本書遵照教育部專科學校課程標準編著

微積分學

省立高雄工專
數學研究會主編

興業圖書股份有限公司印行

本書遵照教育部專科學校課程標準編著

微積分學

省立高雄工專
數學研究會主編

興業圖書股份有限公司印行

中華民國六十七年三月一版

微積分學

(全一冊)

省立高雄工專
數學研究會
委　員

林久雄	劉雲水	張起英	鄭清貴
蘇文節	張太山	朱其福	鄭鐘英
李君雄	呂金河	謝憲忠	彭耀南

發行人：王志康
本公司登記證局版台業字第0410號
出版者：興業圖書股份有限公司
發行者：興業圖書股份有限公司
台南市勝利路一一八號
電話：三七三二五三號
郵撥南字三一五七三號
平裝定價 壹佰貳拾元
精裝定價 壹佰伍拾元

目　　錄

第一章　函數的極限與連續

1－1　極限明觀念與定義……………………………… 1
1－2　極限定理……………………………………… 5
1－3　單邊極限……………………………………… 8
1－4　連續…………………………………………… 12
1－5　無窮極限……………………………………… 17

第二章　導函數

2－1　導函數定義…………………………………… 24
2－2　導函數之幾何意義…………………………… 27
2－3　導函數定理…………………………………… 30
2－4　連鎖法則……………………………………… 35
2－5　隱函數之導函數……………………………… 40
2－6　高階導函數…………………………………… 42

第三章　導數之應用

3－1　切線與法線…………………………………… 45
3－2　函數的極大，極小，均值定理……………… 49
3－3　函數圖形之描繪……………………………… 59
3－4　極值之應用…………………………………… 64
3－5　速度與加速…………………………………… 69
3－6　微分近似值…………………………………… 72

第四章　超越函數的導函數

4—1　三角函數的導函數……80
4—2　反三角函數的導函數……87
4—3　對數函數的導函數……92
4—4　指數函數之導函數……98

第五章　積分

5—1　定積分定義與幾何意義……103
5—2　反導函數與微積分基本定理……106
5—3　不定積分……115

第六章　積分的方法

6—1　不定積分的基本公式……119
6—2　分部積分法……122
6—3　三角代換法……124
6—4　變數變換法……127
6—5　部份分式……129
6—6　數值積分……133

第七章　定積分的應用

7—1　曲線間的面積……138
7—2　曲線長……141
7—3　旋轉體體積……144
7—4　旋轉面面積……147
7—5　形心……150

第八章　不定型及瑕積分

8—1　柯西定理與不定型……155
8—2　其他不定型……163
8—3　瑕積分……167

第九章　數列級數

9—1　有限極數……173
9—2　數列的收斂與發散……178
9—3　無窮級數的收斂與發散……184
9—4　正項級數的審斂法……191
9—5　交錯級數與絕對收斂……197
9—6　冪級數與收斂區間……203
9—7　冪級數的微分與積分……206
9—8　泰勒級數與馬克勞林級數……211

第十章　平面曲線、向量、極坐標

10—1　平面向量之性質……220
10—2　平面曲線……225
10—3　切線向量……228
10—4　質點運動律……230
10—5　平面曲線的長度與旋轉面面積……232
10—6　極坐標的導數……236
10—7　極坐標系的區域面積與曲線長……239

第十一章　立體幾何

11—1　空間的直角坐標系……243
11—2　空間的向量……245
11—3　空間的直線……249
11—4　空間的平面……253

11—5 球面坐標與圓柱坐標……257

第十二章 偏導函數

12—1 多變函數……260
12—2 偏導數……266
12—3 連鎖律……268
12—4 全微分，近似值……273
12—5 切面與法線……276
12—6 極大，極小與拉格雷齊乘數方法……281

第十三章 重積分

13—1 二重積分的定義……291
13—2 累次積分……295
13—3 極坐標平面上的二重積分……302
13—4 反序轉換……306
13—5 三重積分……308
13—6 重積分的應用……311
13—7 線積分……314
13—8 葛林定理……321
附錄(1)……325
習題解答……331

第一章

函數的極限與連續

微積分中有一基本觀念，那就是極限。因此我們首先要介紹函數極限之定義及其定理。然後再介紹另一重要觀念連續。

1—1　極限明觀念與定義

若一函數 f，由 $f(x)=4x$ 所定義。當 $x=5$ 時，其所對應之函數值 $f(5)=20$。而我們觀察 x 值接近於 5 時，其對應函數值有些甚麼性質。

