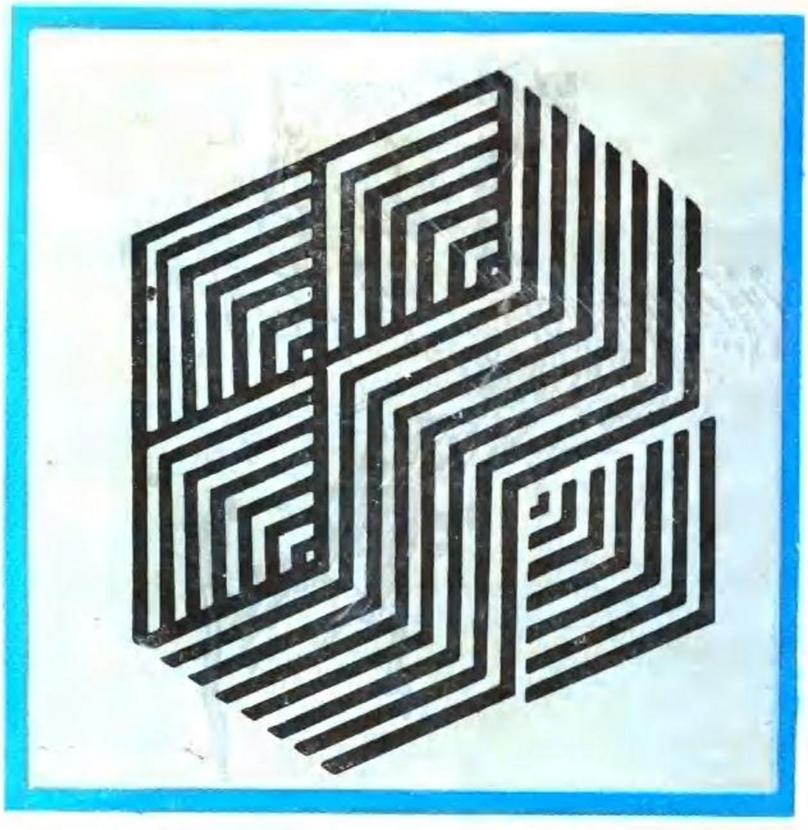
现代数学研究丛书

主编 刘应明

亚纯函数的正规族

顾永兴



四川教育出版社

现代数学研究丛书

亚纯函数的正规族

四川教育出版社

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

现代数学研究丛书
亚纯函数的正规族　　顾永兴　著
四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　四川新华印刷厂印刷
开本850×1168毫米1/32　印张8.25　插页4 字数180千
1991年6月第一版　1991年6月第一次印刷
印数：1—720 册
ISBN7—5408—1479—9/G·1430　定价：5.75元

序

全纯函数与亚纯函数的正规族理论是复分析的一个重要组成部分. 从P.Montel引进正规族, 它便与函数取值的问题紧密地联系在一起, 以后的发展也是如此. 在证实正规定则时, 函数值分布论常常起着关键的作用.

正规族也是复分析里的一个有力工具. 例如从80年代初开始十分活跃并且正在蓬勃发展的复动力系统, 就以正规族作为一个极其基本的概念.

法国著名数学家A. Bloch曾注意到: 如果开平面上的一个全纯(或亚纯)函数满足某条件即蜕化为一常数, 则在区域内一族全纯(或亚纯)函数一致地满足该条件时应该是一正规族. 简单地说, 即相应于一Liouville-Picard型定理, 必有一正规定则. 人们常常凭借这条Bloch法则从已知的Liouville-Picard型定理来猜测新的正规定则. 值得高兴的是以往所预言的关于正规定则的问题, 近年来都相继得到解决与证实. 人们进一步发现对于一个正规定则, 还往往相应地存在一条奇异方向. 在这方面也已出现了很多研究成果,

顾永兴教授多年从事正规族理论及相关问题的研究，成果卓著.特别地，他对亚纯函数证实了Miranda定则，颇受国内外同行注目. 在这本书里，他主要论述了全纯函数与亚纯函数的正规族理论，同时对函数值分布论，奇异方向等作了扼要的论述. 此书取材适当，论证严谨，是复分析方面的佳作. 如能认真研读，定会受益不浅.

