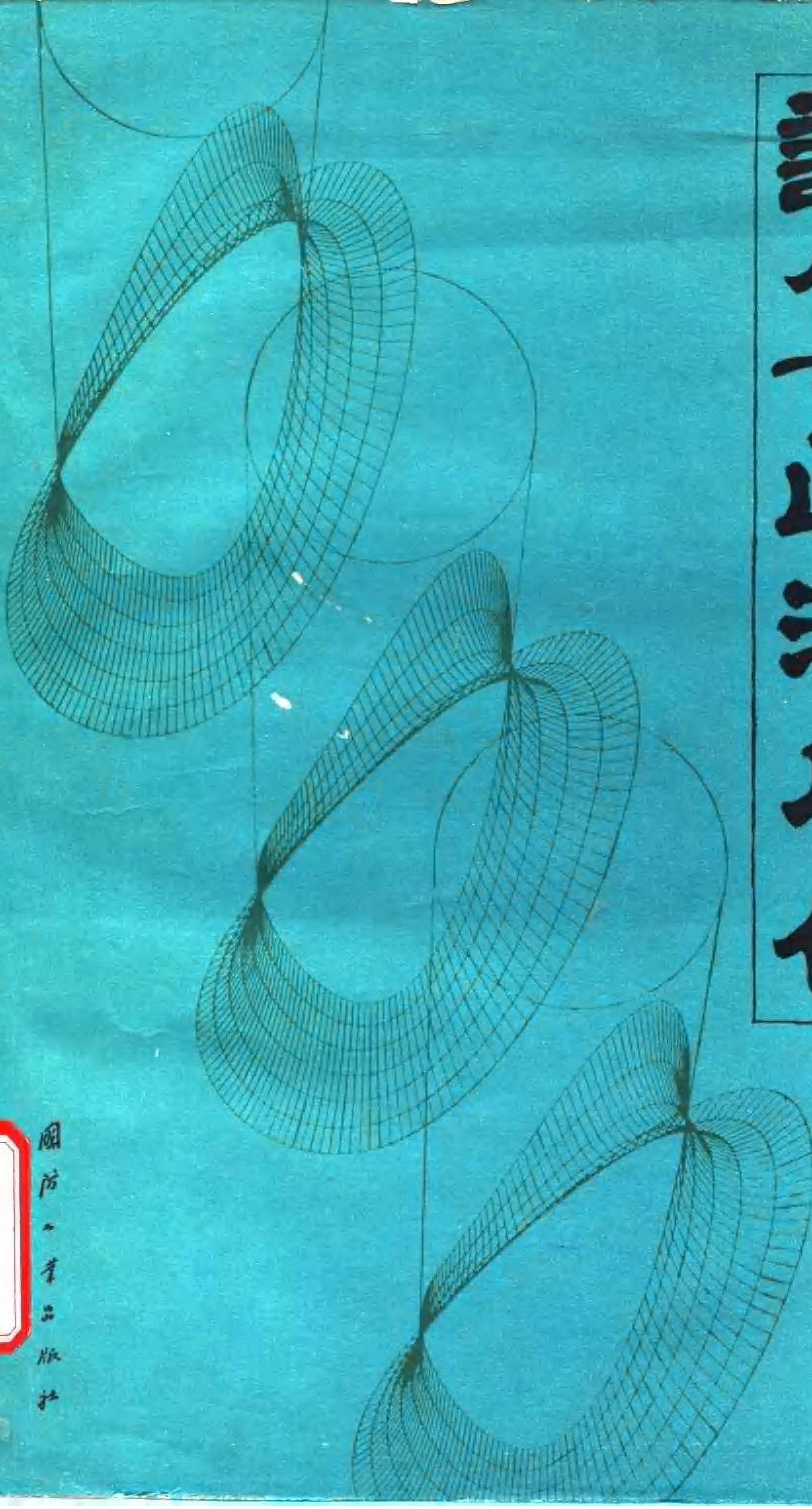
計算画法几何



汪保华 著

国防工业出版社

内容简介

本书共分七章，第一章介绍画法几何方法在计算技术中的发展情况、应用方法和特点；第二章将主要的平面图形的几何模型作简单的罗列，作为以后讨论的基础；第三章介绍基本空间图形的画法几何模型，其目的是阐明一些概念，这些概念的发展成为下一章曲面和空间曲线画法几何模型的基础；第四章主要介绍曲面的分类及空间图形相关（相交、相切、垂直、等距）的画法几何模型；第五章介绍可展曲面展开和非可展曲面近似展开的画法几何模型，为了对曲面的可展性进行定性定量的判别，这里阐述非规则曲面的总曲率数值计算的画法几何模型；第六章介绍画法几何模型在空间曲线、平面立体、曲面立体几何造型中的应用，本章最后部份是画法几何方法在优化领域中的实例；第七章阐述空间几何图形的光顺和图示。

