)=M/N$（其中 M 是 A 在 N 次试验中发生的次数）；

2) 以频率作为概率的近似，即 $P(A)\approx\omega(A)$。

(2) 概率的古典定义

对于给定的古典概型，记等概基本事件组中基本事件总数为 n，事件 A 包括其中的 m 个基本事件，则事件 A 的概率为 $P(A)=m/n$。

(3) 概率的几何定义

已知 Ω 为一有度量的区域，$g\subset\Omega$ 为一有度量的子区域，并以 $L(\Omega)$、$L(g)$ 表示它们的度量。若随机点 M 取得 Ω 内任一位置具有等可能性，则事件 $A=\{$投向 Ω 的随机点 M 落入 $g\}$ 的概率为 $P(A)=L(g)/L(\Omega)$。

运用定义计算概率的重点是古典定义。为此，首先要以排列、组合为工具正确计算基本事件总数 n，其次是求出事件 A 所包含的基本事件个数 m。古典定义的重要，不仅是通常情况下概率计算必不可少的，而且也是避开公理化体系导入运算法则的依据。

古典概型下，最常见的是应用于无放回抽样计算概率的超几何公式。其实际模型是，今有一批产品共 N 件，内含次品 M 件。设事件：

$$A=\{\text{从中无放回地任取的 } n \text{ 件中恰有 } m \text{ 件次品}\}$$

于是事件 A 的概率为：

$$P(A)=C_M^m\,C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}$。

3. 概率的基本运算法则

(1) 概率的加法公式

$$P(A+B)=\begin{cases}P(A)+P(B) & A、B\text{ 为互斥事件}\\ P(A)+P(B)-P(AB) & A、B\text{ 为相容事件}\\ \left.\begin{array}{l}P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\ 1-(1-P(A))(1-P(B))\end{array}\right\} & A、B\text{ 为独立事件}\end{cases}$$

特别当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件时，公式

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)&=1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})\\&=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)\end{aligned}$$

$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\cdots(1 - P(A_n))$$

在解决实际问题时非常有用。

(2) 条件概率与乘法公式

条件概率 $P(A|B)$ 是指 B 发生前提下 A 发生的概率。当 $P(B)>0$ 时，这一概率可表示成 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$。

类似地，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$。

基于条件概率与独立性概念可推得概率的乘法公式：

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A) & A\text{、}B\text{ 为相依事件} \\ P(A)P(B) & A\text{、}B\text{ 为独立事件} \end{cases}$$

上述公式的推广也应属基本之列。

(3) 全概率公式与逆概率公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互斥完备事件组，$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$。B 为 Ω 中任一事件，能且只能与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一同时发生。则有全概率公式：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)$$

保持全概率公式的题设条件，又 $P(B)>0$。则有逆概率公式：

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)\, P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

(4) 二项概率公式

假设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则它在 n 重贝努里试验中恰好发生 m 次的概率为：

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}$$

其中 $q=1-p$，$m=0,1,2,\cdots,n$。$P_n(m)$ 也可记为 $b(m;n,p)$。

这便是二项概率公式，简称二项公式。它与超几何公式、泊松公式有着较为紧密的联系，其具体关系是借助两个极限给出：

$$\frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \xrightarrow{(M/N \to p,\, N \to \infty)} C_n^m\, p^m (1-p)^{n-m} \xrightarrow{(\lambda = np,\, n \to \infty)} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

三、习题一题解与解题思考

1. 对于同时投掷甲、乙两枚硬币的试验，试回答下列问题：

(1) 写出题设试验下的样本空间 Ω；

(2) 若记 $A=$\{甲、乙硬币均正面朝上\}，则其对立事件 $\overline{A}=$\{甲、乙硬币都不是正面朝上\}，对吗？为什么？

解：总设 $B=$\{甲币正面朝上\}，$C=$\{乙币正面朝上\}。

(1) $\Omega=\{BC,\ B\overline{C},\ \overline{B}C,\ \overline{B}\,\overline{C}\}$；

