现代数学基础丛书

二阶椭圆型方程与椭圆型方程组

陈亚浙 吴兰成 著

科学出版社

现代数学基础丛书

二阶椭圆型方程与椭圆型方程组

陈亚浙 吴兰成 著

科学出版社
1991

内 容 简 介

本书是作者根据1985年在南开数学研究所举办的"偏微年"活动中授课的讲稿，并吸取了当时来访的国外专家讲学的最新内容编写而成的. 本书共分两部分: 第一部分全面介绍二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的各种先验估计方法，包含近年来出现的最新技巧，并讨论线性方程、拟线性方程以及完全非线性方程 Dirichlet 问题的可解性；第二部分介绍线性和非线性椭圆型方程组 Dirichlet 问题弱解的存在性和正则性. 本书内容丰富，取材适当，是一本很好的研究生教材.

本书可供大学数学系学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考.

现代数学基础丛书

二阶椭圆型方程与椭圆型方程组

陈亚浙　吴兰成 著

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1991 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168　1/32

1991 年 4 月第一次印刷　　印张：9 3/8

印数：0001—2 200　　字数：241 000

ISBN 7-03-002133-9/O · 400

定价： 9.50 元

序　　言

二阶椭圆型偏微分方程与方程组是研究偏微分方程的重要基础，因此 1985 年在南开数学研究所举办的“偏微年”活动中被列为研究生的基本课程之一．当时，作者应邀给研究生讲授这一课程，同时，南开数学研究所还邀请了许多国外知名学者来所讲学，为该课程提供了许多最新的研究成果．这本书就是在作者授课的讲稿基础上，吸取了国外专家讲学的最新内容写成的．

二阶椭圆型偏微分方程与方程组在国外已有很好的专著，有些已有中译本，如本书参考文献所列入的[GT]，[LU] 与 [GQ1] 等，它们已相当完整地介绍了这一方面的内容，但是它们一般结构庞大，初学者不易入门，不适宜作为教材．编写本书的目的是希望提供一本研究生的教材．本书既包含这一方面的基本内容，又包含 80 年代以来出现的最新成果与方法，使研究生能够尽快地到达研究这一课题的前沿．

本书共分两部分．第一部分全面地介绍二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的各种先验估计方法，并在不太长的篇幅里，比较详细地介绍 80 年代出现的 Krylov-Safonov 估计与完全非线性椭圆型方程的研究结果．第二部分介绍线性和非线性椭圆方程组 Dirichlet 问题弱解的存在性与正则性理论．在附录 1 中列出本书所需要的 Sobolev 空间的知识．为使主要内容更为突出，我们把一些定理，如 Stampacchia 内插定理与反向 Hölder 不等式等的证明，都放在附录中．

由于作者学识有限，错误与不妥之处在所难免，希望读者提出宝贵意见．

最后我们应当指出，姜礼尚教授领导的北京大学偏微分方程讨论班对本书稿的形成起了重要的作用，在此我们向姜礼尚教授

以及对讨论班做出过贡献的同志表示深切的谢意.此外,我们还要衷心地感谢吉林大学的王光烈副教授,他认真地审阅了本书稿,并提出了许多宝贵的意见.

陈亚浙　吴兰成

1990 年 5 月 20 日

《现代数学基础丛书》编委会

目　　录

第一部分　二阶椭圆型方程

第二部分　椭圆型方程组

第一部分　二阶椭圆型方程

第一章　L^2 理　论

研究椭圆型方程 Dirichlet 问题的可解性是本书的中心课题之一，Sobolev 空间的引进(参看附录1)为这一研究提供了有效的途径.应用 Sobolev 空间，我们可以在更广泛的函数类中寻求问题的解，这就使得可解性问题变得容易得多了. 这种解往往称为"弱解"或"广义解". 当然，为了得到古典解的存在性，我们必须研究弱解的光滑性，这就是所谓弱解的正则性问题. 在本章§4 与下一章，我们将会看到研究这一问题的一些基本方法.

§1. Lax-Milgram 定理

设H是实 Hilbert 空间，H' 是它的对偶空间，H与 H' 的对偶积记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$.

