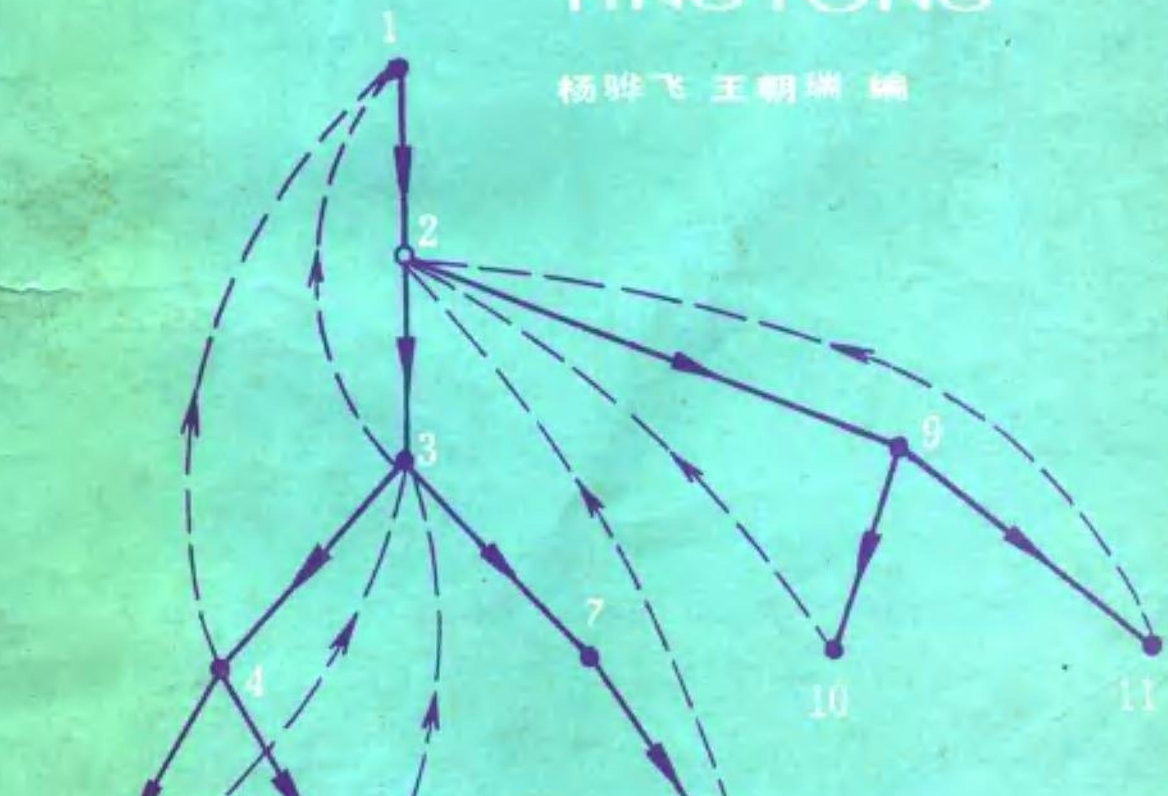
组合数学及其应用

ZU HE
SHU XUE
JI QI
YINGYONG

杨骅飞 王朝瑞 编



北京理工大学出版社

组合数学及其应用

杨骅飞　王朝瑞　编

J711/54109

1628638

北京理工大学出版社

(京)新登字149号

内 容 简 介

组合数学是一门历史悠久而在近几十年又飞速发展的应用数学学科。尤其随着电子计算机日益广泛渗入各个领域，不仅是数值计算，还有大量非数值计算的算法得以迅猛发展，其中大量的是组合算法，而设计与分析组合算法的基础就是组合数学。

组合数学本身也是一门独立的学科，而作为其一部分的图论已自成一个不小的分支（另有教材介绍）。组合数学在西方诸国大约在60年代陆续为计算机系、电器工程系、应用数学系等研究生必修或大学生选修。北京理工大学从1983年起开设此课程，学时大约61～80。多年实践表明这门课强化了理工科学生综合运用已学的各种知识能力的训练。组合的思想方法对科技人员有长远的影响和启迪。

教材在叙述内容方面力求简明，配有不少生动的例题和习题，并反映了一些最新成果，本书力求只用工科大学生具备的知识（如线性代数，微积分等），超出部分（如群、有限域）书中作了适当的介绍，内容基本上自足。

组合数学及其应用
杨骅飞　王朝瑞　编
*
北京理工大学出版社出版发行
各地新华书店经售
密云华都印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　14.5印张　357千字
1992年8月第一版　　1992年8月第一次印刷
ISBN 7—81013—505—8/O·82
印数：1—5000　册　　定价：4.20　元