(2) 不对。因为 A 的对立事件应为“甲、乙硬币不都正面朝上”，也可说成“至少有一反面朝上”，即 $\overline{A}=\{B\overline{C},\ \overline{B}C,\ \overline{B}\,\overline{C}\}$。

2. 设 A,B,C 为任意三事件。试用 A,B,C 表示下列事件，并作出相应的维恩

图。

(1) 只有 B 发生；　　　　(2) 只有 B 不发生；

(3) 至少有一个发生；　　　　(4) 恰有一个发生；

(5) 没有一个发生；　　　　(6) 至少有两个不发生；

(7) 至多有两个发生；　　　　(8) 至多三个发生。

解：(1) {只有 B 发生} $=\overline{A}\,B\,\overline{C}$（图 1-1 所示）

(2) {只有 B 不发生} $=A\,\overline{B}\,C$（图 1-2 所示）

(3) {至少有一发生} $=A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,B\,C+A\,\overline{B}\,C+A\,B\,\overline{C}+A\,B\,C$

$=A+B+C$（图 1-3 所示）

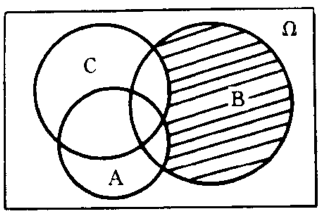


图 1-1

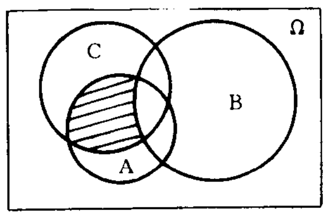


图 1-2

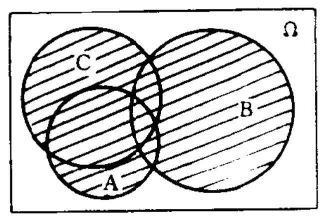


图 1-3

(4) {恰有一个发生} $=A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C$（图 1-4 所示）

(5) {没有一个发生} $=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A+B+C}$（图 1-5 所示）

(6) {至少有两个不发生} $=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C$（图 1-6 所示）

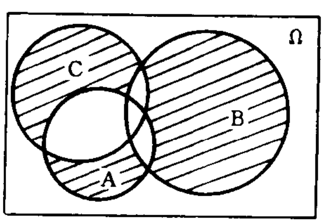


图 1-4

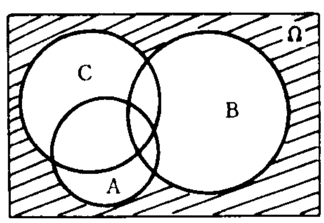


图 1-5

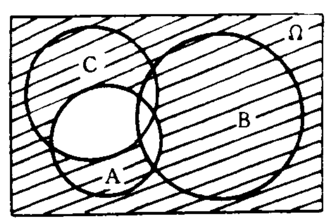


图 1-6

(7) {至多有两个发生} $=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,B\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,B\,C$

$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$（图 1-7 所示）

(8) {至多三个发生} $=\Omega$（图 1-8 所示）

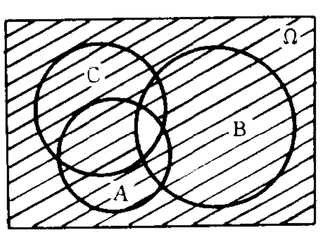


图 1-7

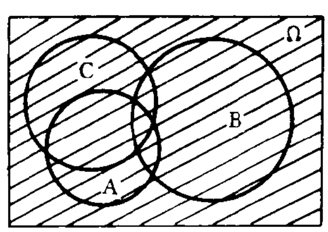


图 1-8

解题思考：本题系一常见题型。这类题目看似平常，其实并非完全如此。因为同一事件从

不同角度去考察时，往往会出现多种表达形式，由此带来一定的复杂性。例如，题(3)亦可表示成 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$。又如，题(6)另外的表达形式是 $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}$ 或 $\overline{AB+BC+CA}$。这就需要我们深入剖析事件的结构，例如题(3)的"至少有一个发生"，实质上是由如下三类子事件构成：

$$\{恰有一个事件发生\} = A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$$

$$\{恰有二个事件发生\} = A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C$$

$$\{恰有三个事件发生\} = A\,B\,C$$

至于同一事件不同表达形式的等价性，读者可借助事件的关系与运算法则自行验证。

3. 如图 1-9 所示的开关电路中，字母 A,B,C,D 分别表示相应开关不闭合的事件。试用 A,B,C,D 表示事件{灯亮}与{灯不亮}，并用交并对偶原理验证其结果。