由下列對應函數值所成之表中

x	4	4.5	4.9	4.99	5.01	5.1	5.5	6
$f(x)$	16	18	19.6	19.96	20.04	20.4	22	24

我們似乎可以這麼說，當 x 之值接近 5 時，其對應函數值 $f(x)$ 接近 20。因此稱之爲“當 x 接近 5時，$f(x)$ 之極限値爲 20”而寫作

$$\lim_{x\to 5} f(x)=20$$

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4)$ 之值

解：　令 $f(x)=3x^2+4$，由上述直覺的極限概念可知當 x 之值接近於 2 時，$f(x)$ 之值接近於 16。　因此

$$\lim_{x\to a} 3x^2+4=16$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}$ 之值

解： 令 $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}$ ，$x\neq 3$

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}=\frac{\dfrac{3-x}{3x}}{x-3}=\frac{3-x}{3x(x-3)}=\frac{-(x-3)}{3x(x-3)}$$

因 $x\neq 3$，因此可化簡爲

$f(x)=-\dfrac{1}{3x}$，顯然可知，當 x 接近於 3 時，$-\dfrac{1}{3x}$ 之值接近於 $-\dfrac{1}{9}$，因此

$$\lim_{x\to 3} f(x)=-\frac{1}{9}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{y}-1}{y-1}$

解： 令 $f(y)=\dfrac{\sqrt{y}-1}{y-1}$，$y\neq 1$，$y\geq 0$

我們要求的是 $\lim\limits_{y\to 1} f(y)$ 之值，因爲 1 不在函數 f 之定義域中，因此我們不能直接代入求 $f(1)$ 之值。要先化簡爲

$$f(y)=\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}=\frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{(y-1)(\sqrt{y}+1)}=\frac{y-1}{(y-1)(\sqrt{y}+1)}$$

因 $y\neq 1$，可將因式 $y-1$ 消去而得

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{y}+1}$$

現在顯然可見當 y 接近於 1 時，$f(y)$ 之值接近於 $\frac{1}{2}$，因此

$$\lim_{y\to1} f(y)=\frac{1}{2}$$

例 4　求 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$ 之值

解：　令 $f(h)=\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$，$h\neq0$

我們要求的是 $\lim f(h)$ 之值，同理 $h=0$ 時，$f(0)$ 之值不定可化簡如下：

$$f(h)=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h\ ,\ h\neq0$$

當 h 值接近於 0 時，$f(h)$ 之值接近於 6

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=6$$

我們要正式爲極限下定義以前，要先介紹兩個名詞叫做“鄰域”及“去心鄰域”。

定義 1.　任意一包含 C 之開區間 (a,b) 稱爲 C 之鄰域。

定義 2.　C 之任一鄰域，如將 C 移掉，則稱爲 C 之去心鄰域。例如 $(a,c)\cup(c,b)$ 爲 C 之一去心鄰域。

定義 3.　若對 b 之一任一鄰域 N，均存在一個 a 之去心鄰域 D（包含在 f 之定義域中），使下式恒成立

$$\forall\ x\in D\ \Longrightarrow\ f(x)\in N$$

則我們稱函數 f 在 a 之極限等於 b，而寫作

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

不過由上述定義中，可知 a 不一定要在函數 f 之定義域中。因為我們只討論 a 之去心鄰域 D 中 x 之對應函數值 $f(x)$ 之性質，不必討論 $f(a)$ 之值。

倘若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，則存在一個值 b，使 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ 成立，而且 b 之值為唯一的。

註：“ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ 也可以定義如下

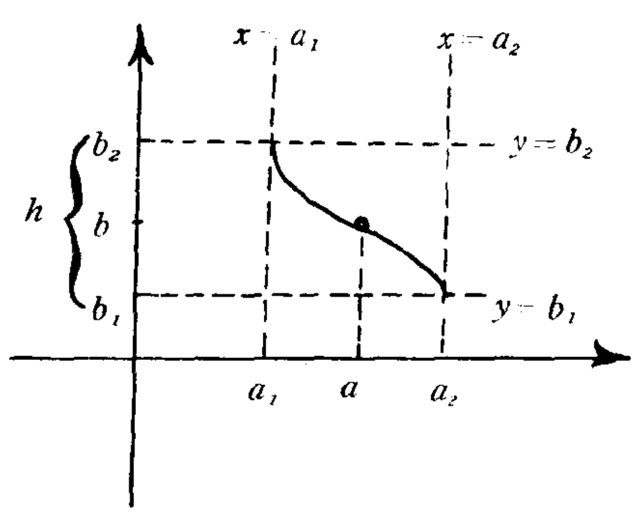
$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow$$
$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

“對 b 之任一鄰域 $N=(b_1,b_2)$，均存在一個 a 之去心鄰域 $D=(a_1,a)\cup(a,a_2)$ 使下式恆成立。

$$\forall x\ ,\ a_1<x<a_2\ ,\ x\neq a \Longrightarrow b_1<f(x)<b_2 \text{”}$$

其幾何意義為

函數 f 介於 $y=b_1$ 與 $y=b_2$ 之圖形，其對應 x 之值必介於 $x=a_1$ 與 $x=a_2$ 之間。



1—2　極限定理

在這一節裏我們要討論的是一些極限之基本定理以及如何利用定理求極限值我們將極限定理歸納如下：

定理 1.　若 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ，$\lim_{x\to a} g(x)=c$ ，則

