自适应光学理论

周仁忠　阎吉祥　编著

北京理工大学出版社

自适应光学理论

周仁忠　阎吉祥　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

自适应光学是70年代发展起来的综合性学科，它使光学系统的观测能力达到接近衍射极限的水平。

本书是国家教委"八五"重点教材出版计划中的教材。书中论述两种（校正式及非线性光学相位共轭式）自适应光学的理论，内容包括：湍流的统计理论、光波在大气中传播的理论、校正式自适应光学的原理及非线性光学相位共轭式自适应光学的原理。为方便读者，书中还简述了必要的数学知识。

本书可当作大学本科高年级学生及研究生教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

自适应光学理论/周仁忠，阎吉祥编著。-北京：北京理工大学出版社，1996

ISBN 7-81045-088-3

Ⅰ. 自… Ⅱ. ①周… ②阎… Ⅲ. 自适应性：光学-理论-高等学校-教材 Ⅳ. O436

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 22900 号

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路 7 号）

（邮政编码 100081）

各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 16.625 印张 426 千字

1996 年 1 月第一版 1996 年 1 月第一次印刷

印数：1—2000 册 定价：15.45 元

前　言

自适应光学(Adaptive Optics)的概念是由巴布柯克(H W Babcock)于1953年提出来的,但直到80年代才开始进入实用阶段。目前世界上科学技术先进的国家都在开展这方面的研究工作,已有一些自适应光学系统应用在天文和军事领域,使光学观测能力达到了接近衍射极限的水平。

自适应光学是一门集科学性和工程性为一体的综合学科,它研究实时自动改善光波波前质量的理论、系统、技术和工程。在理论方面主要研究光波波前的随机扰动理论、光波波前的重构理论、自适应光学系统的原理(包括校正式和非线性光学相位共轭式两种系统的原理)、系统的优化方法等。这些理论也是本书论述的主要内容。

当前,自适应光学的学术活动很活跃,每年两次定期定地召开国际学术会议。每次都发表了很多论文,还出版了专集。只是论文的内容大都讨论工程技术问题,而有关理论问题的内容则大都分散在众多论文中;至于论述自适应光学理论的专著,作者尚未见到。

作者从1982年起讲授了“自适应光学”课程,编印了内部教材;从1987年起,又参加了国家“863”计划中的“自适应光学望远镜技术”及国家自然科学基金的相关项目的研究工作,一些研究成果还在国内外学术会议及刊物上发表过。本书吸取了上述项目的研究成果,本书的编成也是这二个项目的成果之一。此外,由周仁忠主编著的另一本著作《自适应光学》(国防工业出版社,1996)则主要论述自适应光学的技术和系统。这二本著作相辅相成,较完整地概括了自适应光学的主要内容。

本书共8章，其中第一章的1.1至1.4节，第四章的4.1至4.6节和4.9节至4.11节，第五、六章的全部由周仁忠编写；第一章的1.5至1.8节，第四章的4.7和4.8节，第二、三、七、八章的全部由阎吉祥编写；此外，周仁忠还负责全书统编工作。

本书的出版列入了国家教委“八五”重点教材出版计划。

魏光辉教授审阅了全书，对此致以衷心谢意。

限于作者水平，书中缺点错误难免，敬请读者指正。

作　者

目　录

第一章　数学基础

1.1　范数与广义逆 …………………………………………… (1)
1.2　线性方程的解析解 ……………………………………… (5)
1.3　线性方程的迭代解 ……………………………………… (12)
1.4　多项式 …………………………………………………… (18)
1.5　随机变量及其数字特征 ………………………………… (37)
1.6　随机过程 ………………………………………………… (40)
1.7　随机场 …………………………………………………… (44)
1.8　结构函数 ………………………………………………… (48)
参考文献 ……………………………………………………… (52)

第二章　湍流的统计理论

2.1　基本概念 ………………………………………………… (55)
2.2　柯尔莫哥洛夫理论 ……………………………………… (59)
2.3　湍流的克莱契南(Kraichnan)理论 …………………… (66)
2.4　湍流的霍普夫(Hopf)理论 …………………………… (81)
2.5　湍流理论的新进展 ……………………………………… (85)
参考文献 ……………………………………………………… (87)

