汪诚义 编著

模糊数学引论

北京工业学院出版社

模糊数学引论

汪诚义 编著

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书为工科各专业研究生和高年级大学生的模糊数学课的教科书或参考书。

本书系统地讨论了模糊数学各个方面的一些基本概念和性质以及应用上的一些重要方法。内容包括：模糊子集及其性质；模糊关系；模糊映射；模糊变换；模糊规划；模糊系统；模糊控制；模糊逻辑和模糊概率等。

本书贯彻“少而精”和“循序渐进”的原则，结合工科学生的特点，概念论述深入浅出，简明精炼，并且系统性强，是一本具有一定理论深度的入门书。

本书也可以作为具有大专文化水平的工程技术人员自学模糊数学的参考书。

模 糊 数 学 引 论

汪诚义 编著

北京工业学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
河北省三河县中赵甫印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 6印张 129千字
1988年10月第一版 1988年10月第一次印刷
ISBN 7-81013-007-2/O·1
印数：1—12000册 定价：1.25元

前　言

这本书是为工科研究生的模糊数学课程而编写的教材，也适合于其它有关人员自学之用。

作者于1980年下半年在北京大学数学系对高年级学生和研究生开设模糊数学选修课。当时主要参考书为两本英文书：

（1）法国A. Kaufmann 著“Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets”

volume 1，1975年

（2）罗马尼亚C. V. Negoita和D. A. Ralescu 著的英译本“Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis”1975年

后来承蒙汪培庄和贺仲雄等同志送给我一些资料和讲义，这样经过教学过程，初步形成了一份讲义。

1984年下半年，作者在北京工业学院对工科研究生开设模糊数学选修课，由于听课对象有所改变，所以教学内容也作了相应的改变。重新编写了一本讲义，增加一些实用性的内容，删掉一些太抽象的内容，而把L-模糊子集和模糊拓扑空间作为附录进行简单介绍。

1985年和1986年作者在北京工业学院对工科研究生继续开设模糊数学选修课，基本上按照这本讲义进行讲授，反映效果良好。现在结合这几年教学实践，编著了这本《模糊数

学引论》，主要作为工科研究生学习模糊数学课程的教材。重点放在一些基本概念和常用方法方面，注意贯彻“少而精”和“循序渐进”的原则。由于大多数听课的研究生没有学过集合论，缺少必要的基本知识，这样直接学习模糊集合论没有对比的基础，有些概念就不容易理解，所以本书用了一章的篇幅讲述集合论中最必要的基本知识。对于学过集合论的读者，这一章可以不看。

由于作者水平所限，错误与不妥之处一定不少。衷心地希望读者提出宝贵的意见，以便进一步修改。

北京工业学院应用数学系

汪诚义

1986年12月

目　　录

绪　论

一、什么是模糊数学?

(1)模糊性现象及其数学模型问题　模糊数学的产生与计算机科学的发展及应用有密切关系。世界上的许多事物都具有模糊性。人们对模糊事物进行识别和判断的能力较强,而计算机处理各种模糊现象就需要建立各种描述模糊现象的数学模型并变为计算机能够执行的指令。过去的经典数学没有描述这种模糊现象的合适的数学模型。例如,我们要在人群中找一个并未见过面的人,别人告诉我们此人的特点是"高个子","大胖子","长头发","大胡子"。这样,我们就能根据这些带模糊性的概念来进行识别和判断。可是要计算机来判断这样一个人就困难重重了。身高多少算"高个子"?体重多少算"大胖子"?多长的头发才符合"长头发"?有多少根胡子才是"大胡子"?按照过去经典数学的模型,每一种特征给出一个标准,符合者就是,不符合者就不是。这样,在四种特征都符合者中再去判断。这种做法并不合适。如果规定身高1.8米以上算"高个子",那么身高1.79米就不是"高个子"吗?同样地,如果规定有5000根以上胡子算"大胡子",难道有4999根胡子仍不能算"大胡子"?这种"一刀切"的做法把许多有用的信息都丢掉了。所以,对关于这种模糊概念的事物先规定一个标准,然后化为普通子集的模型来考虑的做法,并不合适。

