高等学校教学参考书

理论力学
统考复习指导

郭福纯
刘思汉 编

东北工学院出版社

理论力学
统考复习指导

郭福纯　刘思汉　编

东北工学院出版社

前　言

为了适应全国本科《理论力学》评估统考和满足电大、函大、夜大、职大、业大学生自学、复习的需要，作者积数十年的教学经验，编写了《理论力学统考复习指导》一书。

全书分三部分：静力学、运动学和动力学。每部分都包括理论概要、解题方法指导和解题示例。内容全面、系统，简明扼要。

本书选材主要来自全国二十多所院校本科理论力学试题、少量研究生试题以及作者改编题。其中计算题 105 个，概念题 51 个，内容新颖，不与教材重复。例题中大多是综合性的，采取一题多解的方法，思路广、条理清晰，对启发学生思考，深入理解基本概念和基本理论是很有益的。特别是有利于培养分析问题和解决问题的能力。

为了便于自学和复习，本书注意由浅入深，由简到繁，主次分明，详略恰当。阅读时，不用再去复习理论力学课本，是一本有针对性的统考复习《理论力学》参考读物。

由于时间匆促，难免有错和不妥之处，恳望读者批评指正。

编　者

1987 年 6 月

目　　录

一、静力学

二、运动学

三、动力学

一、静 力 学

1-1 静力学的两个基本问题

1. 力系的简化。即将作用于刚体上的力系简化为与其等效的一个简单力系。

2. 刚体在力系作用下的平衡条件。

后者是静力学的中心问题。将刚体所受的力加以简化，主要就是为了推论力的平衡条件。同时也给今后学习动力学打下基础。

1-2 静力学的两个基本作用量——力和力偶

静力学的两个基本作用量——力和力偶，见表 1-1。

表 1-1

项目 \ 作用量	力	力 偶
(1) 要素	大小、方向、作用线	大小、转向、作用面
(2) 表示法	滑动矢量	力偶矩矢量（自由矢量）
(3) 作用效应	力通过刚体质心，使刚体产生平动。不通过质心，除使刚体产生平动外，还能使刚体绕质心转动	力偶只能使刚体产生转动。作用在有定轴刚体上，使刚体绕定轴转动。作用在无定轴刚体上，则使刚体绕质心转动
(4) 在轴上投影	与坐标轴方向有关	对任意轴恒等于零
(5) 对点取矩	与矩心有关	与矩心无关

续表 1-1

项目＼作用量	力	力偶
(6) 等效条件	等值、同向、共线	力偶矩矢量相等
(7) 性质	力的大小、方向、作用线都不能改变，不能平行移动	可在作用面内和在与作用面平行的平面内任意移转。对刚体的作用与力偶在作用面内的位置无关，并且只要保持力偶矩不变，可以同时改变力偶中的力的大小和力偶臂的长短

1-3 力系的简化

力系简化的依据是力线平移定理，根据这个定理，将力系向一点简化，可得到一个通过简化中心O的力和一个力偶。该力的大小和方向等于力系的主矢；该力偶的矩矢等于力系对简化中心O的主矩。

1. 简化过程。

$$\text{空间一般力系}(F_1,F_2\cdots\cdots F_n)\text{向一点}O\text{简化}\begin{cases}\text{空间汇交力系}\xrightarrow{\text{合成}}\text{主矢}R_o\\(F'_1,F'_2\cdots\cdots F'_n)\quad(R_o=\Sigma F'=\Sigma F)\\\qquad\qquad +\\\text{空间力偶系}\xrightarrow{\text{合成}}\text{主矩}M_o\\(F''_1,F_1),(F''_2,F_2)\cdots(F''_n,F_n)\\\left[(M_o=\Sigma m=\Sigma m_o(F)\right]\end{cases}$$