本书可供计算机图学、画法几何学及造船航空、机械、化工、建筑等有关专业的研究所、设计院、工厂、大专院校师生阅读。

计算画法几何

汪保华 著

*

国防工业出版社出版、发行

（北京市车公庄西路老虎庙七号）

新华书店经售

北京市卫顺排版厂排版 印装

*

787×1092 1/16 印张 15 344千字

1990年5月第一版 1990年5月第一次印刷 印数：00,001—1950册

ISBN7-118-00186-4/O·12 定价：6.20元

出版说明

近年来，汪保华工程师综合画法几何理论和计算程序设计技术，提出“计算画法几何学”这一理论，使之成为工程图学和计算技术结合与发展的新学科。所著《计算画法几何》一书其内容源出于设计、生产实践，书中结合了图学理论、计算机程序设计和专业技术，阐明计算几何学基本理论和实际应用，反映出工程图学理论在应用技术领域里的最新成果。

为了普及和应用这方面技术，作者曾在不同学术会议及技术讲座中进行推广，并得到好评。这次该书出版，我们相信，对工程技术人员、图学工作者及大专院校有关师生，特别对从事各种复杂空间形体的设计制造、加工工艺和计算机应用人员会起到一定指导作用。同时，对今后“计算画法几何学”的发展具有一定意义。

中国工程图学学会应用图学专业委员会
上海市工程图学学会

目　录

关于专用符号的说明

除了常用符号之外，本书也用到少量专用符号，特作简要说明如下：

几何图形的符号见表0.1。

表 0.1

几何图形分类	符号	几何图形在基准投影面上的投影			几何图形的迹点或迹线			几何图形相对于投影面的倾角			几何图形的展开形状
		H	V	W	H	V	W	H	V	W	
点	P	p	p'	p''							P*
线	Γ	Γ	Γ'	Γ''							Γ*
直线	S	S	S'	S''	F_H	F_V	F_W	α_S	β_S	γ_S	S*
圆	C	C	C'	C''							C*
曲线	Q	Q	Q'	Q''							Q*
面	Σ	Σ	Σ'	Σ''							Σ*
平面	T	T	T'	T''	S_H	S_V	S_W	α_T	β_T	γ_T	T*
曲面	G	G	G'	G''							G*

几何图形的相关符号见表0.2。

表 0.2

分类	符号	例	说明
两几何图形重合	≡	$S_1 \equiv S_2$	直线S_1，S_2重合
一个几何图形由其它几何图形（或数值）定义	$X:(X,X)$ 或 $X:\{X_x\}$	$S:(p_1,p_2)$	表示通过点列p_1，p_2的直线S
		G:{Q_i} ($i=1,\cdots,n$)	表示通过曲线族{Q_i}($i=1,\cdots,n$)的光滑曲面G
		T:(a,b,c,d)	表示方程式为$ax+by+cz+d=0$的平面T
		T:(S_H, S_V, S_W	表示迹线为S_H,S_V,S_W的平面T
		T:(P_1,P_2,P_3)	表示通过三点P_1,P_2,P_3的平面T

（续）

分类	符号	例	说明
两几何图形相切	$X\overset{\times}{\underline{\circ}}X$	$T\overset{P}{\underline{\circ}}G$	表示平面T切曲面G于P点
		$G_1\overset{Q}{\underline{\circ}}G_2$	表示曲面G_1，G_2切于曲线Q
两几何图形的距离	$\overline{XX}$	$\overline{PT}$	表示点P到平面T的距离
		$\overline{S_1S_2}$	表示直线S_1，S_2的距离
两几何图形垂直	$X\overset{\times}{\perp}X$	$S\overset{P}{\perp}G$	表示直线S为曲面G上点P的法线
		$T\overset{P}{\perp}S$	表示平面T垂直直线S，垂足为P
两几何图形的夹角	$\angle XXX$	$\angle S_1pS_2$	直线S_1，S_2的夹角，$p=S_1\cap S_2$
		$\angle T_1ST_2$	平面T_1，T_2的夹角，$S=T_1\cap T_2$
曲线上两点的弧长	$\overset{\frown}{XX}$	$\overset{\frown}{p_1p_2}$	曲线上两点p_1，p_2的弧长