第三章　光波在湍流大气中的传播理论

3.1　湍流大气的统计描述 …………………………………… (90)
3.2　光波通过单薄层湍流大气的传播 ……………………… (99)
3.3　光波通过多薄层湍流传播的统计特性 ………………… (105)
3.4　热晕效应 ………………………………………………… (109)
3.5　自适应光学成像系统的性能 …………………………… (116)
3.6　自适应光学激光发射系统的性能 ……………………… (125)

参考文献 …………………………………………………………… (134)

第四章 校正式自适应光学系统的原理

4.1 概论…………………………………………………………… (135)
4.2 相位共轭原理…………………………………………………… (151)
4.3 波前补偿原理…………………………………………………… (156)
4.4 高频振动系统的原理…………………………………………… (158)
4.5 像清晰化原理…………………………………………………… (169)
4.6 采用致动透镜的自适应光学系统的原理……………………… (175)
4.7 激光导星原理…………………………………………………… (182)
4.8 多层共轭校正原理……………………………………………… (205)
4.9 综合孔径自适应光学系统原理………………………………… (217)
4.10 解卷积法重构图像的原理 …………………………………… (219)
4.11 自适应光学系统参数的优化 ………………………………… (234)
参考文献 …………………………………………………………… (252)

第五章 光波波前重构理论

5.1 信号重构理论…………………………………………………… (260)
5.2 区域法重构波前的理论………………………………………… (283)
5.3 模式法估计波前相位…………………………………………… (294)
5.4 波前重构的分块算法…………………………………………… (310)
5.5 波前的加权重构原理…………………………………………… (315)
5.6 由光强分布重构相位分布……………………………………… (317)
5.7 由光强分布重构波前模式……………………………………… (322)
5.8 从光强重构波前的算法………………………………………… (326)
参考文献 …………………………………………………………… (328)

第六章 自适应光学系统的控制系统

6.1 控制系统的描述………………………………………………… (333)
6.2 控制系统的分析………………………………………………… (340)
6.3 控制系统的综合………………………………………………… (346)
6.4 控制系统的优化………………………………………………… (360)

6.5 自适应光学系统的典型控制系统 …… (365)
6.6 自适应光学系统的控制系统的优化 …… (380)
参考文献 …… (407)

第七章 非线性光学基础

7.1 辐射与物质相互作用的经典描述 …… (409)
7.2 非线性光学的半经典理论 …… (415)
7.3 非线性介质中波的耦合 …… (421)
7.4 非弹性散射 …… (424)
7.5 半导体材料的非线性光学特性 …… (426)
7.6 光折变效应 …… (438)
7.7 有机材料的非线性光学特性 …… (445)
参考文献 …… (451)

第八章 非线性光学相位共轭

8.1 NOPC 的基本原理 …… (452)
8.2 透明介质弹性光子散射的 NOPC …… (457)
8.3 非弹性光子散射的 NOPC …… (479)
8.4 半导体中的 DFWM 简介 …… (484)
8.5 光折变材料自泵浦相位共轭 …… (488)
8.6 有机材料光学相位共轭 …… (497)
8.7 光学相位共轭镜的理论分析 …… (505)
8.8 非线性光学相位共轭的应用 …… (511)
8.9 具有反馈镜非线性系统中相位畸变的自适应消除 …… (518)
参考文献 …… (522)

第一章　数学基础

自适应光学理论中要用到较多的数学方法，如为描述大气的湍流性质和光波波前的统计特性，要运用随机变量、随机过程和随机场的理论；在进行波前控制时，要将波前展开成各种模式，便要运用多项式理论；在光波波前重构理论自适应光学原理及非线性光学中，会遇到解矛盾方程及超越方程问题。为了方便读者，本书首先介绍必要的数学基础知识。

