新公式解开数学疑难题

石 泉 著

学 苑 出 版 社

新公式解开数学疑难题

石 泉 著

学苑出版社

新公式解开数学疑难题

石 泉 著

学苑出版社出版
（北京西四颁赏胡同四号）
新华书店北京发行所发行
北京市海淀区四季青印刷厂印刷
787×1092 1/32印张：7.25 插页： 字数：155千字：
印数：00001～8000册
1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷
ISBN7-80060—681-8/G・392 定价：2.25元

前　言

该书作者石泉在平面、空间关于圆锥曲线上任意一点坐标及其曲线外有关点、线位置的两种坐标系（极坐标与直角坐标）的关系作了科学系统的阐述，并导出有关的关系式（迄今为止，国内外文献中尚无此内容的报导）和插图121幅，从而解决了下列几个方面的问题：

一、纠正《数学手册》中对此内容的概念和图象的错误。

二、在平面解析几何（教材）中提到："极坐标和直角坐标的互化"，但其中尚缺少必要的新的关系式，因此，不能解决其中文图统一问题，该书填补了这方面内容的空白。

三、该书又填补了高等数学（教材）中这方面内容的空白。

这对大专院校和高中的教学、航天卫星运行轨迹计算、航海在圆锥曲线轨迹计算、天文、测绘、工业等方面都具有重要的参考价值。

承蒙北京师大著名数学家赵慈庚教授、北京大学数学系秦寿珪副教授都曾给予肯定、指点和帮助，并蒙：李文宜　骆是愚　孙承佩　陈方　沙里　唐万延　金若年　周醒吾　周幼吾　周莉吾　周惕吾　郑兆兰　曹青阳　田东平　吴伟强　陈志伟　赵公勤　李蓼群　王计凯　赵明仁　王茂林　罗春山　汪东林　王多福　王多禄　王杰明　王炳麟　韩士增　王景华　黄文兴　王莳　及学苑出版社的同志们的大力支持

和协助，在此一并鸣谢。

读者对象：大专院校和高中师生、航天、航海、测绘、工业的科技人员。

作者对本内容初稿于1963年春业已就绪，由于种种原因，该书未能按时问世；现为了实现四化之需要，将这本小册子向读者见面。

因作者水平有限，难免有缺点和错误，欢迎读者批评指正。

作 者

1990年元月

目　录

空 间 部 分

平 面 部 分

圆锥曲线在直角坐标系和极坐标系的关系中主要是要解决曲线上任意一点坐标、其他元素表达式及其图象，叙述如下：

根据直角坐标系、极坐标系和圆锥曲线各自定义、性质，导出两种坐标系各自圆锥曲线方程；确定两种坐标系各自原点的位置及它们之间的距离；协调这些方程的运算顺序，即由一种坐标系圆锥曲线方程，运用与两种坐标系有联系的方程转化到另一种坐标系圆锥曲线方程的运算，可得曲线上任意一点坐标就有三对不同的数值，再将所得若干个点坐标及其他元素，则得圆锥曲线图象。

圆锥曲线的极坐标和直角坐标的关系

在平面上求圆锥曲线上的任意一点坐标，使这点坐标既在极坐标系上又在直角坐标系上，很明显，这就要有适合这两种（指极坐标和直角坐标，下同）坐标的关系式。

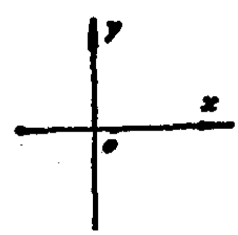

图 1

焦点在极轴OX上

§1 直角坐标系

在平面上选定两条互相垂直的直线，图 1，并指定正方

向（用箭头表示）；以两条直线的交点o作为原点，选取任意长的线段作为两条直线的公共单位长度，这样就可以建立一个直角坐标系。

这两条互相垂直的直线叫做坐标轴；一般其中之一条若是处于水平位置，且从左至右的方向是它的正方向，这条轴叫做横坐标轴，简称横轴或x轴。与x轴垂直的一条叫做纵坐标轴，简称纵轴或y轴，从下至上的方向是它的正方向。