有关型线的代号见表0.3。

表 0.3

名称	代号	说明
中线	CL	V面和曲面的交线及其投影
水线	WL	平行H面的水平面和曲面的交线及其投影
纵剖线	BL	平行V面的纵剖面和曲面的交线及其投影
横剖线	SL	平行W面的横剖面和曲面的交线及其投影

第一章　计算技术中的画法几何方法引言

1.1　为什么画法几何方法在计算技术发展过程中得到重视

1.1.1　画法几何方法的发展经历了曲折的过程

古典画法几何方法在它发展的初期就显示了强盛的生命力，以它独特的图解和图示方法，使很多复杂的空间形体问题得到简捷的，有相当精度的解。当然这种方法在应用的过程中也暴露出一些问题，其中最主要的是画法几何的降维方法本质上是一种离散化的手段，它用线族描述曲面，用点列描述曲线，画法几何方法不可能对被描述的对象建立起一个整体的连续的模型。其次，手工图解法的精度较低，速度较慢，不符合高精度的要求，也不适用于高速度或大量作图的场合。

随着数学解析方法的不断完善和计算技术的不断发展，画法几何方法在科学运算上是否还能保持一定的地位，就成为一个问题，特别是解析方法和数据结构理论相结合，在离散点的拟合光顺、曲面的造形、隐藏线消除等领域中[1][2][3]取得了重大成果之后，于是自然地产生了一种观点，认为：画法几何作为一种古典的方法，只能作为指导图板作图的理论，它并不能有效地变换成计算机算法，也不能以适当的方式利用计算机的运算能力。这种观点的实质是在画法几何学和计算机之间筑起一条鸿沟。作为一种代表性的思想，它反映在很多方面：

在大学工程专业，仅仅将画法几何作为指导"画法"的理论，而其他很多有关计算机和数学的专业都不开设画法几何课程，这是其一；

在求解复杂的空间问题而需要用计算机作为工具时，往往摒弃图解的方法（认为这是计算机不能接受的），设法推导其解析式（认为这是唯一的途径），事实上这样的努力有时会导致问题的复杂化，这是其二；

认为画法几何应该取消而代之以空间解析几何，这是其三；

还有很多表现形式，就不一一例举了。

1.1.2　画法几何方法为什么有了转机

随着计算技术的飞跃发展，很多专题的研究不断深化，需要用计算机解决各种非规则曲面的生成、光顺、相关、近似展开等问题。这些问题广泛涉及到模糊概念（例如光顺和可展性判别的概念等），而且大量的曲面都是通过模拟试验（例如船体曲面、螺旋桨曲面）得来的。这些曲面往往是由截面交线（截平面或截柱面）来定义，这些截交线又是用离散点列来定义，要完整地用解析的方法处理这些问题，目前还存在相当困难。为此，广大的专业工作者和计算机软件工作者往往用图解和解析相结合的方法进行处理，例如用剖面线族的光顺性和疏密变化来判别曲面的光顺性；用图解近似测地线来作为曲面展开的基准；用截柱面交线族来定义螺旋桨曲面并据此确定各点的法线方向以作为数控加工的依据等等。

在大量计算机实践和专业实践的过程中，我们深深感觉到，画法几何方法是能够和计算技术密切结合的，而且画法几何的离散化的处理方法恰好与计算机的特点相一致，这是因为计算机不管是硬件还是软件，都是离散的结构，它的基本信息单位是离散的，有限的，计算机本身并不能进行连续的数值运算，计算机科学的研究对象大都呈离散形式[3]。计算机数值运算的高速度和高精度又能弥补手工图解方法的不足。所以在处理复杂曲面及其它有关问题上，画法几何方法的"缺点"朝相反的方向转化为突出的优点。在计算技术飞跃发展的今天，画法几何方法必然会有很大的发展，有必要给予"古典"的Monge模型以新的认识。