取不同的简化中心，一般情况下将得到不同的主矩，故主矩与简化中心的选取有关。由于主矢仅为各力矢量的矢量和，故显然与简化中心的选取无关。

2. 简化结果，见表 1-2。

表 1-2

主矢	主矩	简化结果	说明
$\boldsymbol{R}_0 \neq 0$	$\boldsymbol{M}_0 = 0$	合力	此时，合力作用线通过简化中心
	$\boldsymbol{M}_0 \neq 0, \boldsymbol{R}_0 \perp \boldsymbol{M}_0$		合力作用线离简化中心的距离 $d = \left\| \frac{M_0}{R} \right\|$
	$\boldsymbol{M}_0 \neq 0, \boldsymbol{R}_0 // \boldsymbol{M}_0$	力螺旋	力螺旋中心轴通过简化中心
	$\boldsymbol{M}_0 \neq 0$，$\boldsymbol{R}_0$ 不垂直 $\boldsymbol{M}_0$		力螺旋中心轴离简化中心的距离 $d = \left\| \frac{M_0 \sin\alpha}{R} \right\|$
$\boldsymbol{R} = 0$	$\boldsymbol{M}_0 \neq 0$	力偶	力系最终合成为力偶，在此情况下，主矩显然与简化中心选取无关
	$\boldsymbol{M}_0 = 0$	平衡	

同学自己写出：空间平行力系、力偶系、汇交力系的简化结果
平面一般力系、平行力系、力偶系、汇交力系的简化结果

1-4 力系的平衡条件和平衡方程

1. 空间一般力系平衡的必要与充分条件是力系的主矢和对任一点的主矩分别为零，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_o = \Sigma \boldsymbol{F} = 0 \\ \boldsymbol{M}_o = \Sigma \boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F}) = 0 \end{cases}$$

2. 各种力系的平衡方程，见表 1-3

空间一般力系是力系中最一般的情形，所有其它力系都是空间一般力系的一种特殊情况，因此这些力系的平衡方程

表 1-3

力系的类型		平衡方程	独立方程的数目
平面	汇交力系	$\Sigma X=0, \Sigma Y=0$	2
	力偶系	$\Sigma m=0$	1
	平行力系	$\Sigma Y=0, \Sigma m_0(F)=0$	2
	一般力系	$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma m_0(F)=0$	3
空间	汇交力系	$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0$	3
	力偶系	$\Sigma m_x=0, \Sigma m_y=0, \Sigma m_z=0$	3
	平行力系	$\Sigma Z=0, \Sigma m_x(F)=0, \Sigma m_y(F)=0$	3
	一般力系	$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0$ $\Sigma m_x(F)=0, \Sigma m_y(F)=0, \Sigma m_z(F)=0$	6

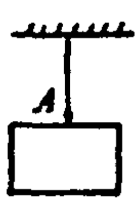
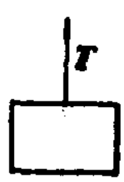
都可以从空间一般力系的平衡方程中导出。

各种力系的独立平衡方程数目不变，但是平衡方程的形式可以改变。上表列出的是基本形式。

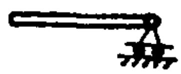
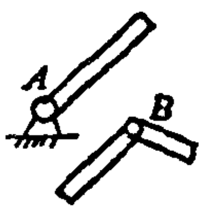
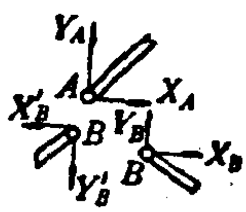
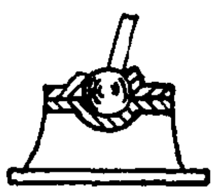
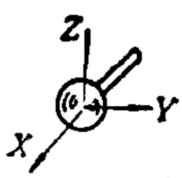
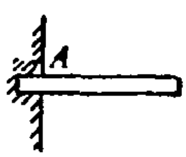
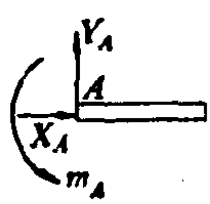
1-5 几种典型约束及其约束反力

几种典型约束及其约束反力，见表 1-4。

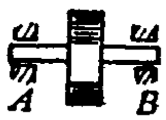
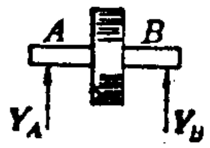
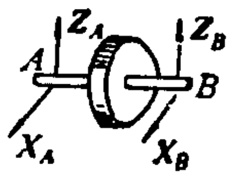
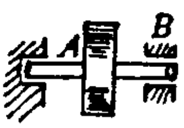
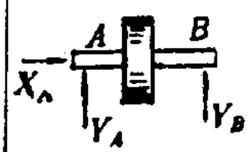
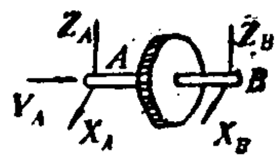
表 1-4