杨 乐

1988年11月

前言

众所周知，平面上任一无限点集至少存在一个聚点（有穷或无穷），这就是点集的列紧性．但一族函数就未必具有上述性质．本世纪初，P. Montel 引进了正规族的概念．他把具有某种列紧性的函数族称为正规族，并且利用模函数建立了判定函数族正规的一个基本定则：“设 $\{f(z)\}$ 为区域D内一全纯函数族，若对于族中每个 $f(z)$ 在D内恒有 $f(z)\neq 0,1$，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规．”值得注意的是这个定则把函数族的正规性与函数的取值问题联系了起来．Nevanlinna 理论的产生促进了正规族理论的深入发展．在应用 Nevanlinna 基本定理重新证明了上述正规定则后不久，C. Miranda 又使用Nevanlinna理论证实了P. Montel 的如下重要猜想：“设 $\{f(z)\}$ 为区域D内一全纯函数族，若对于族中每个$f(z)$在D内恒有$f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规．”人们称此为 Miranda 定则．该定则的重要意义在于它把函数族的正规性与函数的导函数的取值问题联系了起来，从而开辟了正规族理论的新的研究领域．近年

来，自从作者把 Miranda 正规定则推广到亚纯函数族的情形后，关于亚纯函数族正规定则的研究，在我国颇为活跃．到目前为止，有关全纯与亚纯函数族的正规定则的 Hayman[2] 猜想已全部被证实，其中不少是我国数学工作者的成果．

正规族理论内容丰富，本书[1)]着重介绍正规定则的研究，其中包含了Hayman提出的关于正规定则猜想的全部证明．第一章简要介绍Nevanlinna理论的基本内容．第二章论述全纯函数族的正规定则，包含了 Montel、Miranda 及由 G. Valiron、庄圻泰和作者推广了的正规定则，还包含了涉及重值的正规定则．第三章介绍亚纯函数族的正规定则，其中所建立的正规定则绝大部分是属于我国数学工作者的工作．第四章研究对应于正规定则的奇异方向的存在性问题．需要特别指出的是，这一研究领域具有我国的特色．它首先由杨乐着手研究，这方面的成果都是近年来国内数学工作者的工作．

对于本书的主要部分（即前三章），只要读者具备大学课程中复变函数方面的知识就可阅读．

书中一定存在不少错误，敬请读者批评指正．

顾永兴

1988年6月

1）本书部分内容的撰写及本书初稿的修改，得到国家自然科学基金的资助．

目　　录

第一章 Nevanlinna基本定理

§1.1 Poisson-Jensen公式与特征函数

我们先给出 Poisson-Jensen公式，它在建立Nevanlinna基本定理时起着重要的作用.

定理1.1 设$f(z)$为圆$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$内的亚纯函数且不恒为零，又设$f(z)$在$|z|<\rho(0<\rho<R)$内的零点为$a_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,h)$，极点为$b_\mu$ ($\mu=1,2,\cdots,k$)，其中每一零点或极点出现的次数与其级相同，则当$|z|<\rho$时，有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|+\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{b_\mu}z}{\rho(z-b_\mu)}\right| \tag{1.1}$$

证明 我们区分两种情形.

(1) 在圆周$|z|=\rho$上$f(z)$没有零点及极点. 置

$$F(z)=f(z)\cdot\frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{1.2}$$

其中

$$P(z)=\prod_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z},\qquad Q(z)=\prod_{\mu=1}^{k}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b}_\mu z}. \tag{1.3}$$

显然，$F(z)$在$|z|<R$内亚纯而在圆$|z|\leqslant\rho$上$F(z)\neq0$，∞，且当$|z|=\rho$时，

$$|F(z)|=|f(z)|. \tag{1.4}$$

于是，$\log|F(z)|$在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上调和，根据 Poisson 公式，当$|z|<\rho$时，

$$\log|F(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(\rho e^{i\varphi})|R_e\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi \tag{1.5}$$

由（1.4）、（1.2）及（1.5）式，即得（1.1）式.

（2）在圆周$|z|=\rho$ 上 $f(z)$有零点或极点. 此时（1.1）式中的积分为广义积分. 设 $f(z)$在$|z|=\rho$ 上的零点为 $\rho e^{i\theta_1}$, $\rho e^{i\theta_2}$，…，$\rho e^{i\theta_s}$，极点为 $\rho e^{i\varphi_1}$，$\rho e^{i\varphi_2}$，…，$\rho e^{i\varphi_t}$. 显然，存在 ρ_1、ρ_2：$0<\rho_1<\rho<\rho_2<R$ 使得当 $\rho_1<|z|<\rho_2$时，

$$f(z)=\left\{\prod_{k=1}^{s}(z-\rho e^{i\theta_k})\right\}\times\left\{\prod_{j=1}^{t}(z-\rho e^{i\varphi_j})\right\}^{-1}\times g(z), \tag{1.9}$$