图2　在平面上取一点P，过P分别作$PM \perp ox$，$PN \perp oy$，交点分别是M、N；设x轴上有向线段oM的数量为a（即P点到y轴的距离为$|a|$），y轴上有向线段oN的数量为b（即P点到x轴的距离为$|b|$），我们称a为P点的横坐标（简称横标），b为P点的纵坐标（简称纵标），写成（a，b）的形式，这样的一对有序实数（a，b）叫做P点的直角坐标。

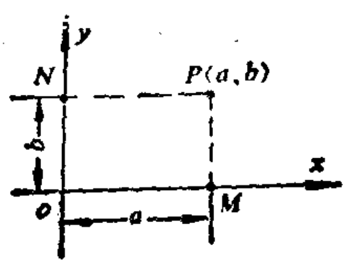

图 2

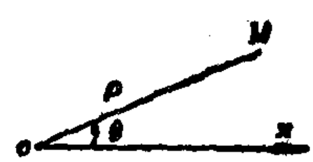

图 3

§2　极坐标系

图3　在平面内取一个定点o，引一条射线ox，再选定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向），这样就可以建立一个极坐标系，o点叫做极点，射线ox叫做极轴。

在平面内取任意一点M，用ρ表示线段oM的长度，θ表示从ox到oM的角度，ρ叫做点M的极径，θ叫做点M的极角，有序数对（ρ,θ）叫做点M的极坐标，极坐标是ρ，θ的点M，可表示为M（ρ，θ）.

当点M在极点时，它的极坐标$\rho=o$，θ可取任意值.

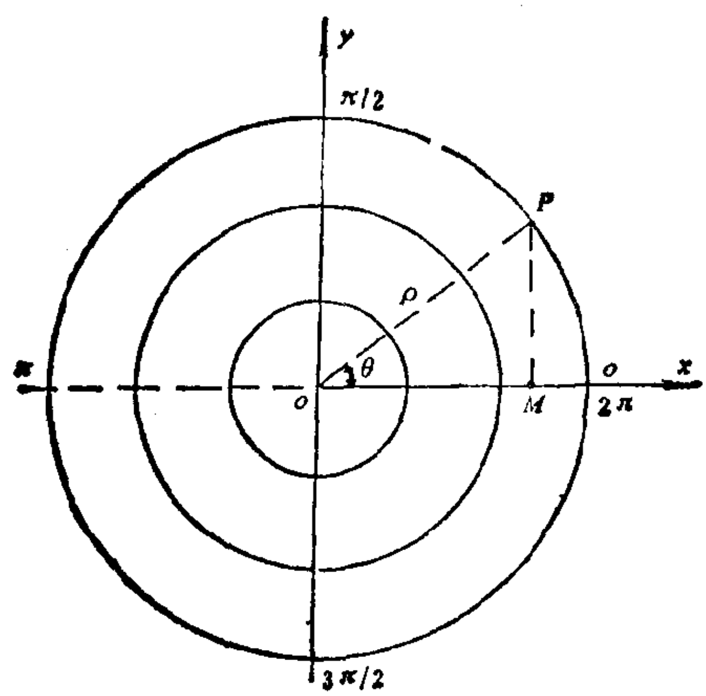

图 4

§3 极坐标和直角坐标的关系式（以极点o为原点）

图4　设ox、oy为直角坐标系的两个坐标轴，极坐标系的极点合于直角坐标系的原点o，极轴合于x轴；在平面上有一点P，对直角坐标系它的坐标为（x，y）；对极坐标系它的坐标是（ρ，θ）。

