魔阵

算法与程序设计

顾朝曦 著

科学技术文献出版社

魔阵算法与程序设计

顾朝曦　著

科学技术文献出版社

(京)新登字130号

内 容 简 介

本书介绍了魔阵问题的起源及一些常见的魔阵算法，列举了前人所发现的一些奇特的魔阵。在魔阵新解这一章中证明了任意（N）阶魔阵的存在性（N＞2），并给出了一个非常精炼的求解魔阵的算法，同时用BASIC、PASCAL等六种常用的程序设计语言分别为它编写了程序。本书对所述的各种解魔阵算法均作了较为完整的介绍，并就几个主要算法的复杂性进行了分析。书中所附的魔阵范例可供读者学习时参考。通过对解魔阵算法的研究，可以给我们许多启发，对于探索程序设计的方法及技巧颇有裨益。

本书可供高等院校的理工科师生及社会各界的程序设计人员阅读、参考。

魔阵算法与程序设计
顾朝曦 著
科学技术文献出版社出版
（北京复兴路15号 邮政编码100038）
中国科学技术情报研究所印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 3.5印张 64千字
1993年2月第1版 1993年2月第1次印刷
印数：1－2000册
科技新书目：282—128
ISBN 7-5023-1821-6/TP·98
定价：3.55元

前　　言

魔阵问题是一个古典的数学问题。几千年来，魔阵的构造与研究迷住了许许多多的数学家和数学爱好者。电子计算机的诞生为人们研究魔阵问题提供了强有力的工具，从而大大方便了高阶魔阵的构造与其正确性的检验。虽然前人已发现了不少奇特的魔阵，并设计出了一些构造魔阵的算法，然而这些算法都只是对某一类（如奇阶的，或双偶阶的，或单偶阶的）魔阵构造有效，一直没有找到一个“通解”。本书在第四章中向读者介绍的新的构造魔阵的算法，它对任意阶的N（N＞2），均能构造出相应的魔阵来。

构造魔阵算法的设计及实现是计算机程序设计教程中的范例之一。研究魔阵的算法及程序不仅能自得其乐，而且可以用对某个构造魔阵算法进行编程的方法来比较几种程序设计语言的表达能力、运算效率等指标。

为了便于说明分析程序的结构，本书选用BASIC语言作为主要的编程语言。但对第四章中介绍的新的解魔阵算法，则选用了ALGOL(60)、FORTRAN、BCPL、C、BASIC和PASCAL等六种常用的程序设计语言分别进行了编程。相信这当中必有读者所熟习的语言。

本书的读者对象为高校的理工科师生及社会各界的程序设计人员。书中各章均附有习题，有助于读者全面、准确地掌握各章的内容。本书亦可作为程序设计技巧和算法设计教程的参考书。

由于作者水平所限，书中谬误之处在所难免，恳请读者指正。

作　者

目　　录

第一章　魔阵及其起源

一、何谓魔阵

魔阵（英文名称Magic　Square），有人叫它做幻阵，也有人称它为魔方或幻方。一提到魔方，兴许不少人会联想到1975年初，由匈牙利建筑师爱尔内·鲁毕克教授发明的一种正方体形状的智力玩具，其名称也叫做魔方，全称叫“鲁毕克魔方”。它是当时世界上唯一用发明者本人的名字命名的玩具。1978年，这个由六种颜色，共26个小色子组成的一个大色子荣获了布达佩斯国际博览会最佳奖。随后，鲁毕克魔方在全球创造了销售新纪录。不过此处所述魔方与鲁毕克魔方完全是两码事。

俗话说“名不正，则言不顺”。为了避免混淆，我们在此约定，称Magic　Square为魔阵。它是指这样一种$n\times n$阶的方阵，该方阵以n^2个互异的自然数为其元素，同时满足各行、各列及主对角线元素之和均相等的条件。

通常以1到n^2这n^2个自然数来构造一个$n\times n$阶的魔阵。最简单的魔阵是3×3阶的（见图1－1）。

4	3	8
9	5	1
2	7	6

图1－1

读者可以根据Magic Square的上述定义，自行证明 2×2 阶的魔阵不存在。

若以魔阵的行（或列）数来表示它们的阶数，那么一个含 n^2 个元素的魔阵其阶数为n。把n阶的魔阵记之为Mn，则上图就是一个 M_3 的例子。其各行、各列及主对角线元素之和均为15。