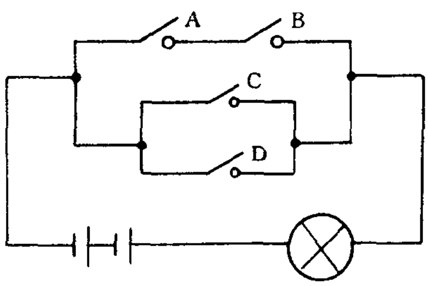


图 1-9

解：记 E={灯亮}，于是：

$$E=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$$

$$\overline{E}=(A+B)CD$$

交并对偶原理的验证为：

$$\overline{E}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}=(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}})\,\overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{D}}=(A+B)CD$$

4. 化简下列各式：

(1) $(A+B)(B+C)$；

(2) $(A+B)(A+\overline{B})$；

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$。

解：(1) $(A+B)(B+C)=AB+AC+B+BC=B+AC$

(2) $(A+B)(A+\overline{B})=A+A\,\overline{B}+AB+\phi=A$

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=AB$

解题思考：粗略地讲，"化简"即去掉原题中的括号。化简的过程实际上就是事件运算法则与运算律综合应用的过程，本题各自展开后运用吸收律即可。

5. 设事件 A,B,C 有等式 $A+B+C=A,ABC=A$ 成立。试分别说明事件 A，B,C 之间的关系。

解：$A+B+C=A$ 表明 $B+C\subset A$。但 B,C 可以互斥、相容或包含；

$ABC=A$ 表明 $A\subset BC$。但 B,C 的交必须是非不可能事件。

6. 从 2 到 11 的十个整数中随机地选取一个，命：

$$A = \{取奇数\} \qquad B = \{取质数\} \qquad C = \{取 3 的倍数\}$$

(1) 写出事件 AB，并求其概率；

(2) 写出事件 $A-C$，并求其概率；

(3) 写出事件 $B+(\overline{A+\overline{C}})$，并求其概率。

解：由题设知 $A=\{3,5,7,9,11\}$，$B=\{2,3,5,7,11\}$，$C=\{3,6,9\}$。

(1) $AB=\{3,5,7,11\}$ $\qquad$ $P(AB)=0.4$

(2) $A-C=\{5,7,11\}$ $\qquad$ $P(A-C)=0.3$

(3) $B+(\overline{A+\overline{C}})=\{2,3,5,6,7,11\}$ $\qquad$ $P(B+(\overline{A+\overline{C}}))=0.6$

7. 10 件同类产品，经检测内含 4 件甲级品、6 件乙级品。从中任取三次，每次取出 1 件。试分别在有放回、无放回的抽取下，求被取的 3 件中恰有 2 件是甲级品

的概率。

解：总设 $A=\{$被取的 3 件中恰有 2 件是甲级品$\}$。

有放回场合：

基本事件总数 $n=10^3$

事件 A 包括的基本事件数 $m=C_3^2\,4^2\times 6$

于是，所求概率为：

$$P(A)=(C_3^2\,4^2\times 6)/10^3=0.288$$

无放回场合：

基本事件总数 $n=A_{10}^3$

事件 A 包括的基本事件数 $m=C_3^2\,A_4^2\,A_6^1$

于是，所求概率为：

$$P(A)=C_3^2\,A_4^2\,A_6^1/A_{10}^3=0.3$$

解题思考：本题是属古典概型的基本题。由题设可知，抽取是讲究先后次序的。而事件 A 只是要求含 2 个甲级品、1 个乙级品，却并不计较次序。按事件 A 的结构，它应包括三种可能：甲、甲、乙；甲、乙、甲；乙、甲、甲。每一特定次序下可能的种数都相同：有放回场合下应是 $4^2\times 6$；无放回场合下应是 $A_4^2A_6^1$。而 C_3^2 是事件 A 所包含的特定次序的种数，即所谓次序系数。