设　$x=oM$，　　$\rho=oP$，

　　$y=MP$，$\theta=\angle xoP$

$\therefore$　$x=\rho\cos\theta$　　　　（1）

$$y=\rho\sin\theta \qquad (2)$$

(1)^2+(2)^2 $\qquad \rho^2=x^2+y^2 \qquad (3)$

(2)÷(1) $\qquad \mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x} \qquad (4)$

(3)开平方 $\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (5)$

由(4) $\qquad \theta=\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \qquad (6)$

由(1)、(5) $\qquad \cos\theta=\frac{x}{\rho}$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (7)$$

由(2)、(5) $\qquad \sin\theta=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (8)$

(1)~(8)式，是平面上的点的坐标由极坐标化为直角坐标，反之，亦成立。

§4 圆锥曲线的极坐标方程

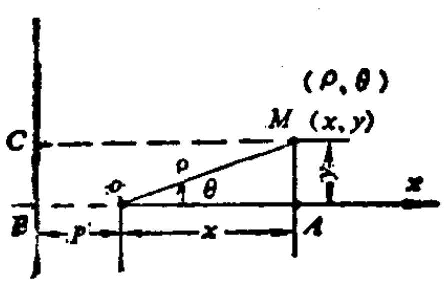

图 5

根据圆锥曲线统一定义图5 设动点M到一定点o（极点）与一条定直线的距离的比为一常量e，则M点的轨迹是圆锥曲线；使极轴ox垂直于定直线l，设$Bo=P$，$M(\rho,\theta)$（或$M(x,y)$）为轨迹上的任意一点，即

$$\theta=\angle xoM,\ \rho=|oM|\ (\text{或}|oM|=\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (9)$$

$$|CM|=|Bo|+|oA|=P+\rho\cos\theta\ (\text{或}P+x) \qquad (10)$$

令 $$\frac{|oM|}{|CM|}=e \tag{11}$$

(9)、(10)代入(11)

$$\frac{\rho}{P+\rho\cos\theta}=e$$

去分母 $$\rho=e(P+\rho\cos\theta)$$

∴ $$\rho=\frac{eP}{1-e\cos\theta} \tag{12}$$

方程(12)两边除以e，得 $$\rho=\frac{P}{1-e\cos\theta} \tag{12'}$$

这就是圆锥曲线极坐标方程

注 $o<e<1$ 是椭圆

$e>1$ 是双曲线

$e=1$ 是抛物线

§5 以极点o为原点，圆锥曲线直角坐标方程

思路1 根据圆锥曲线极坐标方程化成它的直角坐标方程

解 ∵ $$\rho=\frac{eP}{1-e\cos\theta}$$

去分母 $$\rho(1-e\cos\theta)=eP$$

$$\rho-e\rho\cos\theta=eP$$

∵ $$x=\rho\cos\theta$$

∴ $$\rho-ex=eP$$

平方 $$\rho^2=e^2(x^2+2Px+P^2)$$

∵ $$\rho^2=x^2+y^2$$

∴ $$x^2+y^2-e^2x^2-2e^2Px-e^2P^2=0$$

即 $$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2Px-e^2P^2=0 \tag{13}$$

由方程(12′)得$(1-e^2)x^2+y^2-2ePx-P^2=0$

思路 2　根据 § 4 的图5 中的M点的直角坐标仍应用圆锥曲线的轨迹定义求它的直角坐标方程

解　$\because$　$x=|oA|$，$|oM|=\sqrt{x^2+y^2}$，

$y=|AM|$，$|CM|=|BA|=P+x$

由动点M到一定点o与一条定直线的距离的比为一常量e，得

$$\frac{|oM|}{|CM|}=e$$

即
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+P}=e$$

$$x^2+y^2=e^2(x+P)^2$$

$\therefore$　$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2Px-e^2P^2=0$

注：同 § 4 的注

§ 6　圆锥曲线直角坐标方程化为标准方程

方程(13)两边除以$(1-e^2)$

$$\frac{1-e^2}{1-e^2}x^2-2x\cdot\frac{e^2P}{1-e^2}+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2P^2}{1-e^2}$$