约束类型	简图	约束反力
柔性体约束		 约束反力过接触点沿绳索方向，背离物体

续表 1-4

约束类型	简　　图	约　束　反　力	
光滑面约束			约束反力过接触点沿接触面的公法线方向，指向物体
辊轴约束			约束反力沿接触面的公法线方向，通过销钉中心，指向物体
柱形铰链约束			约束反力一般用过铰链中心两个分力来表示
球形铰链约束			约束反力用过铰链中心三个分力表示
固定端约束			约束反力可以分解为两个分力和一个约束反力偶。空间固定端约束，有三个约束反力和三个约束反力偶

续表 1-4

约束类型			简　　图	约　　束　　反　　力	
轴承	向心轴承	平面			约束反力沿接触面的公法线方向，指向待定
		空间			约束反力沿接触面的公法线方向，用两个分力来表示
	向心推力轴承	平面			约束反力可用分力 X_A、Y_A 来表示
		空间			约束反力可用三个分力 X_A、Y_A、Z_A 来表示

1-6　静力学平衡问题的解题方法与步骤

1. 弄清已知条件，明确所求问题。

2. 选择好研究对象，这是重要的一步。物体系对象的选择十分灵活，有时取整个系统，有时取局部系统，有时取其中一个物体，究竟谁先谁后，原则上是能利用平衡条件确定某些未知力（不一定是全部）的部分应先行考虑。

3. 正确画出研究对象的受力图。这是关键的一步，要

认真对待。所有作用在研究对象上的主动力和约束反力都应画出。先画主动力，再画约束反力。只画外力，不画内力。特别是约束反力，必须根据约束性质去画，不能主观地随意设想。对于几种基本类型约束（例如光滑面、柔性体、铰链、固定端等）要正确理解，熟练掌握。要善于判别二力构件。要注意作用力和反作用力关系。

4. 列平衡方程。判别力系的类型，列出相应的独立方程式。在考虑摩擦的情况下，当按题意摩擦力达最大值时可列出补充方程 $F_{max}=fN$。列平衡方程时，要选择好坐标轴和力矩中心。坐标轴应尽可能选取与力系中多数未知力的作用线平行或垂直；而力矩中心应选在尽可能多的未知力的交点上。这样，有可能使方程中包含尽量少的未知数，使方程易于求解。

5. 解方程，校核计算结果。应分析独立方程的数目与未知数的数目是否相一致，判别是静定或静不定问题。在求解时，要注意正负号。当所求的结果为负时，说明它作用在这一物体的方向与所设相反，但不需变更受力图中该力的指向，在进行下一步的计算时要连同负号一并代入方程进行计算，不要混淆。在求出未知力后，可利用未被选为研究对象的部分的平衡条件，即相依方程，以校核所得结果是否正确。

1-7 用虚位移原理求解质点系平衡问题

1. 虚位移原理。具有稳定的理想约束的质点系，在某位置处于平衡的必要与充分条件是作用在此质点系的所有主动力在该位置的任何虚位移中所作的元功之和等于零。该原理的数学表达式为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

其中 X_i, Y_i, Z_i 为力 F_i 在直角坐标轴上的投影，$\delta x_i, \delta y_i$, δz_i 为虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 对应的各投影。上式也称为虚功方程。