定义 1.1. 设 $a(u,v)$ 是 Hilbert 空间H上的双线性型，

(i) $a(u,v)$ 称为有界的，如果存在 $M>0$ 使得

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|_H\|v\|_H,\quad \forall u,v\in H. \tag{1.1}$$

(ii) $a(u,v)$ 称为强制的，如果存在 $\delta>0$ 使得

$$a(u,u)\geqslant \delta\|u\|_H^2,\quad \forall u\in H. \tag{1.2}$$

定理 1.1 (Lax-Milgram 定理). 设 $a(u,v)$ 是H上的有界强制双线性型，则对于任意 $f\in H'$，存在唯一的 $u\in H$，满足

$$a(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in H \tag{1.3}$$

且有估计

$$\|u\|_H\leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|_{H'}. \tag{1.4}$$

证明. 容易知道,对于固定的 $u \in H$, $a(u,\cdot)$ 是H上的有界线性泛函,存在唯一的 $Au \in H'$,使得

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \ \forall v \in H \tag{1.5}$$

且

$$\|Au\|_{H'} \leqslant M\|u\|_H,$$

容易验证A是线性的. 此外,又由强制条件知

$$\|Au\|_{H'}\|u\|_H \geqslant a(u,u) \geqslant \delta\|u\|_H^2,$$

因此

$$\|Au\|_{H'} \geqslant \delta\|u\|_H. \tag{1.6}$$

这样 A^{-1} 存在. 我们将证明A的值域 $R(A) = H'$. 首先证明 $R(A)$ 是闭集.若 $Au_n \to v$,由(1.6)

$$\|u_n - u_m\|_H \leqslant \frac{1}{\delta}\|Au_n - Au_m\|_{H'},$$

因此 u_n 是H的基本列. 由H的完备性,必有极限元素 $u \in H$, 又由A的连续性, 必有 $Au_n \to Au$, 因此 $v = Au \in R(A)$, 这说明 $R(A)$ 是H'的闭子空间. 如果 $R(A) \neq H'$,由正交分解定理,必存在 $v' \in H'$, $v' \neq 0$ 且 $v' \perp R(A)$. 由H的自反性,必存在$v \in H$ 使得 $(v',\cdot)_{H'} = \langle\cdot, v\rangle$, 应用强制性,

$$0 = (v', Av)_{H'} = \langle Av, v\rangle \geqslant \delta\|v\|_H^2 > 0.$$

这一矛盾说明 $R(A) = H'$,因此必存在唯一的u适合 $Au = f$,由(1.5)与(1.6)立即得到(1.3)与(1.4).

§ 2. 椭圆型方程的弱解

设Ω是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开区域,为简单起见,我们总假定 $n \geqslant 3$. 这一章我们将在Ω上考虑散度型椭圆型方程

$$Lu = -D_i(a^{ij}D_ju + d^iu) + (b^iD_iu + cu) = f + D_if^i. \tag{2.1}$$

上式及以下各处都遵照求和约定, 对重复脚标 i,j 将从1至n求和,$D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. 对于算子 L,本章总做如下的假定:

$$a^{ij} \in L^\infty(\Omega),$$

又存在正常数 λ, Λ 使得

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \ \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \ x \in \Omega. \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^n(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|d^i\|_{L^n(\Omega)} + \|c\|_{L^{n/2}(\Omega)} \leqslant \Lambda. \tag{2.3}$$

下面我们简记 Sobolev 空间 $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. 对于 $u, v \in H^1(\Omega)$,我们记

$$a(u,v) = \int_\Omega \{(a^{ij}D_iu + d^iu)D_jv + (b^iD_iu + cu)v\}dx.$$

在引理 2.1 的证明过程中我们将看到上面的各项积分是有意义的.

定义 2.1. 对于 $T \in H^{-1}(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间), $g \in H^1(\Omega)$,称 $u \in H^1(\Omega)$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = T, \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = g, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{2.4}$$

的弱解,如果 u 满足

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle T, v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

引理 2.1. 设 L 的系数满足条件(2.2),(2.3),Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的有界开区域,则 $a(u,v)$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界双线性型.

证明. 利用 Hölder 不等式与条件(2.2),可得

$$\left|\int_\Omega a^{ij}D_iuD_jv\,dx\right| \leqslant \Lambda\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

应用 Hölder 不等式、(2.3)与嵌入定理,我们有

$$\left|\int_\Omega d^iuD_jv\,dx\right| \leqslant \sum_i \|d^i\|_{L^n(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|D_jv\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C\Lambda\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left|\int_\Omega cuv\,dx\right| \leqslant \|c\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

$$\leqslant C\Lambda\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

其中 $2^*=\dfrac{2n}{n-2}$,C 只依赖于 n。余下的项可类似估计，于是我们有

$$|a(u,v)|\leqslant C\Lambda\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.6}$$

附注. 对于固定的 $u\in H^1(\Omega)$，$a(u,\cdot)$ 也是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函. 类似于定理 1.1 的证明，存在有界线性算子 $\tilde{L}$: $H^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$，使得

$$a(u,v)=\langle\tilde{L}u,v\rangle,\ \forall u\in H^1(\Omega),\ v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

以后对算子 $\tilde{L}$ 与 (2.1) 给出的形式微分算子 L 我们将不加以区分。

引理 2.2. 设 L 的系数满足条件 (2.2), (2.3),Ω 为有界开区域，则存在 $\bar{\mu}>0$,使得当 $\mu\geqslant\bar{\mu}$ 时，$a(u,v)+\mu(u,v)_{L^2(\Omega)}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制的,其中 $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ 表示 $L^2(\Omega)$ 的内积.