以上已介绍了一个由1到9所组成的3阶魔阵，那么4阶、5阶、6阶或是更高阶的魔阵是何模样呢？它们的行和、列和又是多少呢？

一个以1到 n^2 为元素的魔阵，其全部元素之和是

$$\sum_{i=1}^{n^2} i=\frac{n^2(1+n^2)}{2}$$

由魔阵每行元素之和相等的性质可知

$$\sum_{行}^{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n^2} i}{n}=\frac{n(1+n^2)}{2}$$

这实际上也是它各列及主对角线元素之和，称之为魔阵的行和常数，简记为 $\sum_{行}^{n}\left(或\sum_{L}^{n}\right)$。

虽然还没有举出更多的魔阵的例子，但由此可以推出，4阶魔阵（即 M_4）的行和常数是 $\frac{4(1+4^2)}{2}=34$，5阶魔阵的行和常数是 $\frac{5(1+5^2)}{2}=65$，……，25阶魔阵的行和常数是 $\frac{25(1+25^2)}{2}=7825$……如果它们存在的话。本书的第四章证明了（$N>2$ 的）任意阶魔阵的存在性，并给出了构造任意（N）阶魔阵的算法及 M_3、M_4、……、M_{25} 的范例。

魔阵可分为奇阶和偶阶两大类。出于构造魔阵过程中的一些具体考虑，对偶阶的魔阵又可进一步分为单偶阶魔阵与双偶阶魔阵。也就是说，一个阶数N，若可表示为 $2m+1$（m为自然数），则称它

为奇阶的（$N=3$，5，7，……）；如果N可写成$2(2m+1)$的形式，则称它为单偶阶的（$N=6$，10，14，……）；如果N呈4m的形式，则称它为双偶阶的（$N=4$，8，12，……）。当读者看到第四章时就会发现，对$N=2m+1$，$N=2(2m+1)$及$N=4m$（$m=1$，2，3，……）都已找到了求解算法，从而证明了（$N>2$的）任意阶魔阵的存在性！

M_3和M_4的构造读者以笔和纸为工具即可推算出来，但以此手段来构造M_5就有些勉强，对$N\geqslant 6$的魔阵构造就需要借助计算机来进行。所以，如何来设计构造魔阵的算法，又如何用程序设计语言来实现这些算法，诸多算法之中谁的复杂度最低，哪种程序设计语言最能有效简洁地表达这些算法思想等等，这些问题的提出，不仅能使程序设计者津津乐道于解魔阵算法的设计，也是软件工作者检测、考评一种程序设计语言的计算表达能力的重要手段和常用测度之一。可见，魔阵算法及其程序设计的研究是一个非常有趣的事情。当了解到魔阵是怎么回事之后，相信你一定也会试填、试算、细细琢磨一番，以考验自己的智力和技巧。

二、魔阵的起源

几千年来，魔阵的构造与研究，迷住了许许多多的数学家和数学爱好者。今天我们所知道的魔阵的第一个例子是2200年前夏禹治

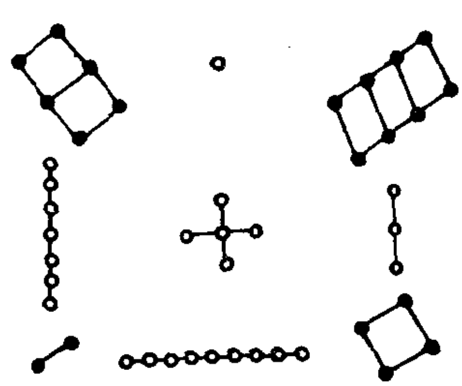


图1-2

水时，从洛水里浮起的一只大乌龟的背上发现的。龟背上有一个奇特的图案（见图1－2），后来人们就叫它“洛书”。

这个称之为洛书的魔阵是一个以图形表示的3×3阶方阵，它以串起的若干个点来表示数字。黑点表示偶数，白点表示奇数。下图是用数字对洛书所作的相应的描述（见图1－3）。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

图1-3

汉朝徐岳写的《数术记遗》一书中讲到的“九宫算”就是这一图形。类似这种“九宫算”的图形还很多。它们按不同的要求填进一些适当的数，使得行、列、对角线或圆周上、立体形的每个面上的数字之和均相等。