1965年美国加利福尼亚州大学控制论教授扎德（L.A·Zadeh）提出一种模糊子集的概念。对一个元素是否属于某个子集不是简单地肯定或否定，而是对属于程度用"隶属度"给予一种刻画。例如按照中国人目前的状况，我们规定身高1.8米以上属于"高个子"这个子集的"隶属度"为1，而身高1.6米以下属于"高个子"这个子集的"隶属度"为0，身高1.6米至1.8米之间按比例给予〔0，1〕中的一个数作为"隶属度"，亦即身高1.78米属于"高个子"子集的"隶属度"为0.9，身高1.76米属于"高个子"子集的"隶属度"为0.8，依此类推。这种子集称为模糊子集。每个元素对模糊子集都有一个"隶属度"刻画其属于的程度。如果我们用四个模糊子集分别表示上面四个带糊模性特征的概念。这样，人群中每一个人相应于四个模糊子集有四个"隶属度"，对其进行综合评判就能较好地找到目标。这种把经典数学中的集合理论推广到所谓模糊集合理论是模糊数学的基础。

想使机器人代替人类的脑力劳动，其中一个首要问题就是如何将人类的思维和语言建立起数学模型。控制论创始人维纳说过："人具有运用模糊概念的能力"。确实，人脑善于判别和处理不精确的、非定量的模糊现象，并从中得出具有一定精度的结论。模糊数学提供研究模糊性事物的数学模型。所以模糊数学的产生和发展与计算机科学的发展及应用有着密切关系。

（2）模糊性与随机性　模糊性与随机性都属于不确定性，它们之间有何异同呢？模糊子集的隶属度为〔0，1〕中的一个数，与概率的概念是否是一回事呢？我们通过一个典型的例子来说明这是两种不同的概念。例如，某工厂的产品

共有四种等级，以a表示一等品，其概率 $p(a)=0.5$，以b表示二等品，其概率$p(b)=0.3$，以c表示三等品，其概率$p(c)=0.15$，以d表示四等品，其概率$p(d)=0.05$。这里"一等品"的概率是普通随机事件的概率，因为"一等品"的概念是明确的。但是如果我们问"质量好的产品的概率是多少?"，这时"质量好的产品"是模糊概念，我们就要用模糊子集来描述。譬如，规定一等品属于"质量好的产品"这个模糊子集的隶属度为1。二等品属于"质量好的产品"这个模糊子集的隶属度为0.5。三等品属于"质量好的产品"这个模糊子集的隶属度为0.1。四等品属于"质量好的产品"的隶属度为0。用扎德的记法，这个模糊子集表示为

$$\underset{\sim}{A}=(1/a)+(0.5/b)+(0.1/c)+(0/d)$$

其中a，b，c，d为元素，相应地，上面的数分别为它们的隶属度。

这样"质量好的产品"的概率考虑为

$$\begin{aligned} p(\underset{\sim}{A}) &= 1\times p(a)+0.5\times p(b)+0.1\times p(c)+0\times p(d) \\ &= 1\times 0.5+0.5\times 0.3+0.1\times 0.15 \\ &=0.665 \end{aligned}$$

这就是所谓模糊事件的概率。模糊事件

〔思考题〕 试比较上面的概率与"一等品或二等品或三等品出现的概率"两个概念的异同。

另外，可以考虑一种通常随机事件的模糊概率（也称为语言概率）。例如，"抽到一等品的可能性较大。"这里事件"抽到一等品"为通常随机事件，并不模糊。但其出现的程度用"可能性很大"却是模糊的。那么，我们用模糊子集来表示"可能性很大"这种模糊概率(语言概率)。譬如规定：

概率为1属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为1；

概率为0.9属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为0.95。

概率为0.8属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为0.9。

概率为0.7属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为0.7。

概率为0.6属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为0.4。

概率为0.5属于“可能性很大”模糊子集的隶属度为0.1。

概率为0.4以及0.4以下属于“可能性很大”模糊子集的隶属度皆为0。

我们这里只考虑有限个概率的情形，概率集为{1，0.9，0.8，0.7，0.6，0.5，0.4，0.3，0.2，0.1，0}。“可能性很大”是它的一个模糊子集，而不是它的一个元素。这样，用概率集的模糊子集可以表达这种模糊概率（语言概率）。