为此我们需要如下的事实：设 $f\in L^p(\Omega)$，ε 是任意固定的正数,则 f 存在分解：$f=f_1+f_2$，使得

$$\|f_2\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon,\ \sup_{x\in\Omega}|f_1(x)|<K(\varepsilon). \tag{2.8}$$

这只须取 f_1 是如下形式的函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当}\ |f(x)|<K\ \text{时},\\ 0, & \text{当}\ |f(x)|\geqslant K\ \text{时},\end{cases}$$

然后取 K 充分大即可.

引理 2.2的证明. 如上所述，对于任意给定的 $\varepsilon>0$,作如下分解：

$$b^i=b_1^i+b_2^i,\ d^i=d_1^i+d_2^i,\ c=c_1+c_2,$$

使得

$$\sum\|b_2^i\|_{L^n(\Omega)}+\sum\|d_2^i\|_{L^n(\Omega)}+\|c_2\|_{L^{n/2}(\Omega)}\leqslant\varepsilon,$$
$$\sum\|b_1^i\|_{L^\infty(\Omega)}+\sum\|d_1^i\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c_1\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant K(\varepsilon).$$

记

$$a_2(u,v)=\int_\Omega\{(a^{ij}D_ju+d_2^iu)D_iv$$

$$+ (b_2^i D_i u + c_2 u)v\}dx,$$

$$a_1(u,v) = a(u,v) - a_2(u,v).$$

应用正定性条件(2.1)和类似于引理 2.1 的计算，容易得到

$$a_2(u,u) \geqslant (\lambda - C\varepsilon)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

现在取定 ε 使得 $C\varepsilon = \frac{1}{4}\lambda$. 进一步估计

$$|a_1(u,u)| \leqslant CK(\varepsilon)\left[\int_\Omega \sum_i |D_i u||u|dx + \int_\Omega |u|^2 dx\right]$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |Du|^2 dx + C\left(\frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda} + K(\varepsilon)\right)$$

$$\times \int_\Omega |u|^2 dx.$$

综合上述估计，我们有

$$a(u,u) \geqslant \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\left(\frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda} + K(\varepsilon)\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

取 $\bar{\mu} = C\left(\frac{K^2(\varepsilon)}{\lambda} + K(\varepsilon)\right)$即为所求.

应用 Lax-Milgram 定理，我们可以得到弱解的存在性定理.

定理 2.3. 设 L 的系数满足(2.2),(2.3), Ω 是使 Sobolev 嵌入定理成立的有界开区域, $T \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$, 则存在 $\bar{\mu} > 0$ 使得当 $\mu \geqslant \bar{\mu}$ 时，非齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu + \mu u = T, \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.9}$$

存在唯一的弱解.

证明. 由弱解的定义，与问题 (2.9) 相应的双线性型为 $a(u,v) + \mu(u,v)_{L^2(\Omega)}$. 弱解 u 满足

$$\begin{cases} a(u,v) + \mu(u,v)_0 = \langle T,v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u - g \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.10}$$

这里 $(u,v)_0 \triangleq (u,v)_{L^2(\Omega)}$. 现在令 $w = u - g$，则问题(2.10)等价于寻求 $w \in H_0^1(\Omega)$，使其满足

$$a(w,v)+\mu(w,v)_0=\langle T,v\rangle-a(g,v)-\mu(g,v)_0,$$
$$\forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

由引理 2.1 与 2.2，当 $\mu\geqslant\bar{\mu}$ 时 $a(w,v)+\mu(w,v)_0$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界强制双线性型，不难验证 $\langle T,v\rangle-a(g,v)-\mu(g,v)_0$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函。由 Lax-Milgram 定理方程(2.11)存在唯一的解 $w\in H_0^1(\Omega)$，$u=w+g$ 即为问题(2.9)的弱解。

§ 3. Fredholm 二择一定理

Fredholm 二择一定理在 Banach 空间的表述如下:

定理 3.1. 设 V 是赋范线性空间，$A:V\to V$ 是一紧线性算子，I 是 V 的恒同算子，则只有以下两种可能发生:

(1) 存在 $x\in V$，$x\neq 0$，使得 $x-Ax=0$.