1.1　范数及广义逆

线性方程可能有解析解，也可能无直接解析解，甚至要进行奇异值分解或运用迭代方法才能求解。

在解线性方程中，要用到范数，以判断数值方法的收敛性，稳定性及误差的大小。线性方程中的矩阵还往往不存在直接逆矩阵，但可能存在广义逆矩阵。为此，本节首先简略介绍范数及广义逆矩阵概念，1.2 节再说明线性方程的求解方法，但在叙述中并不都给予证明。

1.1.1　范数

在研究矢量的正交性，收敛性等问题中，要用到矢量长度，这就引出范数的概念，但范数比长度的概念更广。

1. 矢量范数

设 V 是数域 N 上的线性空间，对于 V 的任一矢量 X 有一对应的实值函数 $\|X\|$，并满足下面三个条件：

(1)非负性

$$\| X \| \begin{cases} > 0, x \neq 0 \\ = 0, x = 0 \end{cases} \qquad (1.1\text{-}1)$$

(2)齐次性

$$\| aX \| = |a| \, \| X \| , a \in A, X \in V \qquad (1.1\text{-}2)$$

(3)存在不等式

$$\| X + Y \| \leqslant \| X \| + \| Y \| , X, Y \in V \qquad (1.1\text{-}3)$$

则称 $\| X \|$ 为 V 上矢量 X 的范数,简称矢量范数。

欧氏范数 在 N 维酉空间 C^N 上,复矢量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的长度

$$\| X \| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_N|^2} \qquad (1.1\text{-}4)$$

称为欧氏范数,它满足矢量范数的三个条件。

式(1.1-4)对欧氏空间 R^N 亦成立,这只要把复数域 C 改为实数域 R 就可以了。欧氏范数还满足以下不等式

$$\| X \| - \| Y \| \leqslant \| X - Y \|$$

式中 X、Y 是 C^N 的任意矢量。

契贝谢夫范数(或∞－范数) 设 C^N 上的矢量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,存在范数

$$\| X \|_\infty = \| X \|_m = \max |x_i| \qquad (1.1\text{-}5)$$

并满足矢量范数的三个条件,则称 $\| X \|_\infty$ 或 $\| X \|_m$ 为∞－范数或契贝谢夫范数。

1-范数 设 C^N 上矢量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_N,)$,存在范数

$$\| X \|_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k| \qquad (1.1\text{-}6)$$

则称 $\| X \|_1$ 为 1-范数,它也满足矢量范数的三个条件。

上述范数还可以用下式统一描述

$$\| X \|_P = \left[\sum_{k=1}^{N} |x_k|^P \right]^{1/P} \qquad (1.1\text{-}7)$$

若 $p=1$,得 $\| X \|_1$;$p=2$,得 $\| X \|_2$;$p \to \infty$,得

$$\| X \|_p = \max \| x_k \|$$

最后的关系证明如下：设$|x_m|$是 X 中最大的一个，且$|x_m|\neq 0$，则

$$\|X\|_p=\left[\sum_{k=1}^{N}|x_m|^p\frac{|x_k|^p}{|x_m|^p}\right]^{1/p}$$
$$=|x_m|^p\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{|x_k|^p}{|x_m|^p}\right]^{1/p}$$

因为
$$|x_m|^p\leqslant\sum_{k=1}^{N}|x_k|^p\leqslant N|x_m|^p$$

即
$$1\leqslant\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{|x_k|^p}{|x_m|^p}\right]^{1/p}\leqslant N^{1/p}$$

由荷斯皮托法则知$\lim\limits_{p\to\infty}N^{1/p}=1$，所以

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=|x_m|=\|x\|_\infty$$

2. 矩阵范数

一个 $M\times N$ 矩阵可以看成是拉直的 $M\times N$ 维矢量，因此，可以按定义矢量范数的相似方法来定义矩阵范数。

设 $A,B\in C^{M\times N}$和 $a\in c$，按同一法则在 $C^{m\times n}$上定义一个 A 的实函数$\|A\|$，且满足下面的条件