前　言

组合数学或组合论是一门历史悠久而在近四十年又获蓬勃发展的应用数学学科。一些著名的难题可以上溯几百年，历届青少年国内外数学竞赛、国际信息学竞赛常涉及组合论内容。一门学科的发展既依赖于自身（有许多富有挑战性的难题，几代人努力尚未攻克），又与其它学科密切相关（其它学科对它提出新问题，征求解法），从这两层意义上看，组合数学比其它数学分支更得天独厚，尤其在电子计算机日益广泛渗入各领域的时代更是如此。电子计算机的普及和发展，不仅用到数值计算的各种算法，而且还大量地用到非数值计算的算法——主要是组合算法。而设计与分析组合算法的基础就是组合数学。此外，管理科学、信息科学、人工智能、生命科学甚至人文学科中许多问题的求解也借助并促进了组合数学。

世界上日、美、西欧诸国在60年代就在一些计算机系、电器工程系为研究生必修或大学生选修开设了组合论。多年实践表明，这门课强化了学生综合应用各种知识能力的训练，因为组合数学不仅涉及基本的离散数学内容，也借用了微积分等许多工具，如借助幂级数等建立生成函数。而借助于群论发展成的Polya计数理论更是闪烁着科学美的魅力，组合论的思想和处理问题的能力会对科技人员有长远的影响和启迪。

本教材是笔者在北京理工大学从1983年起陆续为数学系、计算机系、人工智能所研究生和大学生讲课实践中形成的。孙树本教授首讲了组合论，并一直关心支持教材的编写工作。卢开澄教授、王建方研究员、王遇科教授、王明亮副教授、陈道琦副教授对本书的撰写给了许多鼓励和支持，卢开澄教授还仔细审阅了书稿，在此一并致谢。

在本书定稿后，见到了Marshall Hall在Combinatorial Theory一书(1986. John Wiley)中关于积和式Vander Waerden猜想的另一种证法，方法简略但所用工具较深，本教材仅用线性代数知识，虽略长而一般理工科学生均可读懂，故仍保留。为同样目的，本教材没有用射影几何知识，超越工科研究生知识的关于群、有限域基本内容，教材上都写出，可以自足。一些习题难度稍大，使用者可自斟。

关于组合算法的设计与分析，因它本身是内容相当丰富的分支，本教材只涉及很少一些基本内容，主要是使读者对组合论各个方面都有一个了解而得到整体印象。限于篇幅，不能详述，故只作附录。

限于时间和水平，不周之处敬请指正。

杨骅飞　王朝瑞
于北京理工大学

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　引　论

组合数学一般讲可以分为存在性问题、计数问题、构造性算法、最优化问题四个方面。

一、存在性问题

工程实际或科学研究提出各种问题，有些可以判定其有解或无解，但也有不少难以判定。如一个国际象棋盘，8行8列共64个黑白相间的正方形棋盘，如任意挖去一个黑格一个白格，问可否用 1×2 格的骨牌盖满这62格的残盘？这不是不加思索就可判定的问题。

解决一个或一类有理论意义或应用价值的问题，是对科技进步的一个贡献；然而，提出一个有价值且影响深远的问题（虽不知解答），也是一种贡献，因它往往开拓了一个有意义的新研究领域。如图论中任意图的哈密顿回路的存在性问题，旅行售货员问题，中国邮路问题等。在具体问题求解时，为避免盲目性，最好先解决存在性问题，但有的只能判定解是存在而没指出如何求解，最好是判定出解存在的同时也给出了构造性的求解方法。也有一些问题至今无法判定解是否存在，诸如此类的问题就归结为“存在性问题”。下面看几个例子。

例1.1　国际象棋残盘 1×2 骨牌复盖存在性问题。一张 8×8 黑白相间盘，任意挖去一白一黑两格（相邻不相邻均可），可否用31张 1×2 骨牌正好复盖完这张残盘？

〔解〕　可以。Gomory给出了构造性解答。把一柄三齿叉和一柄四齿叉交叉放于棋盘上，如图1-1所示。这迷宫式的效果就是把正方形小格排成一种循环次序，使得可循着迷宫次序走遍所有小格而衔接到开始的正方形小格前面结束。

今设某黑格A、白格B被挖去。注意按图中循环次序，小格的色仍黑白交替，沿着迷宫路，位于一个黑格和一个白格之间的格子个数总是偶数。因而，在A和B之间恰好有足够的格可摆放下整数张骨牌。这只要沿着迷宫路顺次排列，唯一可能担心的是拐弯处，但是，骨牌可转过身在棋盘上来回挪动并保证总可以绕过一个拐角而不留下任何空隙。因此沿着迷宫从A到B的两条迷宫路线走下去（不计A、B格）必可盖满棋盘。