图1-4的各行、各列及每个主对角线之和均为65。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图1-4

图1-5的每个圆周上的数字之和均为20。

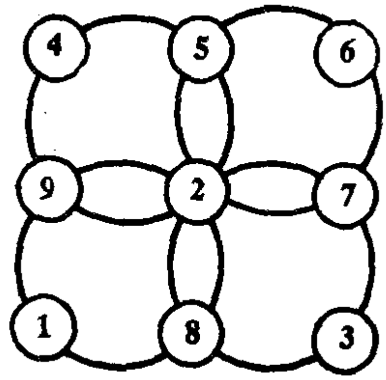


图1-5

图1-6的各面上4个顶角数字之和均为18。

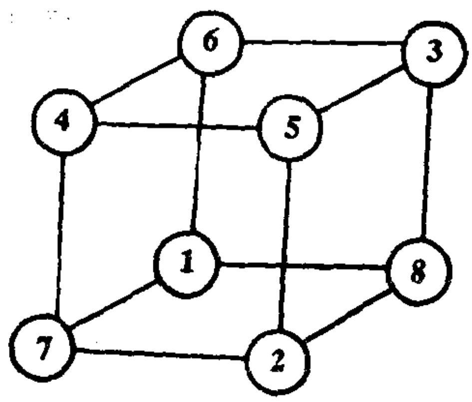


图1-6

我国宋朝著名数学家杨辉把这类图叫做“纵横图”。

在我国和印度等地，建筑物和艺术品上设计的魔阵一直为大家所关注。西方有些相命先生还常利用它来算命占卜。因为在中世纪，这种方阵奇特的性质被看作是魔术所造成的，所以人们把它看作吉祥之物，说它能保佑佩带者去对付各种邪恶。常能见到的一个被复制的魔阵是德国画家与木刻家杜瑞（Albrecht Durer）于1514年设计的（见图1-7）。由此也可以看到杜瑞那个时代的数字表现的形式。

图1-8是杜瑞魔阵所对应的数字描述。其底边的中间是1514，这正是杜瑞设计这个魔阵的年代。也许他就是先定下15和14这两个数的位置，再通过反复试填来定下其它位置上的数字的。

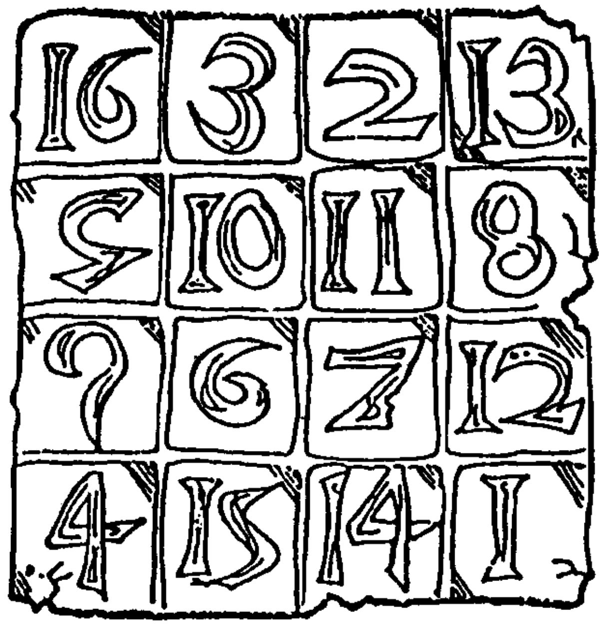


图1-7

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图1-8

看到这里，读者少不了要问：魔阵的形成除了通过反复试填其各元素，使之满足魔阵的定义外还有无其它方法？读者也一定想了解构造过程中的内在规律，一定会对构造魔阵的算法产生浓厚的兴趣。我们的前辈在这方面已做了大量卓有成效的工作，总结出了构造魔阵的不少巧妙算法。下一章中对此将作系统的介绍。