(1)非负性

$$\|A\|\begin{cases}>0,A\neq 0\\=0,A=0\end{cases}\tag{1.1-8}$$

(2)齐次性　$\|aA\|=|a|\,\|A\|,a\in c$　(1.1-9)

(3)存在不等式　$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$　(1.1-10)

(4)相容性　若 AB 有意义，还有

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|\tag{1.1-11}$$

则$\|A\|$为矩阵范数(或乘积范数)。

与矢量范数中的三种范数的定义相似，矩阵范数中也有下述三种相似范数。

(1)列和范数

$$\| A \|_{m_1} = \max_{l} \left[\sum_{k=1}^{M} |a_{kl}| \right] \tag{1.1-12}$$

(2)谱和范数

$$\| A \|_{m2} = \sqrt{\lambda_i} \tag{1.1-13}$$

其中 λ_i 为 $A^* A$ 的最大特征值。

(3)行和范数

$$\| A \|_{\infty} = \max_{k} \left[\sum_{l=1}^{N} |a_{k,l}| \right] \tag{1.1-14}$$

(4)弗罗比尼斯(Frobenius)范数

$$\| A \|^2 = A^T A = \sum_i \sum_j |A_{ij}|^2 \tag{1.1-15}$$

1.1.2 广义逆

设矩阵 $A \in C^{M \times N}$,若矩阵 $X \in C^{M \times N}$ 满足下述 4 个潘罗斯(Penrose)方程

(1)$AXA = A$ (1.1-16)

(2)$XAX = X$ (1.1-17)

(3)$(AX)^* = AX$ (1.1-18)

(4)$(XA)^* = XA$ (1.1-19)

式中 A^* 是 A 的共轭转置,则称 X 为 A 的莫尔-潘罗斯(Moore-Penrose)逆,记为 $A^{\dagger}$。

对于任意 $A \in C^{M \times N}$,若 $X \in C^{M \times N}$ 满足(1.1-16)至(1.1-19)中的部分方程,则称 X 为 A 的$\{i,j,\cdots,l\}$逆,记为 $A^{(i,j,\cdots,l)}$,其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$,而应用较多的有

$$A^{(1)}, A^{(1,2)}, A^{(1,3)}, A^{(1,4)}, A^{\dagger}$$

下面对上述 5 种逆作一简单说明。

1. $A^{(1)}(M=n)$

$A^{(1)}$满足 $AA^{(1)}A = A$,一般不是唯一的,但当 A 为非奇异方阵时,有

$$A^{(1)} = A^{-1} \tag{1.1-20}$$

2. $A^{(1,2)}$

$A^{(1,2)}$满足 $AA^{(1,2)}A=A$ 及 $A^{(1,2)}AA^{(1,2)}=A^{(1,2)}$。从这二方程可知,$A$ 和$A^{(1,2)}$的位置是对称的,故 A 与 $A^{(1,2)}$互为{1,2}逆,即

$$A^{(1,2)} = A \tag{1.1-21}$$

3. $A^{(1,3)}(N>M)$

$A^{(1,3)}$满足 $AA^{(1,3)}A=A$ 及$(AA^{(1,3)})^*=AA^{(1,3)}$。由此知

$$A^TAA^{(1,3)}A = A^TA$$

即

$$A^{(1,3)}A = (A^TA)^{-1}A^TA = I$$

故

$$A^{(1,3)} = A^{-1} \tag{1.1-22}$$

4. $A^{(1,4)}$

$A^{(1,4)}$满足 $AA^{(1,4)}A=A$ 及$(A^{(1,4)}A)^*=A^{(1,4)}A$,则

$$A^{(1,4)}A^{(1,3)} = A^{\dagger} \tag{1.1-23}$$

5. $A^{\dagger}$

$A^{\dagger}$满足潘罗斯所有四个方程,可由泽洛伯克(Zlobec)公式计算出来,

$$A^{\dagger} = A^*(A^*AA^*)^{(1)}A^* \tag{1.1-24}$$

1.2 线性方程的解析解

设有一线性方程

$$AX = B \tag{1.2-1}$$

其中 $B\in b^m$ 为给定矢量,$X\in b^n$ 为特定矢量,$A\in C^{M\times N}$为已知矩阵。若存在矢量 $X\in b^n$ 满足方程(1.2-1),则称该线性方程为相容方程,否则为不相容方程。