其中 $g(z)$在 $\rho_1<|z|<\rho_2$内全纯且无零点. 由此并注意到公式

$$\left|\log|e^{i\theta}-1|\right|=\log\frac{1}{|e^{i\theta}-1|}\leqslant\log\frac{2}{\pi}+\log|\theta|$$

$$\left(0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$$

可知（1.1）式中的广义积分是有意义的. 现在再证（1.1）式当$|z|<\rho$ 时仍成立. 任取定点 z：$|z|<\rho$ 且 $z\neq a_\lambda, b_\mu$. 再任取值

$r<\rho$，使$|z|$、$|a_\lambda|$及$|b_\mu|$均小于 r ($\lambda=1,2,\cdots,h,\mu=1,2,\cdots,k$)．根据情形（1），有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})| Re\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right) d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{r^2-\bar{a}_\lambda z}{r(z-a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\mu z}{r(z-b_\mu)}\right| \qquad (1.7)$$

在上式中令$r\to\rho$并注意到关系式

$$\left|\log|te^{i\theta}-1|\right| < \frac{1}{\log|e^{i\theta}-1|} + \log 2 \quad \left(0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{3},\ 0<t<1\right),$$

即得（1.1）式．至此定理证毕．

当 $f(0)\neq 0$，∞时，在（1.1）式中令 $z=0$ 就得

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}. \qquad (1.8)$$

公式（1.8）称为 Jensen 公式．

下面将 Jensen 公式变形．为此引进一些记号．

定义1.1

$$\log^+ x = \begin{cases}\log x, & x\geqslant 1, \\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

我们称 $\log^+ x$ 为 x的正对数．显然当 $x>0$ 时，$\log x = \log^+ x - \log^+\frac{1}{x}$．于是

$$\log|f| = \log^+|f| - \log^+\left|\frac{1}{f}\right| \qquad (1.9)$$

我们用 $n(r,\frac{1}{f})$ 及 $n(r,f)$ 分别表示 $f(z)$ 在圆 $|z|\leq r(0\leq r<R)$ 上的零点个数及极点个数（一个 m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点）．因

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_{r_0}^{\rho}\left(\log\frac{\rho}{t}\right)dn\left(t,\frac{1}{f}\right),$$

其中 r_0 为一适当小的正数．再利用分部积分，就有

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_{0}^{\rho}\frac{n(t,1/f)}{t}dt. \tag{1.10}$$

同理

$$\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}=\int_{0}^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}dt. \tag{1.11}$$

利用（1.9）、（1.10）及（1.11）式，Jensen 公式（1.8）可改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,1/f)}{t}dt+\log|f(0)|. \tag{1.12}$$

在（1.12）式中我们假定了 $f(0)\neq0$，∞。若 $z=0$ 为 $f(z)$ 的零点或极点，则在 $z=0$ 的某邻域内，有

$$f(z)=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots\qquad(c_s\neq0) \tag{1.13}$$

若令

$$g(z)=z^{-s}f(z),$$

则 $g(z)$为$|z|<R$ 内的亚纯函数，且 $g(0)=c_s\neq 0,\infty$. 另外

$$n(r,\frac{1}{g})=n(r,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f}),\quad n(r,g)=n(r,f)-n(0,f),\tag{1.14}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-s\log\rho,\tag{1.15}$$

$$s=n(0,\frac{1}{f})-n(0,f).\tag{1.16}$$

应用（1.12）式于$g(z)$，再利用（1.9）、(1.14)、(1.15)及（1.16）式，就得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,1/f)-n(0,1/f)}{t}dt+n(0,\frac{1}{f})\log\rho+\log|c_s|.\tag{1.17}$$

这是 Jensen 公式的一般形式，它包含了（1.12）式.

定义1.2 $$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi,$$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,\infty)$，$m(r,\frac{1}{f-a})$ 也记为 $m(r,a)$.

$$N(r,f)=\int_0^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log r,$$

$N(r,f)$ 称为$f(z)$的极点的密指量，也记为 $N(r,\infty)$. $N(r,\frac{1}{f-a})$

称为 $f(z)$的a-值点的密指量，也记为 $N(r,a)$.

于是 Jensen 公式（1.17）可写为

$$m(r,f)+N(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \qquad (1.18)$$

定义1.3 $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$.

R.Nevanlinna 称 $T(r,f)$为函数$f(z)$的特征函数. 这样，Jensen 公式又可写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \qquad (1.19)$$

以下我们指出 $T(r,f)$的几个性质. 为此先证明公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a| \qquad (1.20)$$

其中a为任意一个复数.

事实上，若 $a=0$，（1.20）式显然成立. 今设 $a\neq 0$，并考虑 $\varphi(z)=a-z$. 根据（1.8）式，

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|d\theta \quad (|a|\geqslant 1),$$

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta-\log\frac{1}{|a|} \quad (|a|<1).$$

由此即得（1.20）式.

