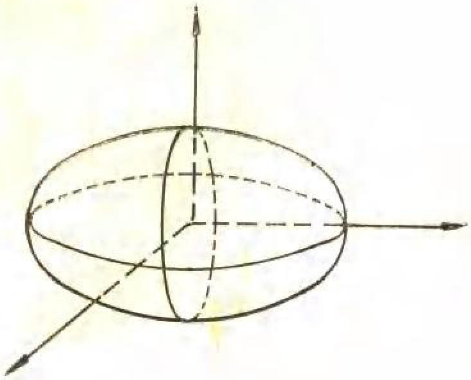
欧阳光中　编著



大学应用数学丛书

简明数学分析

复旦大学出版社

大学应用数学丛书

简 明 数 学 分 析

欧阳光中　编著

复 旦 大 学 出 版 社

内 容 简 介

这是一本数学分析教材，其体系和通常的数学分析教材基本相同，但在局部上作了较多改变，例如以左右逼近的区间套定理作为实数连续性的解析表达，并以此作为出发点建立极限理论；引进几乎处处连续的概念和 Riemann 可积的特性，用它研究积分的性质；引进外积和外微分形式处理多元积分学等等．书中的内容力求简明、直观、自然，并溶入一些现代数学的概念．主要内容有：极限论，一元微积分学，级数，多元微积分学，含参变量积分等．本书可以作为应用数学、力学、物理学、计算机科学等有关系科和专业的数学分析教材．

简 明 数 学 分 析

欧阳光中　编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 16.75 字数 479,000

1988年11月第1版　　1988年11月第1次印刷

印数1—10,000

ISBN7—309—00133—8/O·038　　定价：4.15元

《大学应用数学丛书》

编审委员会

名誉主任　苏步青

主　　任　谷超豪

委　　员　（按姓氏笔划为序）

叶敬棠　李大潜　李立康　李训经　吴立德

汪嘉冈　俞文魮　欧阳鬯　蒋尔雄

出 版 者 的 话

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科，如：应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等．为了满足这类专业数学教学的需要，我们组织编写和出版了一套“大学应用数学丛书”．本书即为这套丛书中的一种．

“大学应用数学丛书”重视现代数学的基本理论，强调数学的实际应用，反映现代科技的先进成果，并便于课堂教学和自学．我们希望，这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开，促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务．

在组织编写这套丛书的过程中，我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助，在此特表谢忱．

复旦大学出版社

1988 年 1 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

本书是一本数学分析教材，全书的体系和其他的数学分析教材基本相同，但在局部上作了较多的改变，力求做到简洁明了，并自然地引进了一些现代数学的概念．本书适用于应用数学、力学、物理学、计算机科学等有关的系科和专业．授课时数可以比目前通常的数学分析课程减少，使学生课外自学的时间增加．

编写数学分析的一大难题是如何处理极限理论。极限理论的根本思想是逼近，这是一个很朴素的思想，又是探索问题的有力方法。本书在目前中学数学的基础上，一开始就从矩形的面积着手，讲述逼近的方法，让初学者从一个最简单的实例中非常自然地看到逼近法的重要作用，如果没有它，连最简单的矩形的面积也弄不清。随后将这一直观的思想数学化，给出实数连续性的解析表达即左右逼近的区间套原理，并以此作为出发点建立极限的理论，包括以此证明闭区间上连续函数的一系列性质．此外，还尽量利用邻域的语言证明极限的一些性质以及复合函数的连续性等，这样做也许会显得更直观，对问题也比较容易分析研究．考虑到初学者往往对极限论中的反证法不易掌握，本书专列一节(1.7 一些否定命题的表达和反证法)帮助读者进一步掌握这些内容．

我国目前的高中数学对函数的概念和初等函数都已作了相当充分的讲述，本书考虑到这一因素，为了避免无谓的重复，书中仅着重向读者指明需要注意和需要进一步理解的地方．

在定积分理论中，本书在证明了闭区间上连续函数的可积性后，便引进可列集和零测度集的概念．并不加证明地介绍了 Riemann 可积的特征——函数的几乎处处连续，利用这一结论研究定积分的性质，例如若 f,g 可积则 $f\cdot g$ 也可积等等．Riemann 可积的特征是 Riemann