"无放回抽取"相当于"一次取"模式，故概率计算运用超几何公式处理更方便些，即：

$$P(A)=C_4^2\,C_6^1/C_{10}^3=0.3$$

由此可知，相同的题设条件在不同抽样方式下，计算概率所用工具迥然不同，结果也有差别，初学者必须认真识别。

8. 从 3 名一年级学生、4 名二年级学生、4 名三年级学生及 3 名四年级学生中随机地选出 4 名，组成课外活动小组。试求下列事件的概率：

(1) 每个年级都有 1 名学生参加(A)；

(2) 二、三年级各有 2 名学生参加(B)；

(3) 只有二或三年级学生参加(C)；

(4) 没有二、三年级学生参加(D)。

解：由题设知，基本事件总数 $n=C_{14}^4=1001$。

$m_A=C_3^1\,C_4^1\,C_4^1\,C_3^1=144$　　$P(A)=144/1001=0.1439$

$m_B=C_4^2\,C_4^2=36$　　$P(B)=36/1001=0.0360$

$m_C=C_4^4\,C_4^0+C_4^3\,C_4^1+C_4^2\,C_4^2+C_4^1\,C_4^3+C_4^0\,C_4^4=70$

$P(C)=70/1001=0.0699$

$m_D=C_3^1\,C_3^3+C_3^2\,C_3^2+C_3^3\,C_3^1=15$　　$P(D)=15/1001=0.0150$

解题思考：在概率计算中，通常设好事件是解题的第一步。但有时为方便，对于事件的设立用括号在题后标出。这样，不仅求解有序清晰，而且书写简明扼要。

9. 已知 10 件同类零件，其中 3 件是次品，从中任取 4 件。试求下列事件的概率：

(1) 恰有 2 件是次品(A)；　　(2) 4 件全是次品(B)；

(3) 4 件全是正品(C)；　　(4) 至少有 1 件是正品(D)。

解：由题设知，基本事件总数 $n=C_{10}^4=210$。于是：

$$m_A = C_3^2 C_7^2 = 63 \qquad P(A) = 63/210 = 0.3$$
$$m_B = 0 \quad (B = \phi) \qquad P(B) = 0$$
$$m_C = C_7^4 = 35 \qquad P(C) = 35/210 = 0.1667$$
$$m_D = C_{10}^4 \quad (D = \Omega) \qquad P(D) = 1$$

10. 把 1,2,3,4,5,五个数分别写在五张小纸片中,任取其三组成一个三位数。试求下列事件的概率:

(1) 三位数为奇数(A); (2) 三位数为 5 的倍数(B);

(3) 三位数为 3 的倍数(C); (4) 三位数小于 350(D)。

解:基本事件总数 $n=A_5^3=60$。于是:

$$m_A = A_4^2 \times 3 = 36 \qquad P(A) = 36/60 = 0.6$$
$$m_B = A_4^2 \times 1 = 12 \qquad P(B) = 12/60 = 0.2$$
$$m_C = 4 \times 3! = 24 \qquad P(C) = 24/60 = 0.4$$
$$m_D = 2 \times A_4^2 + 1 \times 3 \times A_3^1 = 33 \qquad P(D) = 33/60 = 0.55$$

解题思考:本题的随机试验是用取出的 3 个数组成三位数,故基本事件总数的计算是先组合后排列,即 $n= C_5^3 3! = A_5^3$,其结果相当于从 5 个数中取出 3 个的选排列。

余下的困难是求事件 C、D 中所含的基本事件数。

对于 C 的情形,三位数是 3 的倍数,各数位上的数字和应是 3 的倍数。所有可能三位数的 C_5^3 个组合中,只有 1、2、3,1、3、5,2、3、4,3、4、5 各自经全取排列后产生的三位数才可能是 3 的倍数,故 $m_C=4\times3!$。