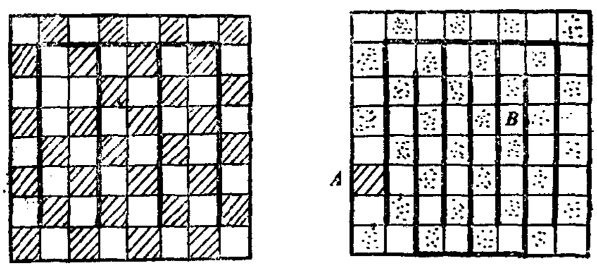


图1-1

例1.2　由27个体积各为 $1\mathrm{cm}^3$ 的正方体堆成一体积为 $27\mathrm{cm}^3$ 的大正方体。把号码1，2，…，27分别标在小正方体上，问是否有一种标法，可使几何中心位于一直线上的任意3个小方体的数码之和均相等？这问题即称为幻立方问题。

〔解〕 不存在。结合 ．—2推证如下：

首先，如存在，凡是几何中心位于一直线的 3 个小方体的数码之和（也称为幻和）应是 $\frac{1}{9}(1+2+\cdots+27)=42=S$。

其次，从 $a+\mu+z=S$，$\underline{a}+\mu+\overline{z}=S$ 推知，$2\mu=2S-\underline{a}-a-z-\overline{z}=\overline{a}+\underline{z}=S-\mu$，所以 $\mu=\frac{1}{3}S=14$。

在大立方体几何中心上的小方块 $\mu=14$ 的结论下，考察角块 $\overline{a}$、$\overline{c}$ 放置数的奇偶性，为简单起见，用 1 表示奇，0 表示偶，借用模 2 加法。

情况 1　设 $\overline{a}$、$\overline{c}$ 奇偶相异，不妨置 $\overline{a}=1$，$\overline{c}=0$。由于幻和 $S=14$ ＝偶数，$\overline{b}=S-\overline{a}-\overline{c}$ ＝奇＝1．再看上层 9 个方块上数的奇偶性，$\overline{\mu}$ 上的数要么为奇要么为偶，形式地简记为 $\overline{\mu}=1/0$，如借用阵列表达推理过程，初始时置 $\overline{a}=1$，$\overline{c}=0$，从 $\overline{\mu}=1/0$ 出发推理：

$$\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{b} & \overline{c}\\ \overline{\lambda} & \overline{\mu} & \overline{v}\\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1/0 & \\ 1/0 & & 0/1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1/0 & \\ 1/0 & 0/1 & 0/1\end{pmatrix}$$

至此推知 $\overline{y}$ 只能为 1，从而

$$\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{b} & \overline{c}\\ \overline{\lambda} & \overline{\mu} & \overline{v}\\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ & 0 & \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$由\begin{cases}\underline{x}=0\\ \underline{z}=1\end{cases}有\begin{pmatrix}\overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\\ x & y & z\\ \underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

现在 $\overline{a}$，μ $\underline{z}$ 处于大对角线上．$\overline{a}=1$，$\underline{z}=0$，$\mu=0$，形成矛盾．

情况 2　如 $\overline{a}=1$，$\overline{c}=1$，初时，置 $\overline{\mu}=1/0$ 进行推理：

$$\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{b} & \overline{c}\\ \overline{\lambda} & \overline{\mu} & \overline{v}\\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & 1\\ & 0/1 & \\ & & \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ & 0/1 & \\ 1/0 & 0/1 & 1/0\end{pmatrix}$$

至此只有 $\overline{y}=0$，从而

$$\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{b} & \overline{c}\\ \overline{\lambda} & \overline{\mu} & \overline{v}\\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$由\quad\begin{cases}\underline{x}=1\\ \underline{z}=1\end{cases}有\begin{pmatrix}\overline{x} & \overline{y} & \overline{z}\\ x & y & z\\ \underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

这样27个小方体，只有8个角块为奇数，不能占满1到27的14个奇数，矛盾。

情况3　如$\overline{a}=0$，$\overline{c}=0$，初时置$\mu=1/0$进行推理。与情况2相仿，推出第一层全为偶数，从而整个27块全为偶数，矛盾。