2. 用虚位移原理，求解质点系平衡问题类型。

(1) 系统在某已知位置处于平衡，求这系统所受主动力之间的关系。

(2) 求系统在已知主动力作用下的约束反力（包括内力）。

(3) 求系统在已知主动力作用下的平衡位置。

3. 解题步骤。

(1) 明确所研究的质点系。

(2) 分析作用在质点系上的主动力。如果需要考虑摩擦力，则把它看成主动力。如果需求约束反力，则应解除相应的约束，以约束反力代之，并把此约束反力看成主动力。

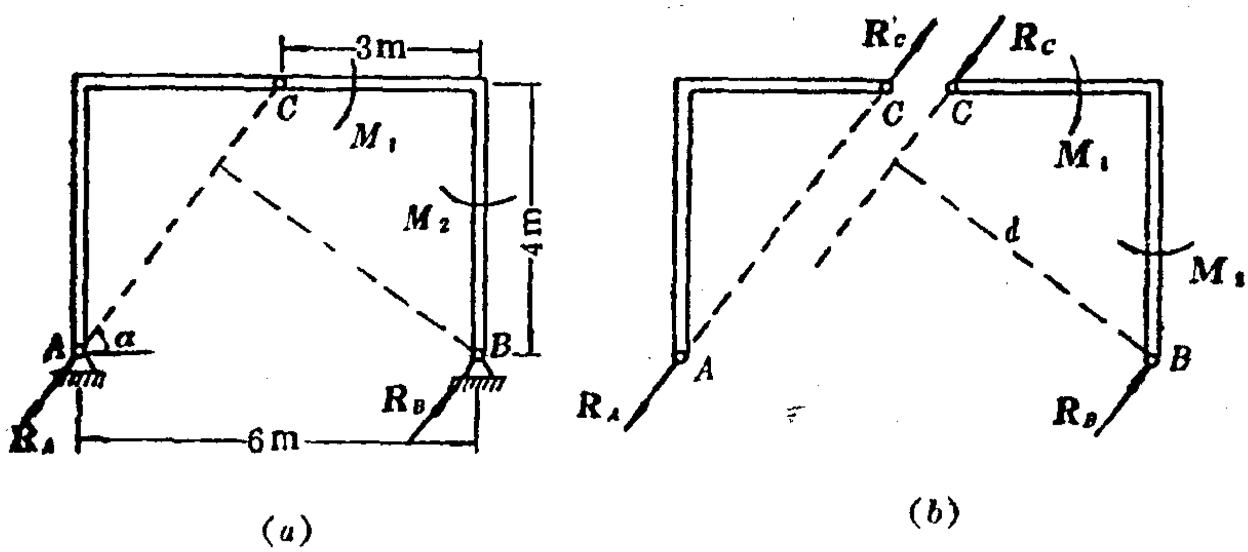
(3) 给系统以虚位移，计算主动力的虚功列出虚功方程。

(4) 找出各主动力作用点虚位移之间的关系。可以根据约束条件用坐标的变分计算或按几何关系来求得，也可以利用运动学中的速度合成定理法，速度投影法，速度瞬心法等去找，因为无限小位移之间的关系与速度之间的关系是相同的。

(5) 解虚功方程求未知量。

1-8 计算例题

1. 如题 1 图示三铰拱架，尺寸如图。BC 杆上作用 $M_1=1000\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_2=2000\text{kN}\cdot\text{m}$，求 A 及 B 点的约束反力。



题 1 图

解：(1) 以三铰拱架整体为研究对象，C 点内力不画。因 AC 为二力构件，故 A 点反力 $\boldsymbol{R}_A$ 沿 AC 连线。由题意知，主动力是力偶系，根据力偶性质，力偶必须用力偶来平衡，故 A、B 两点反力应组成一力偶，所以，B 点反力 $\boldsymbol{R}_B=-\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ 与 $\boldsymbol{R}_A$ 的指向假设如题 1 图(a)所示。于是由力偶系平衡条件，得