积分中最重要的结果之一，而证明本身对一个初学者来说却显得次要得多。在定积分的应用中，本书用了一节的篇幅推导了关于$n!$的Stirling公式，这大概是一个最初等的推导方法。

在重积分中，本书从面积和体积出发，直观地引进外积，并利用它讲述重积分的变量代换，而省略了有关的复杂的严格推导过程。另外又从Green公式，Gauss公式和一元函数的微积分基本定理（即Newton-Leibniz公式）的对比中引进外微分形式，从形式上统一处理了场论中的三个基本公式，指明后者不过是微积分基本定理在二维和三维空间中的表现。显然我们还可以把它推广到更高维空间中去。

除此以外，本书对许多定理的论证也作了不少改变，例如微分学中值定理，Cauchy收敛准则，条件极值的Lagrange乘数法，级数中的Abel判别法和Dirichlet判别法等等，这样做的目的是希望使本书的内容显得直观、自然、简便和易于想象，并具有一定的启发性。

本书和其他数学分析教材的一个共同特点，就是注意联系几何和物理的实际问题，这不仅是为了增加读者的感性认识，同时也为了提高读者处理实际问题的能力。例如在积分学(包括曲线积分和曲面积分)中，强调微元分析的方法，一方面将物理和几何的问题按其自身的特性较自然地归结为积分问题来处理，另一方面又从物理的模型中启发我们如何将某些积分(如两类曲线积分和两类曲面积分)化为可计算的形式。

本书所作的各种各样的改变，是数学分析教学中的一种尝试，这样做的效果如何，还有待于广大读者和使用本书的教师们来作鉴定。欢迎同志们对本书提出宝贵的意见和建议。

欧阳光中

1987．5．

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1. 数列的极限

1.1 简要的历史回顾

数学分析的主要内容是微积分以及和它有关的基本理论．十七世纪，**Newton*** 和 **Leibniz*** 创立了微积分，这是人类历史上的一个伟大创造，至今仍然闪烁着灿烂的光辉．今天，微积分已经在自然科学、技术科学、生命科学、社会科学、管理科学等各个领域内有着越来越广泛的应用．

微积分的建立，首先是为了处理十七世纪中四类主要的自然科学问题．第一类问题是求运动物体的瞬时速度和瞬时加速度，或者反过来，已知运动物体的瞬时速度或瞬时加速度，求在给定的时间内物体位移的距离．这类问题和研究行星运动、航海以及机械运动有着密切的联系，它们正是从这些具体问题中抽象出来的，并应用于天文学、航海学和机械学．

第二类问题是求曲线的切线．看起来这似乎是一个纯几何的问题，但却具有巨大的应用价值，其一是在设计和制作望远镜时需要研究光线通过曲面的折射情况，这就和切线密切相关．而望远镜的制作又和天文学、航海学结下不解之缘．另一是沿曲线运动的物体，在任何时刻其运动的方向就是该曲线的切线方向，因此对切线的研究又和机械运动挂上了钩．

---

*I. Newton(1642～1727)，英国数学家，力学家．G. Leibniz(1646～1716)，德国哲学家，数学家。在十七世纪，至少有十多个大数学家探索过微积分，而 Newton 和 Leibniz 则处于当时的顶峰．

第三类问题是求函数的最大值和最小值.例如求炮弹的最大射程事实上炮弹的射程与炮筒的倾斜角即发射角有关.十七世纪初Galilio* 就曾断言,在真空中当倾斜角为45°时,能获得最大射程.又如在天文学中要研究行星离开太阳的最远距离和最近距离.此外还有许多与日常生活有关的问题中也常常需要寻求函数的最大值和最小值.

第四类问题是求曲线所围成的图形的面积,曲面所围成的物体的体积,曲线的弧长,物体的重心等等.

微积分创立之后便获得巨大的应用.天文学,物理学,力学以及工程技术等有了微积分这一有力的数学工具,如虎添翼,加速了自身的发展.在数学内部,随着微积分应用的深入,也逐渐形成了一个庞大的数学系统,出现了许多非常重要的分支,如常微分方程、复变函数论、偏微分方程、变分法、微分几何等.