至于事件 D,即三位数小于 350,可能情形只有两种:或是百位上取 1 或 2,其余数位可在 1 或 2 之外任选;或是百位上取 3,而十位上只能取 1、2 或 4,个位上可在余下的三个数中任选一个,故 $m_D=2\times A_4^2+1\times3\times A_3^1$。

11. 从 0,1,2,…,9 的 10 个数码中,有放回地任取 6 个。试求下列事件的概率:

(1) 6 个数码全不同(A);

(2) 6 个数码不含 3,6,9(B);

(3) 5 在 6 个数码中恰好出现两次(C);

(4) 5 在 6 个数码中至少出现一次(D)。

解:题设条件下所有可能情形 $n=10^6$。于是:

$$m_A = A_{10}^6 \qquad P(A) = A_{10}^6/10^6 = 0.1512$$
$$m_B = 7^6 \qquad P(B) = 7^6/10^6 = 0.1176$$
$$m_C = C_6^2\, 9^4 \qquad P(C) = C_6^2\, 9^4/10^6 = 0.0984$$
$$m_D = 10^6 - 9^6 \qquad P(D) = (10^6 - 9^6)/10^6 = 0.4686$$

12. 某学生打算把 2 本政治书、3 本语文书、4 本数学书横排在书架的同一层。试求下列事件的概率:

(1) 同类书排在一起(A); (2) 同类书不计较顺序(B)。

解:所有可能情形 $n=(2+3+4)! = 9!$。于是:

$$m_A=(1+1+1)!\ 2!\ 3!\ 4! \qquad P(A)=3!\ 2!\ 3!\ 4!/9! =0.0048$$

$m_B = 9!/2!\ 3!\ 4!$ $\qquad\qquad P(B) = (9!/2!\ 3!\ 4!)/9! = 0.0035$

解题思考：m_A 中的 $(1+1+1)!$ 是把每一类书当作一本处理的结果，书上架是以讲究顺序为前提的，当然在一起的同类书也该有顺序，故 $m_A = 3!\ 2!\ 3!\ 4!$。

对于事件 B，由于同类书不计较顺序，但也没有要求排在一起，故 m_B 应按不尽相异全取排列处理，故 $m_B = 9!/(2!\ 3!\ 4!)$。

13. 某地以英文字母及阿拉伯数字组成 7 位牌照。试求下列事件的概率：

(1) 牌照的前 2 位是英文字母、后 5 位是阿拉伯数字(A)；

(2) 牌照中有 2 位是英文字母、另外 5 位是阿拉伯数字(B)。

解：基本事件总数 $n=(26+10)^7$。于是：

$$m_A = 26^2 \times 10^5 \qquad P(A) = (26^2 \times 10^5)/36^7 = 0.0009$$

$$m_B = C_7^2\, 26^2 \times 10^5 \qquad P(B) = (C_7^2\, 26^2 \times 10^5)/36^7 = 0.0181$$