根据（1.20）式及 Fubini 积分交换定理，我们可给出 Cartan[1] 恒等式：

定理1.3 设 $f(z)$在$|z|<R$ 内亚纯且 $f(0)\neq\infty$，则当$0<r<R$时，

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log^+|f(0)|. \qquad (1.21)$$

证明 应用（1.12）式于函数 $f(z)-e^{i\theta}$，其中θ为一实数使

$e^{i\theta}\neq f(0)$，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi=N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})-N(r,f)$$
$$+\log|f(0)-e^{i\theta}|.$$

在上式中固定 r，并对 θ 求积分，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})-e^{i\theta}\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta$$
$$-N(r,f)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta \tag{1.22}$$

而由（1.20）式及积分交换定理，可有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi=m(r,f),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|f(0)|.$$

将这二式代入（1.22）即得（1.21）式.

若 $z=0$ 为 $f(z)$的 s 级极点，则应用（1.16）式有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi=N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})-N(r,f)$$
$$+\log|c_{-s}|,$$

其中 c_{-s} 为（1.13）式中的系数.

仿上，得公式

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log|c_{-s}|. \tag{1.23}$$

从（1.22）与（1.23）式，我们可得到特征 函数 $T(r,f)$ 的如下性质：

定理1.4 设 $f(z)$在$|z|<R$内亚纯，则 $f(z)$ 的 特 征 函 数 $T(r,\ f)$ 为 r 的非减函数，且为 $\log r$ 的凸函数.

证明 根据（1.22）及（1.23）式，我们只需证明 $N(r,g)$ 为 r 的非减函数，且为 $\log r$ 的凸函数，其中 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-e^{i\theta}}$，$\theta$任意固定. $N(r,g)$ 的非减性是显然的. 现证明 $N(r,g)$ 为$\log r$ 的凸函数. 任取 r 的三个值 r_1、r_2、r_3，使 $0<r_1<r_2<r_3<R$，我们有

$$\begin{aligned}N(r_2,g)-N(r_1,g)&=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,g)-n(0,g)}{t}dt+n(0,f)\log\frac{r_2}{r_1}\\&=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,f)}{t}dt\leqslant n(r_2,f)\log\frac{r_2}{r_1}.\end{aligned}$$

同理

$$N(r_3,f)-N(r_2,\ f)\geqslant n(r_2,f)\log\frac{r_3}{r_2}.$$

由上面两式，可得

$$N(r_2,g)\leqslant\frac{\log\dfrac{r_3}{r_2}}{\log\dfrac{r_3}{r_1}}N(r_1,g)+\frac{\log\dfrac{r_2}{r_1}}{\log\dfrac{r_3}{r_1}}N(r_3,g).$$

这表明 $N(r,g)$ 为$\log r$ 的凸函数.

下面再给出特征函数的几个不等式. 我们先指出关于正对数

的几个性质. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 为任意 p 个有穷复数，则

$$\log^+|a_1a_2\cdots a_p| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|, \tag{1.24}$$

$$\log^+|a_1+a_2+\cdots+a_p| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j| + \log p \tag{1.25}$$

事实上，当 $|a_1a_2\cdots a_p|<1$ 时，(1.24) 式显然成立. 当 $|a_1a_2\cdots a_p|\geqslant 1$ 时，

$$\log^+|a_1a_2\cdots a_p| = \log|a_1a_2\cdots a_p| = \sum_{j=1}^{p}\log|a_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|,$$

故 (1.24) 式同样成立. 另外，

$$\begin{aligned}\log^+|a_1+\cdots+a_p| &\leqslant \log^+(|a_1|+\cdots+|a_p|)\\ &\leqslant \log^+(p\cdot \max_{1\leqslant j\leqslant p}|a_j|)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j| + \log p.\end{aligned}$$

这表示 (1.25) 式也成立.

从 (1.24) 与 (1.25) 式，我们可得

定理1.5 设 $f_j(z)$ $(j=1,\cdots,p)$ 为圆 $|z|<R$ $(0<R\leqslant\infty)$ 内 p 个亚纯函数，$f_j(0)\neq\infty$ $(j=1, \cdots, p)$，则

$$T(r,f_1f_2\cdots f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p}T(r,f_j) \quad (0<r<R), \tag{1.26}$$

$$T(r,f_1+\cdots+f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p}T(r,f_j) + \log p \quad (0<r<R). \tag{1.27}$$

证明 根据 (1.24) 及 (1.25) 式，