习　　题

1．验证下面的方阵是否为魔阵。

11	10	4	23	17
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
9	3	22	16	15

习题1-1

2．计算M_7，M_{10}，M_{35}的行和常数。

3．自己构造一个M_4。

4．填空，使下面的方阵呈一4阶魔阵。

16			13
	7	6	
	11	10	
4			1

习题1-4

5．试求出下图中a，b，c所有的正确组合。

a+b	a-(b+c)	a+c
a-(b-c)	a	a+(b-c)
a-c	a+(b+c)	a-b

习题1-5

6．用所学的程序设计语言编写一程序，判定下图是否为魔阵。

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
20	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

习题1-6

第二章　魔阵构造算法

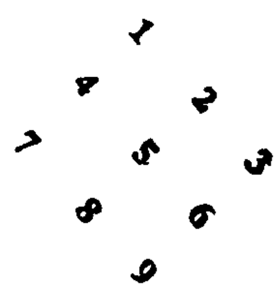
本章将介绍前人所总结出的一些魔阵构造算法。

奇阶魔阵的构造法与偶阶魔阵的构造法差异很大。奇阶魔阵比较容易构造。我们先介绍奇阶魔阵的构造法。

一、折 角 法

早在宋朝年间，我国对魔阵的构造法就有较深的研究。《续古摘奇算法》一书中记载了杨辉对“洛书”构造法的描述：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出”。

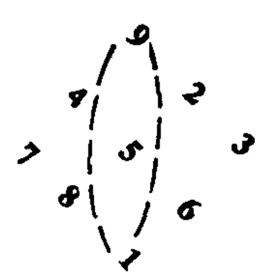
“九子斜排”就是斜过来依次排列出九个元素（见图2-1）。



九子斜排

图2-1

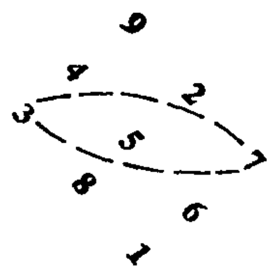
“上下对易”即把上下两个元素的位置对调一下（见图2-2）。



上下对易

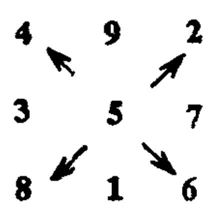
图2-2

“左右相更”也就是将左右两个元素的位置进行更换（见图2-3)。



左右相更
图2-3

“四维挺出”亦即挺出四个角上的元素（见图2-4)。如此加工所得的方阵便是一个M_3。



四维挺出
图2-4

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

图2-5

将此方法推广一下，就得到一套构造任意奇阶魔阵的算法——折角法。现以5阶方阵为例来介绍这种算法。

1. 自左而右，自上而下给奇阶方阵的各元素依次编号（从1开始，见图2-5）。

2. 连接方阵四边的中点，将方阵分为八个三角形，即 A_1、A_2、A_3、A_4、B_1、B_2、B_3和B_4（见图2-6）。

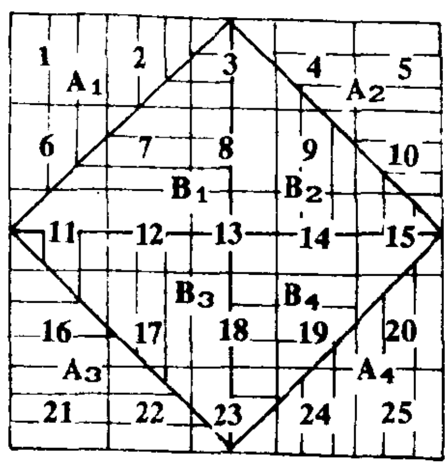


图2-6

3. 将A_1、A_2、A_3、A_4分别叠加到B_4、B_3、B_2、B_1上，则重叠部分所构成的新方阵就是一魔阵（见图2-7）。

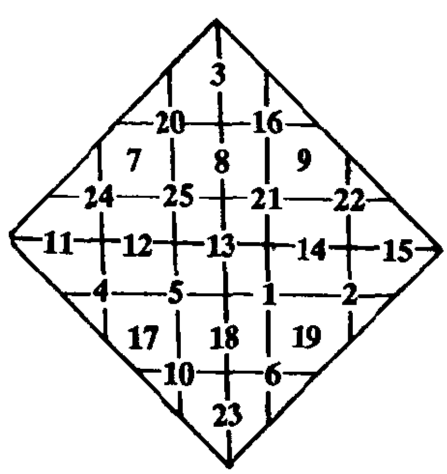


图2-7甲