$$\Sigma M=0,\ R_B\cdot d-M_1-M_2=0$$

从图可知

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ d=6\sin\alpha$$

代入上式，则

$$R_B \times 6 \times \frac{4}{5} - 1000 - 2000 = 0$$

即 $\quad R_B = 5 \times 3000/24 = 625\ \text{kN}$

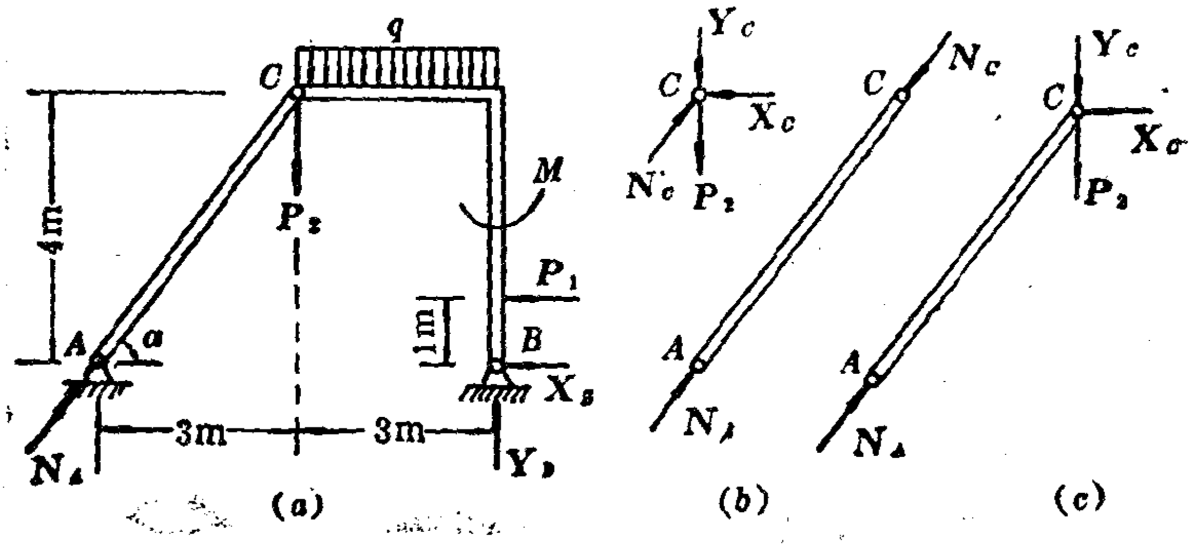
因此 $\quad R_A = R_B = 625\ \text{kN}$

（2）如以 BC 杆为研究对象，则此时 C 点的约束反力为外力，必须画出。因 AC 为二力构件，故 C 点反力 $\boldsymbol{R}_C$ 沿 AC 连线。根据力偶的性质，故 C、B 两点反力应组成一力偶，得 B 点反力 $\boldsymbol{R}_B = -\boldsymbol{R}_C$，其指向如题1图（$b$）所示。同样由力偶系平衡条件，得

$$R_B = R_C = R_A = 625\ \text{kN}$$

思考问题：本题由于研究对象的选法不同，有两个解法，但答案全同。以后的静力学计算题，都有类似问题。

2． 如题2图示三铰架，尺寸如图。BC 直角弯杆上作用荷载 $q = 1000\text{kN/m}$，$M = 1000\text{kN}\cdot\text{m}$，$P_1 = 1000\ \text{kN}$，$P_2 = 2000\text{kN}$，求 A 点、B 点的约束反力及 BC 杆对 C 铰销的约束反力。



题2图

解：（1）以三铰架整体为研究对象，C 点内力不画。因

AC 为二力构件，故 A 点反力 N_A 沿 AC 连线作用。B 点为固定铰支座，可将 B 点的约束反力分解为两个正交分力 X_B 和 Y_B，其指向预先假定为如题 2 图 (a) 所示。于是根据平面一般力系平衡方程，得

$$\Sigma m_B(F)=0,\quad -N_A\sin\alpha\times 6+2000\times 3+q\times 3\times 1.5+1000+1000\times 1=0$$

$$\Sigma X=0\quad N_A\cos\alpha-1000-X_B=0$$

$$\Sigma Y=0\quad N_A\sin\alpha+Y_B-q\times 3-2000=0$$

从图可知

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5},\ q=1000\ \text{kN/m}$$

代入上式，则得

$$N_A=2604.2\ \text{kN}$$
$$X_B=562.5\ \text{kN}$$
$$Y_B=2917\ \text{kN}$$

(2) 对于铰销 C 的受力分析，有两种处理方法。

a. 将铰销当作独立的物体。受力图如题 2 图 (b) 所示。铰销受到四个力作用 N'_C (AC 杆对铰销)，X_C, Y_C (BC 杆对铰销)，重力 P_2。AC 杆受 N_C (铰销对 AC 杆) N_A (支座对 AC 杆) 两个力作用。

b. 将铰销与 AC 杆合为一个物体。受力图如题 2 图 (c) 所示。AC 杆受四个力作用：N_A, X_C, Y_C, P_2。这时 N'_C，N_C 成为内力不必画出。