14. 3 位旅客到某地 4 家旅馆投宿。试求其中 2 家旅馆无旅客前去投宿的概率。

解：设 $A=\{2$ 家旅馆无旅客前去投宿$\}$。

所有可能情形 $n=4^3$，有利于事件 A 的可能情形 $m=C_4^2\, C_3^2\, 2!$。

故所求概率为 $P(A)=C_4^2\, C_3^2\, 2!/4^3=0.5625$。

解题思考：通常情况下，凡旅馆都应有同时接待 3 位旅客的能力，因而所有可能情形是一个重复排列问题。

至于有利于事件 A 的可能情形需要分三个层次来考察：

C_4^2 ——2 家无旅客前去投宿的旅馆在 4 家旅馆中的选择种数；

C_3^2 ——3 位旅客最终在且必须在余下的 2 家旅馆中投宿，共宿于一旅馆的 2 人在 3 人中的选择种数；

$2!$ ——旅馆、人员确定之后出现的一种次序交换。

由于上述层次是接连进行的，故由乘法原理可知它们的积便是 m。

***15.** 先把长为 l 的木棍折断为两部分，再把较大的那一部分折断成两部分。试求所得三部分能组成三角形的概率。

解：设 D、C 为木棍 OB 的两个分点(图 1-10 所示)，且记 $OD=x$，$DC=y$，于是 BC 的长度为 $l-x-y$。

注意到题设条件下，必有 $OC>l/2$。另设：

$$A = \{OD, DC, CB \text{ 能构成三角形}\}$$

于是，样本空间为：

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant l,\ l/2 \leqslant x+y \leqslant l\}$$

此即图 1-11 中梯形 $EFGH$，其度量为：

$$L(\Omega) = 3\,l^2/8$$

有利于事件 A 的区域为：

$$g = \left\{(x,y) \left| \begin{array}{ll} x+y > l-x-y, \text{ 即} & x+y > l/2 \\ x+l-x-y > y, \text{ 即} & y < l/2 \\ y+l-x-y > x, \text{ 即} & x < l/2 \end{array} \right. \right\}$$

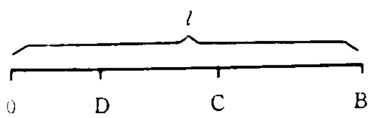


图 1-10

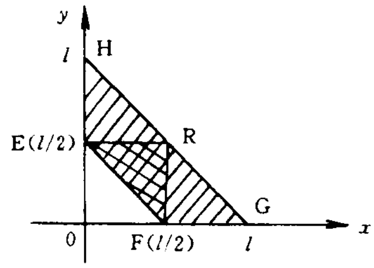


图 1-11

此即图 1-11 中的三角形 ERF,其度量为:

$$L(g)=l^2/8$$

故所求概率为 $P(A)=L(g)/L(\Omega)=1/3$。

解题思考:借助几何度量处理概率计算问题,便是几何概型的基本特征。相对于古典概型来讲,它没有有限的约束,却保留了等可能性,因而几何概率问题可以看成古典概型的推广。

***16**. **在时间间隔 5 分钟内的任何时刻,两信号等可能地进入同一收音机.如果两信号进入收音机的间隔小于 30 秒,则收音机受到干扰。试求收音机不受干扰的概率。**

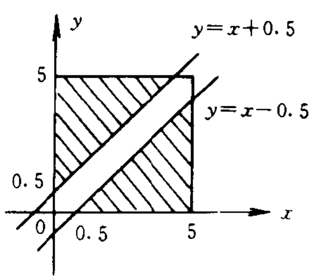


图 1-12

解:设 $A=\{$收音机不受干扰$\}$。

记 x,y 为两信号进入收音机的时刻。于是,样本空间为:

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 5\}$$

有利于事件 A 的区域为:

$$g=\{(x,y)\mid |x-y|>0.5\}$$

此即图 1-12 中划有阴影的部分。于是,有:

$$L(\Omega)=5^2\qquad L(g)=4.5^2$$

故所求概率为:

$$P(A)=L(g)/L(\Omega)=4.5^2/5^2=0.81$$

***17. 甲、乙两船欲停靠同一码头,它们在一昼夜内独立地到达码头的时间是等可能的,各自在码头上停留的时间依次是 1 小时和 2 小时。试求一船要等待空出码头的概率。**

解:设 $A=\{$一船要等待空出码头$\}$。

记甲、乙两船一昼夜内到达码头的时刻分别为 x,y。于是:

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}$$

其度量为 $L(\Omega)=24^2$。

有利于 A 的区域 g 为:

$$g=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}y-x\leqslant 1(\text{甲先到,乙等甲空出}),\text{即 } y\leqslant x+1\\ x-y\leqslant 2(\text{乙先到,甲等乙空出}),\text{即 } y\geqslant x-2\end{array}\right.\right\}$$

如图 1-13 所示,其度量为 $L(g)=24^2-\dfrac{22^2}{2}-\dfrac{23^2}{2}$。