当然，还可以考虑一下模糊事件的模糊概率（语言概率）。例如，“质量好的产品抽到的可能性很大”。如何描述它？留给读者去思考。

由此可见，隶属度是描述模糊性，概率是描述随机性，而模糊性与随机性是两个不同的概念。

二、模糊数学发展简介

（1）国外发展情况 1965年美国加利福尼亚大学控制论教授L. A. Zadeh发表模糊数学的第一篇论文《Fuzzy Sets》（模糊集）刊登在杂志《Information and Control》8，p.p.338—353，1965。文章中首先提出了模糊子集的概念，建立了模糊子集的“并”、“交”，“补”的运算。译文可见《模糊集合、语言变量及模糊逻辑》一书。（扎德著，陈国权译。科学出版社1982年出版。）

1967年 Goguen 考虑 L-模糊子集，把隶属度取值由〔0，1〕推广到一种称为“格”(Lattice）的代数结构的集合，并且讨论了模糊关系。1968年 Chang 提出模糊拓扑空间，1973年 Goguen 又讨论 L-模糊拓扑空间。

1968年 Zadeh 讨论了模糊事件的概率问题，1969年他引进了模糊语法，1971年他又讨论了模糊系统问题。

1969年 Marinos 提出模糊逻辑分析。1969 年 Chang 提出在模糊环境中进行判决的问题。

1973年 E. S. Santos 提出模糊序列函数。D. M. Davio and A. Thayse 提出模糊函数表达式。1974 年 A. Kandel 讨论模糊开关函数的性质。1975年 Negoita 和 Stefanesco用模糊关系概念构造模糊系统的状态方程。

从1965年到 1970 年共发表有关论文65篇，到 1975 年已有229篇论文，到1978年增加到2000多篇论文，并有《模糊集合与系统》杂志创刊。后来发表的论文已经不胜枚举，各种专著也相继问世，在墨西哥、夏威夷等地还举行过多次国际性学术会议。

(2)国内发展情况 最早发表介绍性的文章主要有：

张锦文、潘雪海《弗齐集合论》计算机应用与应用数学 1976年第 9 期。

汪培庄、钱敏平、刘来福《介绍一门新的数学——模糊数学》1978年10月13日光明日报。

楼世博、金晓龙《模糊数学》 自然杂志 1978年第 1 卷第 6 期。

汪培庄《模糊数学简介(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)》数学的实践与认识 1980年。

楼世博《模糊数学及其应用讲座》国外自动化1980年第3期第4期1981年第1期第2期等等。

早期的学术报告与论文主要有：

汪培庄、钱敏平等五人《概率论与模糊数学》1978年全国第二次概率论会议上报告。

王子孝《模糊拓扑空间分离公理》 吉林师大学报 1979年第1期。

蒲保明、刘应明《不分明拓扑学(I)——不分明点的邻近构造与Moore—Smath式收敛》四川大学学报 1979年第1期。

钱敏平、陈传娟等《利用模糊集理论进行癌细胞识别》生物化学与生物物理进展 1979年第3期。

吴望名《弗晰图与弗晰树》数学的实践与认识1980年第4期。

吴从炘《不分明凸分析(Ⅰ)》哈工大科研报告第27期等等。

翻译和编写的书籍主要有：

《模糊集在系统分析中的应用》[罗]拉莱斯库等著 汪浩等译 湖南科技出版社1980年11月。

《最新模糊集理论》 [日]水平雅晴著 欧阳绵译 应用数学与计算数学 1980年第3期。

《模糊集合、语言变量及模糊逻辑》[美]扎德著 陈国权译 科学出版社出版 1982年5月。

《模糊系统理论入门》[日]浅居喜代治[罗]拉莱斯库等著 赵怀汝译 北师大出版社出版 1982年9月。

《模糊数学及其应用》 贺仲雄编 天津科技出版社出

版 1981年。

《模糊数学方法与应用》 冯德益等编 地震出版社出版 1983年7月。

《模糊数学》 楼世博等编 科学出版社出版 1983年8月。

《模糊集合论及其应用》 汪培庄编 上海科技出版社出版 1983年11月等等。

1982年全国性的《模糊数学》杂志创刊。1983年1月中国模糊系统与模糊数学学会成立。学会成立后，国际上不少模糊数学专家来华讲过学。办过不少形式短训班。许多大学开设了模糊数学课。1984年在美国夏威夷召开国际模糊数学会议，我国有八名代表参加，一些论文获得好评。目前，我国模糊数学理论与应用发展迅速，应用广泛。