然而这一庞大的数学系统在当时却缺乏严格的理论基础,微分和积分的概念没有严格的数学表述方式,函数的概念模糊不清,甚至连何谓实数也只有一个直观的了解,所有这些导致人们对分析学的逻辑状况表现出强烈的不满.Abel** 在一封信中抱怨说:"人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处.这样一个完全没有计划和体系的分析,竟有那么多人研究过它,真是奇怪.最坏的是,从来没有严格的对待过分析.在高等分析中只有很少的几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明的".虽然如此,但在当时却不影响微积分的许多卓有成效的应用.不过随着时间的推移,数学和有关科学的进一步发展,微积分的严格化问题也就显得越来越重要了.

直到十九世纪,才开始由 Bolzano,Cauchy, Weierstrass*** 等数学家奠定了严格的分析学基础,他们首先给出了严格的极限理论,然后在这一理论基础上建立起严格的微积分学.

---

* G. Galilio (1564～1642),意大利物理学家,天文学家.

** N.H.Abel (1802～1829),挪威数学家.

*** B. Bolzano (1781～1848),捷克数学家,逻辑学家. A. L. Cauchy (1789～1857),法国数学家. K. Weierstrass(1815～1897),德国数学家.

1.2 从矩形的面积说起 逼近法

极限理论的最基本的方法是逼近法．在研究许多最简单的问题的过程中，如果没有逼近法也将寸步难行．每一个中学生都知道，边长分别为 a 和 b 的矩形的面积等于 ab，然而这一公式是怎么得出来的呢？

如果矩形的边长是正整数，设 $a=m$，$b=n$，m 和 n 都是正整数．用初等几何的方法可以将 a，b 两边分别作 m，n 等分，将矩形划分为 mn 个小正方形（图 1.2.1），每个小正方形的边长是 1，我们规定边长为 1 的正方形的面积为 1，那么便得到这一矩形的面积是 $mn=ab$．

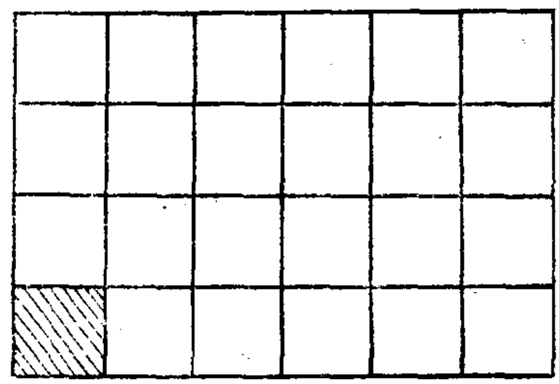


图 1.2.1

如果 a、b 中至少有一个是有理数但不是整数，问题就比较复杂了，但用初等方法仍可见效．不妨设 a，b 都是正有理数但都不是整数，$a=\frac{n}{m}$，$b=\frac{q}{p}$，（m 和 n 是互素的正整数，p 和 q 也如此），a，b 同时又可写为 $a=\frac{np}{mp}$，$b=\frac{qm}{pm}$．将矩形的两边作 mp 等分，整个矩形被划分为 $np\cdot mq$ 个小正方形，每个小正方形的边长都是 $\frac{1}{mp}$．边长为 $\frac{1}{mp}$ 的正方形面积等于 $\frac{1}{(mp)^2}$（为什么？请划分边长为 1 的正方形来考虑），于是便得到上述矩形的面积等于 $np\cdot mq\cdot\frac{1}{(mp)^2}=ab$.

如果 a，b 中至少有一个是正无理数，问题就非常复杂了，用初等方法将无法获得矩形的面积公式．现在不妨设 a，b 都是正无理数．人们早已知道对任何无理数，可以用有理数去逼近它，也就是说，对无理数 a，可以用一列比 a 小的有理数 a_n 不断增大地逼近 a，又可以用一列比

a 大的有理数 a'_n 不断减小地逼近 a. 换言之，是用两个有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{a'_n\}$ 左右夹逼 a. 同样可用有理数列 $\{b_n\}$ 和 $\{b'_n\}$ 左右夹逼 b. 而边长为 a_n 和 b_n 的矩形的面积是 a_nb_n，边长为 a'_n 和 b'_n 的矩形的面积是 $a'_nb'_n$，这两个面积正好夹逼边长为 a, b 的矩形面积（图 1.2.2），这时 $\{a_nb_n\}$ 和 $\{a'_nb'_n\}$ 构成左右夹逼的有理数列，不断逼近 ab，这就是所给矩形的面积.