配方　$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{e^2P}{1-e^2}+\left(\frac{e^2P}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}$$

$$=\frac{e^2P^2}{1-e^2}+\left(\frac{e^2P}{1-e^2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{e^2P}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{eP}{1-e^2}\right)^2$$

方程两边除以$\left(\frac{eP}{1-e^2}\right)^2$　得

$$\frac{\left(x-\dfrac{e^2P}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{eP}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2P^2}{1-e^2}}=1$$

$$\left(\text{或}\ \frac{\left(x-\dfrac{eP}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{P^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{P^2}{1-e^2}}=1\right) \qquad (14)$$

设$e<1$，这里$a^2=\left(\dfrac{eP}{1-e^2}\right)^2$，$b^2=\dfrac{e^2P^2}{1-e^2}$，

$$c^2=a^2-b^2=\frac{e^2P^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2P^2}{1-e^2}=\left(\frac{e^2P}{1-e^2}\right)^2$$

§7 （以$o'(o,o)$为原点）圆锥曲线直角坐标方程

以极点o向右（或向左、向上* 向下）平移$|c|$（或$\dfrac{P}{2}$）个单位后，得以$o'(o,o)$为原点圆锥曲线直角坐标方程。

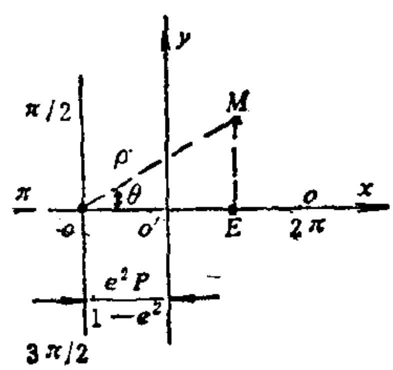

图 6

1° 若$e<1$，根据方程（14）

设
$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{e^2P}{1-e^2}=\rho\cos\theta-c \\ y'=y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad (15)$$

将方程（14）从极点o向右平移$c\left(=\dfrac{e^2P}{1-e^2}\right)$个单位

* 焦点在极轴oy上时，则以极点o向上（或向下）平移$c\left(\text{或}\dfrac{P}{2}\right)$个单位后，得以$o'(0,0)$为原点圆锥曲线直角坐标方程。

后，得以$o'(o, o)$为原点椭圆直角坐标方程是

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \tag{16}$$

图6　由方程（16）得

$$y'=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x'^2} \tag{17}$$

这里　$a^2=\left(\frac{eP}{1-e^2}\right)^2$，　$a=\pm\frac{eP}{1-e^2}$

$$b^2=\frac{e^2P^2}{1-e^2}, \quad b=\pm\frac{eP\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}, \quad (e<1)$$

$$\therefore y'=\pm\frac{\dfrac{eP\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}}{\dfrac{eP}{1-e^2}}\sqrt{\frac{e^2P^2}{(1-e^2)^2}-x'^2}$$

即　$$y'=\pm\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2}\sqrt{e^2P^2-(1-e^2)^2x'^2} \tag{18}$$

表一

2°同理　　设$e>1$时，则方程(14)变为

$$\frac{\left(x+\dfrac{e^2P}{|1-e^2|}\right)^2}{\left(\dfrac{eP}{|1-e^2|}\right)^2}-\frac{y^2}{\dfrac{e^2P^2}{|1-e^2|}}=1 \tag{19}$$

$$\left(\text{或}\frac{\left(x+\dfrac{P}{e^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{P}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\dfrac{P^2}{e^2-1}}=1\right)$$

这里　$a^2=\left(\frac{eP}{|1-e^2|}\right)^2$，$b^2=\frac{e^2P^2}{|1-e^2|}$　　(20)