1.2.1 线性方程系的通解

定理 设 $A\in C^{M\times N}$,$B\in C^{p\times q}$,$D\in C^{M\times q}$,则方程系 $A\times B=D$ 相容的充分必要条件为

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D \tag{1.2-2}$$

其通解为

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \tag{1.2-3}$$

式中 $Y \in C^{M\times N}$ 任意。

［证］ 若式(1.2-2)成立，显然 $X = A^{(1)}DB^{(1)}$ 就是它的解；反之，若 X 是 $A\times B = D$ 的任意解，则

$$\begin{aligned} D &= A \times B = AA^{(1)}A \times BB^{(1)}B \\ &= AA^{(1)}DB^{(1)}B \end{aligned}$$

将此关系代入式(1.2-3)，得

$$AX = AA^{(1)}DB^{(1)} + AY - AY = AA^{(1)}DB^{(1)}$$

即
$$AXB = AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$$

故式(1.2-3)是 $AXB = D$ 的解。

此外，设 X 是 $AXB = D$ 的任意解，则

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + X - A^{(1)}AXBB^{(1)}$$

此式与式(1.2-3)的形式相同，因而是 $AXB = D$ 的通解。

若 B 为单位矩阵 I，则 $AXB = D$ 便回到 $AX = B$，其相容条件为

$$AA^{(1)} = D$$

通解为
$$X = A^{(1)}D + (I - A^{(1)}A)Y \tag{1.2-4}$$

1.2.2 相容线性方程的最小范数解

定理 设线性方程 $AX = B$ 相容，则

$$X = A^{(1,4)}B, A^{(1,4)} \in A\{1,4\} \tag{1.2-5}$$

是最小范数解。

［证］ 若 $AX = B$ 相容，则 $B \in R(A)$，此处 $R(A)$ 为矩阵 A 的列空间，由式(1.2-2)知，对任意 $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$，$X = A^{(1,4)}B$ 都是解。另由 $B \in R(A)$ 推得，存在 $u \in C^N$，使得 $B = Au$，故

$$\begin{aligned} A^{(1,4)}B &= A^{(1,4)}Au = [A^{(1,4)}A]^* u \\ &= A^* [A^{(1,4)}]^* u \in R(A^*) \end{aligned}$$

为证明此最小范数解的唯一性，设 X、$Y\in R(A^*)$，且 $AX=AY=B$，则

$$A(X-Y)=0$$

令 $N(A)$表示矩阵 A 的零空间，$R^{\perp}(A)$表示与 $R(A)$正交的列空间，则有$(X-Y)\in N(A)R^{\perp}(A^*)$。又因$(X-Y)\in R(A^*)$，则

$$(X-Y)\in R(A^*)\cap R^{\perp}(A^*)$$

即

$$X-Y=0$$

所以线性方程 $AX=B$ 在 $R(A^*)$中有唯一解 X_0。

式(1.2-1)的通解为

$$X=X_0+Y,Y\in N(A)$$

则

$$\|X\|^2=\|X_0\|^2+\|Y\|^2$$

其中$\|\cdot\|$是欧氏范数。所以

$$\|X\|\begin{cases}=\|X_0\|,X=X_0\\>\|X_0\|,X\neq X_0\end{cases}$$

因此，相容方程(1.2-1)的最小范数解 $X=A^{(1,4)}B$ 是唯一的。

1.2.3 矛盾方程系的最小二乘解

定理 设 $A\in C^{M\times N}$，$B\in C^M$，$A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$，则线性方程 $AX=B$ 的最小二乘解为