画法几何和计算机结合形成一门学科，不仅可以广泛应用于造船、海洋工程、航空、机械、化工、水利、建筑等涉及空间形体的工程、设计领域，而且对计算机辅助几何设计、图学理论、图学教育、图学标准等领域都会有深刻的影响。

1.2 画法几何方法在计算技术中的应用方式——画法几何模型

1.2.1 画法几何模型的由来和计算画法几何的定义

要用计算机处理某一个复杂的空间形体问题时，我们往往采用两种（主要的）不同的对策：

第一、改进数学模型，使之能更好地适应被研究的对象，象数学船型的探索即为其典型实例[ ]；

第二：对被研究的对象进行改造，使之更适合于建立数学模型。分析各种对象用画法几何的形体分析方法和降维方法抽象其本质的几何属性（从个性中抽象出共性的规律），建立直接或间接的画法几何模型就是这种对策的重要手段。

经过了画法几何模型的抽象以后，可以直接调用现成的标准子程序，使计算方法简化。

计算画法几何是一门综合了专业技术、图学理论和计算机程序设计等的边缘学科。

可以给"计算画法几何"下这样的定义：

"用画法几何方法对几何图形信息的计算机表示、分析和综合"。

1.2.2 画法几何模型和数学模型的关系

在计算技术中应用画法几何模型需要相应的软硬件作为支持。如果能够方便地调用现成的子程序以及快速地高精度地实现图象输出，则画法几何模型的优越性就能充分体现出来，如果不具备这些条件，一切都要从头准备起，也就谈不上什么优越性了。

与画法几何模型直接有关的数学模型是指二维平面内的基本几何图形（直线、圆、曲线）的生成，曲线的光顺，几何图形的相关（相交、相切、垂直、等距……）和变换的几何模型（即本书第二章所介绍的内容）。

根据画法几何模型编制程序时，应该充分发挥程序的盒子功能。也就是说，可以把数学模型看成是一个暗盒子，从盒子的一端输入某些信息，从盒子的另一端取得输出的信息，我们只要知道这只盒子的功能和输入输出接口的情况就可以使用这个盒子。至于这个暗盒子内部的构造（通过什么样的模式达到这种功能）是可以不去管它的。

这样，画法几何模型和数学模型之间有分工也有配合。它们两者都可以不断地改进，只要各个基本程序的出入口相同，这样的改进不仅不会造成程序设计的困难，而且将会使整个系统的质量得到提高。

工程技术人员和图学工作者可以将（二维平面的）有关的数学模型作为工具去处理三维或多维空间的曲面相关、曲面造形、曲面光顺及其它复杂的空间问题。这样就可能将数学工作者的研究成果以更通俗的易于接受的形式——直观的图形加以普及和推广。

1.3 画法几何模型在计算技术中的应用方式分类

画法几何模型在计算技术中的应用大致上有三种方式，现分述如下：

1.3.1 第一方式——第一级间接模型

流程图如下：

计 算 机 ←→ 数学模型 ←→ 画法几何模型 ←→ 实际模型

船体曲面的光顺即为其例（参阅本书第七章），我们用形体分析的方法，将实际的复杂船体曲面分解为若干种基本曲面，对它们的形成原理、定义方法、光顺步骤、图示特点、配伍性能等因素作出分析后，建立画法几何模型，将复杂的实际对象化整为零、化难为易，通过延伸使边界尽可能简化，采用合理的光顺方法，提高了原来的数学样条光顺曲面的能力。在这里，画法几何模型作为联系实际模型和数学模型的桥梁，它起着第一级间接模型的作用。

1.3.2 第二方式——第二级间接模型

流程图如下：

计 算 机 ←→ 数学模型 ←→ 画法几何模型 ←→ 其它几何模型 ←→ 实际模型

非规则曲面的总曲率的近似计算即为其实例，要合理地准确地展开船体外板并有效地利用板材，必须对船体表面进行总曲率的定量计算并给出外板曲面上的正交测地线。为此，要建立相应的微分几何模型（作为第一级间接模型），但是用微分几何方法确定（由离散点定义的）非规则曲面的总曲率是很困难的。这就可以用画法几何方法建立第二级的间接模型。经过画法几何的降维处理，使曲面离散化，而总曲率的数值运算和侧地线位置计算，也就能方便地实现了（参阅本书5.3.3.2）。