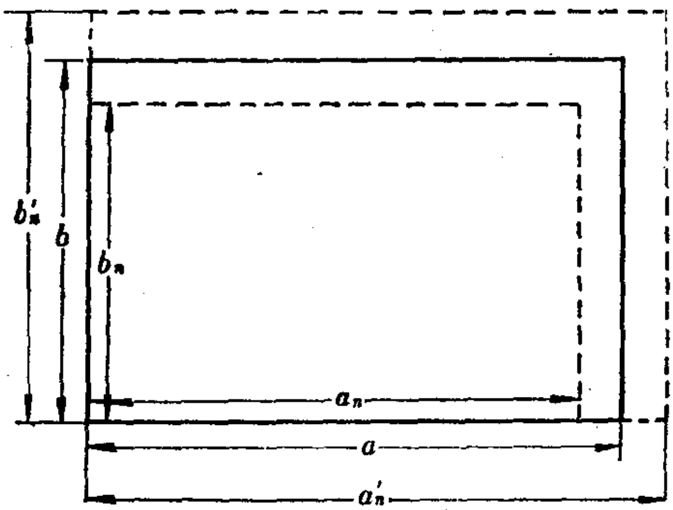


图 1.2.2

类似的问题很多，可以说，如果没有逼近法，连一些简单的几何问题都无法解决，更谈不上解决其他复杂的问题了.

刚才，在推演矩形的面积公式时，我们运用了下列原理：每一个无理数都可以用有理数列左右逼近该数. 更一般的又可以说，每一个实数都可以用实数列左右夹逼. 利用这一朴实的思想，我们就能够给出分析学中的一个基本原理——**实数系连续性的解析表达**.

1.3 实数系连续性的解析表达

实数系的连续性是整个分析学的基础之一，从直观上看，实数系的连续性就是：实数轴是一条没有间断的直线. 然而这种直观描述是无法作为数学推演的依据和手段的，它不是逻辑工具，因此我们必须给这一直观认识以严格的解析表达，才能够使之成为分析学的重要基础. 这一表达就是 1.2 中所阐述的原理：

实数系连续性原理 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个实数列，满足下列条件：

(i) $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots$，即 $\{a_n\}$ 是单调增加的，

$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \cdots$，即 $\{b_n\}$ 是单调减少的．

(ii) $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$，$a_n b_n$．即 a_n 和 b_n 不断逼近．

则存在唯一的实数 ξ，使 $a_n \to \xi$，$b_n \to \xi$，即 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别左右夹逼 ξ．

又可以将该原理表达为下列形式：

区间套定理 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间，满足条件：

(i) $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$，

(ii) $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$．

则存在唯一实数 ξ，$\xi \in [a_n, b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$．

注 1 若在实数轴上将原点 O 去掉，这时连续性原理(区间套定理)可能不成立，例如考虑 $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right](n=1,2,3,\cdots)$，它满足区间套定理的条件，但不存在属于所有$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$的 ξ．这从反面告诉我们，上面所给出的解析表达确实描述了实数的连续性．

注 2 在区间套定理的条件中，若仅将闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$改为开区间列 $\{(a_n, b_n)\}$，其余条件不变，结论是否仍成立？考虑$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$，将得出什么结论？请读者回答．

1.4 数列极限的性质和运算

在中学的数学课程中，已经讲授了数列极限的定义，这里再重复一下．设数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ (a 是某一常数)，则称 $\{a_n\}$ 收敛，且收敛于 a，又称 a 是 $\{a_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \text{ 或 } a_n \to a (n \to \infty),$$

有时也简记为 $a_n \to a$．不收敛的数列称为发散的．

在上面的定义中，“存在正整数 N”是指在数列中存在第 N 项；“当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$”是指第 N 项以后的所有 a_n 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com