$$X=A^{(1,3)}B \tag{1.2-6}$$

[证] 因为

$$AX-B=(AX-P_{R(A)}B)+(P_{R(A)}B-B)$$

其中

$$(AX-P_{R(A)}B)\in R(A)$$

及

$$-B=-(I-P_{R(A)})B=-P_{R(A)B}^{\perp}\in P^{\perp}(A)$$

所以$\|AX-B\|^2=\|AX-P_{R(A)}B\|^2+\|P_{R(A)}B-B\|^2$

上式取极小值(即最小二乘值)的充分必要条件为

$$AX=P_{R(A)}B$$

将此条件改写，即

$$
\begin{aligned}
AX - B &= AX - [P_{R(A)}B + (I - P_{R(A)})] \\
&= AX - [P_{R(A)}B - P_{N(A^*)}B] \\
&= - P_{N(A^*)}B \in N(A^*)
\end{aligned}
$$

将式(1.1-16)代入,得

$$A^*(AX - B) = 0$$

即
$$A^*AX = A^*B$$

此式即为最小二乘解的充分必要条件。

任取 $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,根据式(1.1-16)知

$$R(AA^{(1,3)}) = R(A)$$

$$
\begin{aligned}
N(AA^{(1,3)}) &= N((AA^{(1,3)})^*) = N((A^{(1,3)})^* A^*) \\
&= N(A^*) = R^{\perp}(A)
\end{aligned}
$$

所以
$$AA^{(1,3)} = P_{R(A)}$$

故当 $X = A^{(1,3)}B$ 时

$$AX = AA^{(1,3)}B = P_{R(A)}B$$

即式(1.2-6)成立,定理得证。

一般地说,最小二乘解不是唯一的。例如,若 x_0 满足 min $\| AX - B \|$,则 $x_0 + y(y \in N(A))$ 也满足此关系。

若 A 的列满秩,因

$$N(A) = \{0\}$$

且由广义逆的性质知

$$A^{(1,3)}A = I$$

所以 $A\{1,3\}$ 只含一个元素,因此,上述最小二乘解是唯一的。

1.2.4 矛盾方程的最小范数最小二乘解

虽然最小二乘解一般不是唯一的,但最小范数最小二乘解却是唯一的,并且可用广义逆 A^+ 表示为

$$X = A^+ B \tag{1.2-7}$$

[证] 设 $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,因 $AX = B$ 的最小二解 $X = A^{(1,3)}B$

满足条件

$$AX = AA^{(1,3)}B$$

所以 $AX=B$ 的最小范数解就是上式的最小范数解。由式(1.2-5)知,式(1.2-7)的最小范 数解为

$$X = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}B = A^{+}B$$

故式(1.2-7)得证。

1.2.5 矩阵方程的最小范数最小二乘解

式(1.2-7)可以推广到矩阵方程

$$AXB = D$$

设矩阵 A 的欧氏范数的平方为

$$\| A \|^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} |a_{kl}|^2$$

又设 $V(A)$ 是将矩阵 A 按行拉直后得到的列矢量,即

$$V(A) = (a_{11}\cdots a_{1N}a_{21}\cdots a_{2N}\cdots a_{M1}\cdots a_{MN})^T$$

显然,矩阵 A 的范数 $\| A \|^2$ 等于对应矢量 $V(A)$ 的欧氏范数。利用矩阵直积和拉直关系,可将矩阵方程 $AXB=D$ 化为线性方程组

$$(A \otimes B^T)^{+} V(X) = V(D) \tag{1.2-8}$$

式$\otimes$代表直积(克朗内克积)。

定理 若矩阵方程 $AXB=D$ 不相容,则满足最小范数最小二乘

$$\min_{\min \| AXB-D \|} \| X \|$$

的唯一解为

$$X = A^{+}DB^{+} \tag{1.2-9}$$

[证] 由式(1.2-7)知,式(1.2-8)的唯一最小范数最小二乘解为

$$\begin{aligned} V(X) &= (A \otimes B^T)^{+} V(D) \\ &= (A^{+} \otimes (B^{+})^T)V(D) \end{aligned}$$

故
$$X = A^{+}DB^{+}$$