作为第一级的几何模型还有直观几何的（例如最佳胎架的最小外接平行平面的几何模型，参阅本书6.7.2），仿射几何的（锚附体的理论对称平面的几何模型，参阅本书6.2.1.2）等等。

1.3.3 第三方式——直接模型

流程图如下：

计 算 机 ←——→ 画法几何模型 ---→ 实际模型

以钻井平台导管架的管件坡口曲面为例（参阅本书6.3.2)，这种曲面由于工艺规程的特殊需要，因此具有比较复杂的外形。要确定其几何信息，必须进行相应的计算。解决这个问题可以先对实际模型作形体分析，建立画法几何模型，然后用空间解析几何的方法建立数学模型（按第二方式)，但也可以用画法几何的方法，根据曲面生成的有关几何概念直接编制算法程序，而不推导具体的计算公式，此法具有明显的图学特色，使编程的工作大为简化。

应该指出：在计算技术中的画法几何模型，不仅往往是数学模型的先导，而且作为一种描述几何它可以直接作为编制程序的依据，因此更具有算法几何(或称为计算几何)的意义。

按画法几何模型编制程序是一种比较容易掌握的方法，为了使读者对此有进一步的印象，本书选择一个例子用Fortran语言作简单分析（见本书6.5.3)。

1.4 画法几何模型的特点

画法几何模型的特点可以归纳为四个方面：

第一、定义确切。通过对被研究对象的几何改造和必要的边界预处理，使几何模型的输入信息更为简单，并有可能做到规范化。

第二、概念清晰。按画法几何模型编制的算法程序有比较确切的直观的几何意义。因此这种程序具有较好的可读性，编制程序也比较方便，容易排除故障，便于程序的维护和推广，特别适用于工程技术人员和图学工作者。

第三、计算方便。由于采用画法几何模型，往往可以根据有关的几何概念直接编制程序，或是调用库存的现成标准子程序。通过画法几何的方法可以使一个复杂的问题化整为零，化难为易。因此，画法几何模型是软件结构化设计[6]的重要手段。

第四、结果可靠。由于画法几何模型以提高输出结果的准确性为宗旨，在设计模型时就考虑客观实际的需要，因此所得结果比较合理，对于人机交互设计，则尤为合适。

张几何一

第二章　平面图形的几何模型

本章讨论的平面图形仅包括（位于二维平面上的）点、直线、圆、曲线（泛指一切光滑的曲线）。主要分析下列三方面问题：

平面图形的定义——原始信息；

原始信息的处理——几何运算；

处理后的结果——信息的输出。

这里仅仅将有关的内容作简单的罗列，并不介绍具体的运算过程也不计较它们的逻辑顺序。它们是以后讨论的各章的基础。

2.1　平面图形准确性问题概述

2.1.1　理论图形和实际图形

平面图形分成理论图形和实际图形两种，理论图形是指几何的点、线（直线、圆、曲线）；实际图形是指客观上存在的实际的点、线。图2.1表示实际图形的模式图。

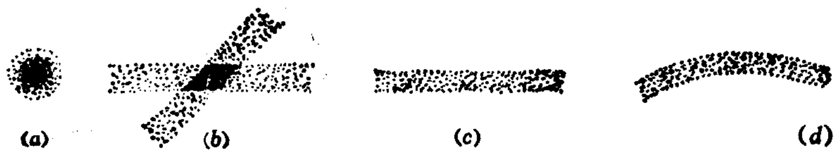


图 2.1　实际图形的模式图

(*a*) 实际点的模式图；(*b*) 实际直线交点的模式图；
(*c*) 实际直线段的模式图；(*d*) 实际圆弧段的模式图。

实际的点是有大小的，实际的线是有粗细的，这受到绘图工具精度的限制，将实际的点和线放大后可以看出：它们是由一些很小的点组成，这些点大致上有一定的边界范围。实际图形越是不准确，边界范围就越大。