第一章　有关集合论的基本知识

§1.1　集合的概念

定义1.1.1　具有某种共同性质的事物的全体称为集合，或简称为集。而集合中的每一个事物称为这个集合的元素。

例1　某班全体同学组成一个集合，每一位同学是该集合的一个元素。

例2　自然数集 $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，有理数集 $Q=\{x|x$为有理数$\}$，实数集 $R=\{x|x$为实数$\}$。

有些集合直接地把所有元素都列出来，而一般地，把具有共同性质 P 的元素x的全体的集合记以

$$S=\{x|P(x)\}$$

例如　　$R_+=\{x|x>0\}$

就是正实数集。

定义1.1.2　集合 X 中部分元素组成的集合 A 称为 X 的子集。我们把不包含任何元素的集合称为空集，记以$\varnothing$，它与 X 也都看作 X 的子集。除X以外，X 的所有其它子集都称为 X 的真子集。

关于 X 的子集 A，我们记以 $A\subseteq X$，称为 A 被包含于 X。含有相同元素的两个集合称为相等，记以 $A=B$。它的充分必要条件为 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。这对于证明一些集合的等式很有用。

例 3 设 $X=\{a, b, c\}$，则它共有八个子集。除空集 $\varnothing$ 和 X 外，还有 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{b, c\}$，$\{c, a\}$。

定义1.1.3 集合 X 的所有子集（空集和 X 本身也看作子集）作为元素组成的集合称为 X 的幂集。记以

$$P(X)=\{A \mid A \subseteq X\} \tag{1.1.1}$$

若 X 有 n 个元素，则 P(X) 有 2^n 个元素。

定义1.1.4 所谓 X 的子集 A 的特征函数如下

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x \in A \quad (x\text{属于}A)\\ 0 & x \notin A \quad (x\text{不属于}A)\end{cases} \tag{1.1.2}$$

由于子集 A 与它的特征函数 χ_A 有对应的关系，所以X 的幂集与 X 的子集的特征函数全体相对应。我们把 X 的子集的特征函数全体组成的集合记以

$$Ch(X)=\{\chi_A \mid A \subseteq X\} \tag{1.1.3}$$

定义1.1.5 设 X，Y为两个集合，则称

$$X \times Y=\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \tag{1.1.4}$$

为 X 和 Y 的直积集。

例 4 设 $X=R$，$Y=R$（R为实数集），则

$$R \times R=\{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$$

就是对应平面上的点的全部实数偶。

类似地，可以引进n 个或无穷多个集合的直积集。把它看作集合的一种直积运算，它具有结合律，即

$$(X \times Y) \times Z=X \times (Y \times Z)$$

而交换律一般却不成立。

定义1.1.6 若 $A \subseteq X \times Y$，$B \subseteq Y \times Z$

则

$$A \circ B=\{(x, z) \mid \exists y \in Y, \text{使得}$$

$$(x, y)\in A, (y, z)\in B\} \qquad (1.1.5)$$

是 $X\times Z$ 的一个子集，称为 A 与 B 的复合集(这里记号"$\exists$"表示"存在")。

值得注意：这种复合具有结合律，而交换律一般不成立。

§1.2 集合的运算及其基本规律

定义1.2.1 设 X 为集合，A，B 为 X 的子集，则 A 与 B 的并集为

$$A\cup B=\{u\mid u\in A \text{或} u\in B\}$$

A 与 B 的交集为

$$A\cap B=\{u\mid u\in A \text{且} u\in B\}$$

A 的补集为

$$\bar{A}=\{u\mid u\in X \text{且} u\notin A\}$$

关于集合的并、交、补运算有下面一些基本律．设 A，B，C 为 X 的子集。

(1)交换律

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

(2)结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(3)幂等律

$$A\cup A=A$$

$$A\cap A=A$$