现以题 2 图 (c) 列平衡方程求解。

$$\Sigma X=0,\quad N_A\cos\alpha-X_C=0$$

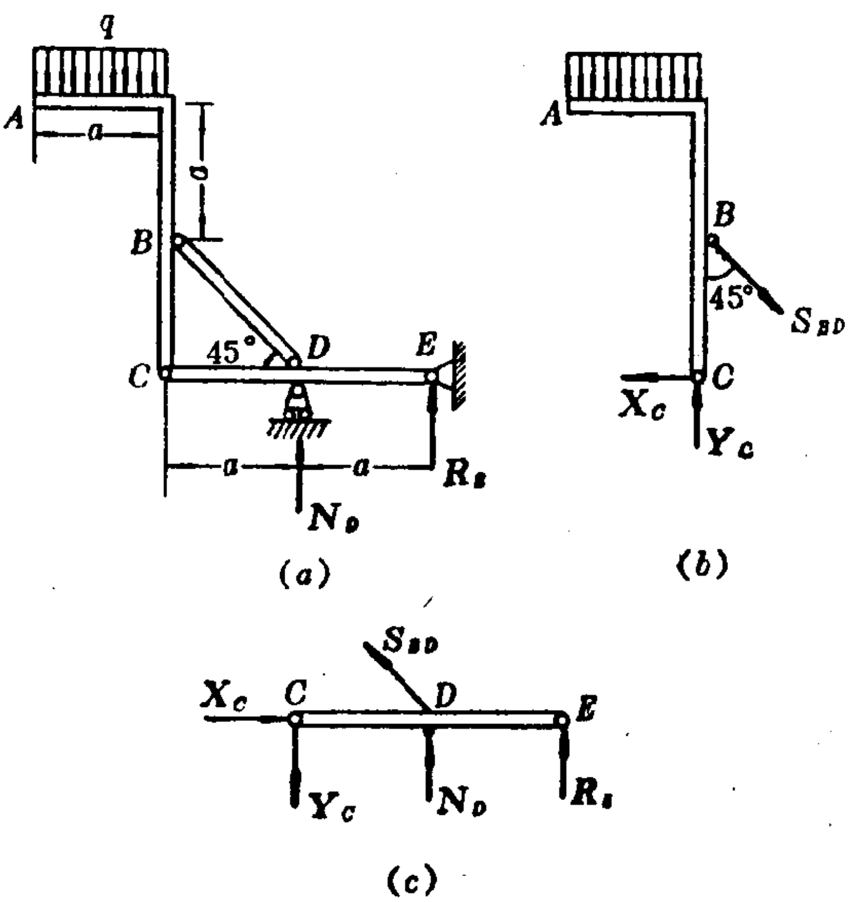
$$\Sigma Y=0,\quad N_A\sin\alpha-2000-Y_C=0$$

即　$X_C = N_A\cos\alpha = 2601.2\times\frac{3}{5} = 1562.5\ \text{kN}$

$$Y_C = -2000 + N_A\sin\alpha = -2000 + 2601.2\times\frac{4}{5}$$
$$= 83.36\ \text{kN}$$

思考问题：C 销是三力体，C 销在 AC 杆上的受力图如题 2 图（c）所示；C 销不在 AC 杆上的受力图如题 2 图（b）所示，二者不同。试画出：（1）C 销在 BC 杆上的受力图。（2）C 销不在 BC 杆上的受力图。

3．构架由 ABC，CDE，BD 三杆组成，尺寸如题 3 图所示。B，C，D，E 处均为铰链。各杆重不计，均布载荷 q。试求 E 点反力和 BD 杆所受力。



题 3 图

解：（1）以构架整体为研究对象，作用于构架上的力有均布载荷 q，辊轴支座D的约束反力 N_D，系铅直方向；固定铰支座E的约束反力，也系铅直方向，因为作用在构架上的三个力互成平衡，而其中的两个力的作用线彼比平行，所以其余一个力的作用线也必然与它们平行。构架的受力图如题3图(a)所示。由平面平行力系平衡方程，得

$$\Sigma Y=0, N_D+R_E-aq=0$$

$$\Sigma m_D(F)=0,\ aq\left(a+\frac{a}{2}\right)+R_E a=0$$

即 $$R_E=-\frac{3}{2}aq \text{（与原假设指向相反）}$$

$$N_D=\frac{5}{2}aq$$

（2）再以 ABC 杆为研究对象，其受力图如题3图(b)所示。由

$$\Sigma m_C(F)=0,\ aq\cdot\frac{a}{2}-S_{BD}\cdot\sin 45°\cdot a=0$$

即得 $$S_{BD}=aq/\sqrt{2}$$

（3）本题中，在考虑局部平衡时，如果不以 ABC 杆为研究对象，而以 CDE 杆为研究对象，其受力图如题3图(c)所示，同样可以求得 S_{BD}。也可以采用另外的解法，即分别取 ABC 杆和 CDE 杆作为研究对象，同样可求 R_E，N_D，S_{BD}，建议读者自行演算。

4. 一构架由杆 AB 和 BC 所组成。重物 M 重 $P=2\,\text{kN}$。已知 $AB=AC=2\,\text{m}$，D为 AB 杆中点，定滑轮半径 $R=0.3\text{m}$。不计滑轮及杆的自重。试求支座 A、C 处的约束反力。