2.1.2　造成几何抽象不准确的原因分析

将实际图形抽象为理论图形的过程中造成不准确的原因主要是：

第一、实际图形自身不准确；

第二、测量过程中存在误差；

第三、如果实际图形是曲线，则曲线拟合过程中存在着误差（不同的算法所拟合的曲线其结果并不相同）；

第四、如果采用双圆弧逼近数学样条，则这样的处理也存在误差；

第五、由于计算精度而引起的误差。

由此可见，实际图形抽象为理论图形的过程中不可避免地存在着误差，这种误差作用于计算机运算的全过程，并对输出的结果起着重要的影响。

2.1.3 提高平面图形几何抽象准确性的注意事项

2.1.3.1 实际点作几何抽象的注意事项

从图2.1中可以看出，相交两线的夹角和实际点的边界范围的大小有很大的关系。夹角越接近垂直，实际点的边界范围越小；夹角越趋近于零，实际点的边界范围越大。

为了便于说明问题，我们将两实际线（直线或曲线）的夹角变化范围分成四个区域，并对各区域内交点的准确性进行分类，见图2.2。

在运算的过程中应该尽量避免采用准确性差的交点。

2.1.3.2 实际直线作几何抽象的注意事项

实际直线作几何抽象时应该尽量采用距离远的点，因为在确定的几何点之外的理论直线的延伸部分有可能偏离实际直线，请参阅图2.3(a)。

2.1.3.3 实际圆作几何抽象的注意事项

用三个很接近一直线的点定义圆弧段时，则圆心不准确，可以作出很多理论圆都通过这三个实际点，在这三点所表示的圆弧段内，理论圆能够描述实际圆弧，但在这三点之外的部份，就存在着误差（参阅图2.3(b)）。

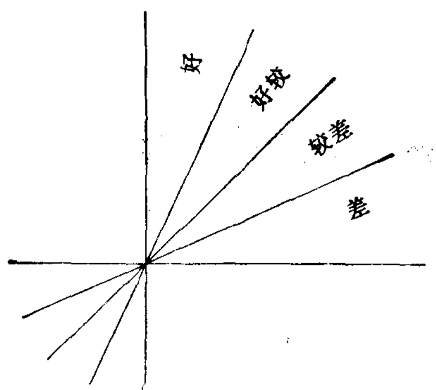


图 2.2 两直线交点准确性分类示意图

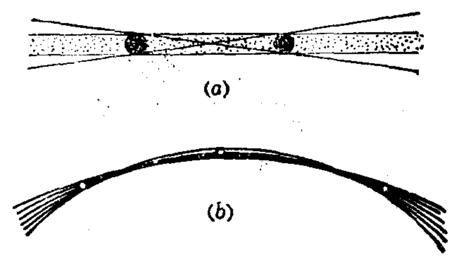


图 2.3 实际直线和实际圆弧的几何抽象

2.1.3.4 实际曲线作几何抽象的注意事项

将实际曲线上的若干点的位置作几何抽象，然后用一定的算法将这些理论点拟合成理论曲线的过程即为实际曲线的几何抽象。

曲线的拟合分成两种情况：

第一、光滑性拟合。在拟合的过程中通过全部给定的点列；

第二、光顺性拟合。在拟合的过程中，按照一定的几何条件，对部份给定点的位置作出调整。

这两种拟合的方式所需要的原始信息有所不同，请参阅表2.1。

表 2.1

拟合性质	信息分类	原始信息
光滑性拟合	必要信息	点列的位置
	附加信息	两端点的切线方向

(续)

拟合性质	信息分类	原始信息
光顺性拟合	必要信息	点列的位置
	附加信息	两端点的切线方向
		拐点数
		固定点(在光顺时不准修改的点)两端部曲线的弯向

各种不同的生成曲线的方法所允许的附加信息是不同的，这里就不作详述了。无论是那一种拟合方式，实际曲线在作几何抽象时应注意：

第一、点列应该有足够的准确性。我们往往用平行线族和曲线的交点来定义曲线，应该采用准确性好(较好)的交点。如图2.4(a)的例子就应该采用y轴平行线的交点来定义曲线；如图2.4(b)的例子即为错误的定义方式；如图(c)的例子，应该采用两组不同位置的正交网格和曲线的交点来定义，对于不准确的交点，应该剔除。