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))=b+c ,$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)-g(x))=b-c$$

定理 2.　若 $\lim_{x\to a} f_1(x)=b_1$ ，$\lim_{x\to a} f_2(x)=b_2$ ，……，

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=b_n$$

則 $$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$$

定理 3.　若 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ，以爲一常數則

$$\lim_{x\to a} Kf(x)=Kb ,\quad \lim_{x\to a} (K+f(x))=K+b$$

定理 4.　若 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ，$\lim_{x\to a} g(x)=c$ ，則

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]=bc$$

定理 5.　若 $\lim_{x\to a} f_1(x)=b_1$ ，$\lim_{x\to a} f_2(x)=b_2$ ，……，

$\lim_{x\to a} f_n(x)=b_n$ ，則

$$\lim_{x\to a} (f_1\cdot f_2\cdots f_n)(x)=b_1 b_2\cdots b_n$$

定理 6. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$，則 $\lim\limits_{x \to a} f^n(x) = b^n$

（其中 n 為正整數）

定理 7. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$， $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$，則

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$ ，其中 $c \neq 0$

定理 8. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ，$b \neq 0$ 則

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{b}$$， 其中 $\sqrt[n]{b}$ 存在

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + x + 3)$ 之值

解： $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + x + 3) = \lim\limits_{x \to 1} 2x^2 + \lim\limits_{x \to 1} (x + 3)$

$= 2 \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} x + 3$

$= 2 + 1 + 3 = 6$

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x^2 + 5}$ 之值

解： $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{x^2 + 3} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 5} (x^2 + 5)} = \dfrac{1}{30}$

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + x + 1}$ 之值

解： $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2^2 + 2 + 1} = \sqrt{7}$

例 4 求 $\lim\limits_{x \to 2} [(x^3 - 8) / (x - 2)]$

解： $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)$

$=\lim\limits_{x\to 2}x^2+2\lim\limits_{x\to 2}x+4$

$=4+(2)(2)+4=12$

例5　討論 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{x^2}$

解： 因 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{x^2}$ 不存在

註：要計算 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 之值時，如果 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，則有

下列兩種情形：

①若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在　②若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

稱爲不定型。此類型之問題，待第八章詳論之。

習題1－2

利用極限定理，求下列各極限

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)$
2. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3+x-6)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to -2} (|x|^2-2|x|)$

11. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

12. $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3}\right)\right]$

14. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

16. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^m-9^m}{x-9}$ m：正整數

17. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^4-9^4}{x-9}$

18. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^3-9}{x-9}$

19. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2}{x^3+1}$

20. $\lim\limits_{x\to 5} x-[x]$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|+x^3}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+1}$

23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$

24. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{|y|-y}{y}$

25. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{x-3}$

1－3 單邊極限

定義 4. 若對 b 之任一鄰域 N，存在一開區間 $(a, a+\delta)$（包

含在 f 之定義域中），使下式恒成立。

$$\forall x \in (a, a+\delta) \Longrightarrow f(x) \in N$$

則稱爲函數 f 在 a 之右極限等於 b。寫作

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

“$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$”之意義，粗淺的說，也就是當 x 由右邊接近於 a 時，其對應函數值 $f(x)$ 接近於 b。

定義 5.　若對 b 之任一鄰域 N，存在一開區間 $(a-\delta, a)$（包含在 f 之定義域中），使下式恒成立。

$$\forall x \in (a-\delta, a) \Longrightarrow f(x) \in N$$

則稱函數 f 在 a 之左極限等於 b，而寫作

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

同理“$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$”之意義，也就是說，當 x 由左邊接近於 a 時，其對應值 $f(x)$ 接近於 b。

註：若 $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 存在，可以記作

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a+)$$，同理

若 $\lim_{x \to a^-} f(x)$ 存在，可以記作

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a-)$$

例 1　求 $\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x)$

解： 令 $f(x)=x^2-3x$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-3x)=-2$$

例 2 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}$

解： 令 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

我們要求的是函數 f 在 0 之左極限，即 $x<0$

則 $f(x)=\dfrac{x}{-x}=-1$ ，$x<0$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

定理 9. 若 f 爲一函數，則 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=b$，若且唯若

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=b.$$

例 3 求證 $\displaystyle\lim_{x\to n}[x]$ 不存在，其中 n 爲正整數

解： 因 n 爲正整數

$\displaystyle\lim_{x\to n^-}[x]=n-1.$ 且

$\displaystyle\lim_{x\to n^+}[x]=n$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to n}[x]$ 不存在

例 4 試判別 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ 是否存在？

解： 令 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$