(2) 对于任意 $y\in V$，存在唯一的 $x\in V$，使得

$$x-Ax=y.$$

在第二种情况下 $(I-A)^{-1}$ 是有界线性算子。此外，我们还可得到: A 的谱是离散的，除 0 之外不可能有其他极限点，每一特征值的重数是有限的。

这个定理的证明在泛函分析的教科书中都能找到。下面我们将把它应用于椭圆型方程的 Dirichlet 问题。

定理 3.2. 设 L 与 Ω 满足定理 2.3 的假定，则问题(2.9)只有以下两种可能:

(1) 对于任意 $T\in H^{-1}(\Omega)$，$g\in H^1(\Omega)$，问题(2.9)有唯一的弱解。

(2) 存在非零 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $Lu+\mu u=0$(即 $a(u,v)+\mu(u,v)_0=0$，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$)。

此外，使第二种情况成立的 μ 是离散的，只能以 ∞ 为极限点，对于每一特征值 μ，相应的特征函数空间是有限维的。

证明. 不妨设 $g=0$ (参看定理 2.3 的证明)。对于固定的 $u\in L^2(\Omega)$，$(u,\cdot)_0$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函，因此存在有界

线性算子 $P:L^2(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$，使得

$$(u,v)_0=\langle Pu,v\rangle,\ \forall u\in L^2(\Omega),\ v\in H_0^1(\Omega).$$

设 I 是由 $H_0^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的嵌入算子，由引理 2.1 的附注与上述的事实，我们可把(2.9)写成：求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$Lu+\mu PIu=T. \tag{3.1}$$

定理 2.3 的结论说明必存在 $\bar{\mu}>0$，使得 $(L+\bar{\mu}PI)^{-1}$ 存在，且为 $H^{-1}(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 的有界线性算子．记 $G=(L+\bar{\mu}PI)^{-1}$，将算子 G 作用于方程(3.1)之后得到

$$u-(\bar{\mu}-\mu)GPIu=GT. \tag{3.2}$$

方程(3.1)与(3.2)是等价的．由于 $H_0^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的嵌入算子是紧的，因此 GPI 是 $H_0^1(\Omega)$ 到其自身的紧线性算子．现在对方程(3.2)应用定理 3.1 立即得到所要的结论．

§4. 弱解的极值原理

极值原理有多种证明方法，De Giorgi 迭代与 Moser 迭代是两种常用方法，它们也是目前偏微研究中的重要手段．本书将在不同的地方加以介绍． 这里我们采用 De Giorgi 迭代方法．De Giorgi 迭代往往归结为如下的引理：

引理 4.1. 设 $\varphi(t)$ 是定义于 $[k_0,+\infty)$ 的非负非增函数，当 $h>k\geqslant k_0$ 时满足

$$\varphi(h)\leqslant\frac{C}{(h-k)^{\alpha}}[\varphi(k)]^{\beta}, \tag{4.1}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$．则有

$$\varphi(k_0+d)=0, \tag{4.2}$$

这里

$$d=C^{\frac{1}{\alpha}}[\varphi(k_0)]^{\frac{\beta-1}{\alpha}}2^{\frac{\beta}{\beta-1}}. \tag{4.3}$$

证明. 定义数列

$$k_s = k_0 + d - \frac{d}{2^s} \qquad (s = 0,1,2,\cdots).$$

条件(4.1)给出了以下递推公式

$$\varphi(k_{s+1}) \leqslant \frac{C\,2^{(s+1)\alpha}}{d^\alpha}[\varphi(k_s)]^\beta \qquad (s = 0,1,2,\cdots). \tag{4.4}$$

我们将用归纳法证明

$$\varphi(k_s) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^s} \qquad (s = 0,1,2,\cdots), \tag{4.5}$$

其中 $r > 1$ 待定．设不等式(4.5)对于 s 成立．由(4.4)与归纳法假设

$$\begin{aligned}\varphi(k_{s+1}) &\leqslant \frac{C\,2^{(s+1)\alpha}}{d^\alpha}\left[\frac{\varphi(k_0)}{r^s}\right]^\beta \\ &= \frac{\varphi(k_0)}{r^{s+1}}\,\frac{C\,2^{(s+1)\alpha}}{d^\alpha r^{s(\beta-1)-1}}[\varphi(k_0)]^{\beta-1}.\end{aligned}$$

为使归纳法成立，选取 $r = 2^{\frac{\alpha}{\beta-1}}$，并使

$$\frac{C\,2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}}{d^\alpha}[\varphi(k_0)]^{\beta-1} \leqslant 1.$$

(4.3)关于 d 的定义恰好满足这一要求．于是(4.5)成立．在(4.5)中令 $s \to \infty$，则得所求．

为了更精确地叙述弱极值原理，我们需要引进上、下解的概念．

定义 4.1． $u \in H^1(\Omega)$ 称为方程（2.1）的弱下解(弱上解、弱解)，如果

$$\begin{gathered} a(u,\varphi) \leqslant (\geqslant, =)(f,\varphi)_0 - (f^i, D_i\varphi)_0, \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.6}$$

其中 $a(u,\varphi)$ 如 §2 所定义．

事实上(4.6)对于任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$，$\varphi = \varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$ 也成立．

定义 4.2． 设 $u \in H^1(\Omega)$．我们定义