第二、点列的间距应尽量均匀，必要时应删去近点。

拟合曲线时，如果仅根据必要信息，则靠近曲线的两端部，总是不易控制其形状。为了提高曲线两端部的准确性，可采取下列对策：

在曲线的两端部作局部加密（这样的处理只能减少不准确区域的范围）；

给出曲线两端的切线方向；

在曲线的延伸部份给出虚拟点的位置，利用这些虚拟点来控制曲线的弯向，将曲线的不准确区间移到实际首末点之外。

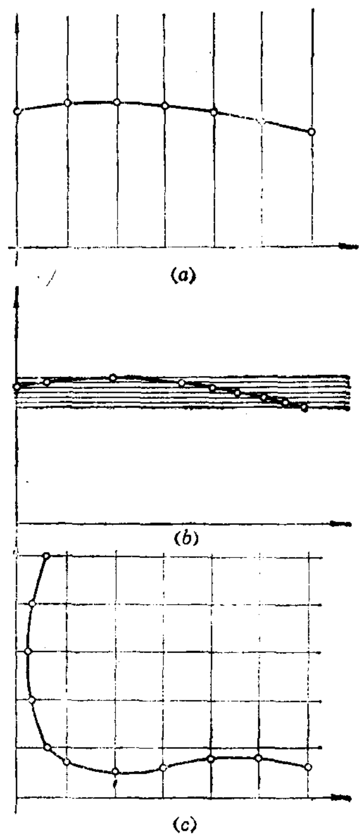


图 2.4　曲线的定义

2.2　平面曲线光顺的几何意义

2.2.1　平面曲线光顺性概述

平面曲线的光顺性就是指平面曲线具有光滑、顺眼的性质。光滑顺眼依赖目测判别，由于目测判别具有很大的主观随机性，所以光顺性是一个模糊概念。但是有经验的不同的观察者对曲线的光顺性往往能得到比较一致(不是完全一致)的评价，这说明光顺性的判别还是有一些客观的依据，这些依据（几何条件）在下面简单分析。

2.2.2 平面曲线光顺性的几何条件

从图学的角度出发，我们认为光顺的平面曲线具有下列几何性质，这些几何性质可以作为平面曲线光顺的几何条件：

第一、曲线的切线连续(曲线具有光滑性)；

第二、曲线没有局部的波动，不出现多余的拐点，曲线的两端部弯向符合要求；

第三、曲线各部份曲率变化协调（协调也是一个模糊概念），所谓曲率变化协调就是指曲线各段曲率变化符合设计要求，不出现不应有的曲率突变现象。

应该指出：目测光顺的曲线并不要求曲率变化连续，例如分段圆弧所描述的曲线可能具有很好的光顺性，显然在分段连接处的曲率是跳跃的，只要这种跳跃不出现不适当的曲线臌瘪，就可以认为曲率变化协调。

以上介绍的光顺性的三个几何条件根据（曲线光顺性拟合的）不同的数学处理方法要作相应的调整和补充。

2.2.3 平面曲线光顺的注意事项

第一、平面曲线作光顺性拟合时必须符合附加信息的要求，如不给出附加信息，则对局部小波动及曲率变化的不协调作修改；

第二、光顺后的曲线和原始点的偏离尽量小。

要同时做到这两点，则给定的各种原始信息必须互相协调，固定点要尽量少，点列的总的弯曲趋势和给出的拐点数、曲线两端的切线方向等等要取得一致，如果给定的原始信息不适当，则光顺后的曲线和原始点必定有较大的偏离。

2.3 平面图形的几何模型分类

2.3.1 几何图形的生成

几何图形的生成列于表2.2。

表 2.2

编号	分类	原始信息	几何运算	结果	备注
〔2.3.1.1〕	生成点	x, y	—	$p:(x, y)$	$x=\overline{py}$ $y=\overline{px}$
〔2.3.1.2.1〕	生成直线	p_1, p_2	—	$S:(a, b, c)$	$S:(p_1, p_2)$
〔2.3.1.2.2〕		p, α			α 为S的水平倾角
〔2.3.1.3.1〕	生成圆	$p, C:(xc, yc)$ r	—	$C:(xc, yc, r)$	pc 为圆心
〔2.3.1.3.2〕		p_1, p_2, p_3			$C \ni p_1, p_2, p_3$
〔2.3.1.3.3〕		p_1, p_2, r		$C_1:(x_1, y_1, r)$ $C_2:(x_2, y_2, r)$	若只要某一结果应附加判别信息