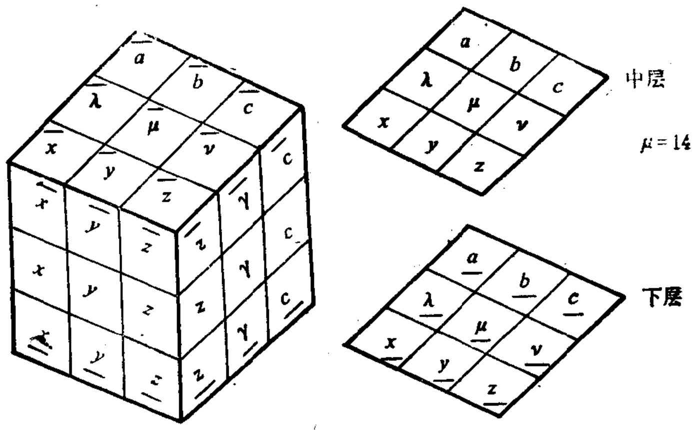


图1-2

顺便指出5阶幻立方也不存在。请自证。

7阶幻立方的存在及构造方法见§9.7。而且对于任何$n\geqslant 7$的n阶幻立方给出了构造性解答。

一个$m\times n$格残盘，用1×2骨牌去复盖，那么它可被完全复盖的充要条件是什么？此问题将在叙述（0，1）矩阵与相异代表系时给出一个完整解答。

二、计数问题

如一个组合问题的解已知是存在的，自然会问有多少种不同的解。

回看例1.1。Gomory对棋盘剪去一白一黑格的残盘问题，研究过有多少种不同的解。先把64个格子，每格中心对应一个几何点，两相邻格的中心对应连接一条边，即构成一个“图”。这样，格子中心64个点可以“构造”出许多哈密顿回路，每个哈密顿回路相应于一条迷宫路线，显然解不唯一。图1-3列出了三条迷宫式哈密顿回路。在其上，任去一黑一白，成二条长度各为偶数的路，因此这样的计数问题转化为求互异哈密顿回路计数问题。当然，也可研究去掉t个黑格t个白格（t整数）的1×2骨牌复盖问题。

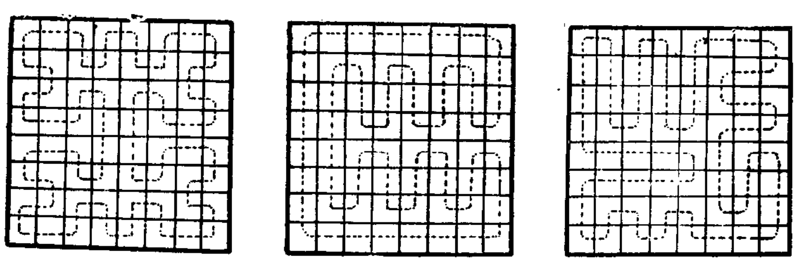


图1-3

例1.3　宝石项链配色问题。一条串n颗珠宝的项链，每颗珠子可任选配红、绿、蓝、紫、黄5种色之一。问有多少种不同配色的项链？

这个问题解的存在性很显然，难在计数，它借用Polya计数理论可完整地算出。从传统上看，组合计数是组合论中较丰富的内容，有一些成熟的公式、技巧工具和方法。例如n个

点的互不同构的图的数目；n个点m条边互不同构的图的数目都可用Polya理论来解决。

三、构造性算法

这一部分发展很迅速。一个组合问题，已判知解存在，甚至也可计算推知有几组解，但关键还在于把解构造出来，有的哪怕给出一种解也好。如求图的最大边匹配算法，旅行售货员问题近似求解算法等。这一部分主要研究如何从组合论角度设计算法，使之较好地构造出解。

四、优化问题

一个问题的构造性算法可能不止一种，自然面临如何择优，如何改进。结合电子计算机看，主要是独立于计算机硬设备而改进算法本身的时间复杂性和空间复杂性，使问题的解在多项式时间复杂性要求下能解出来，而不要出指数级情况的“组合爆炸”，这些一般归入组合优化问题。（这里用到的复杂性概念可见附录）

当然，实际问题求解时不见得都刻板地分四步，常从易于攻破处下手，借鉴前人经验加上创新，通盘考虑。四个方面只是提供问题的研究方式，供借鉴和参考。

第二章　从鸽笼原理到Ramsey理论

本章介绍计数中的一个初等而又应用广泛的鸽笼原理，并引出现今仍深刻且活跃的Ramsey理论，特别介绍了它在一些实用技术科学领域内的一些应用，再一次体现了理论数学与应用技术之间的内在联系。

§2.1　鸽 笼 原 理

鸽笼原理是解决组合论中一些存在性问题的基本而又有力的工具。最早是狄利克雷(Dirichlet)提出的，也有人称为抽屉原理、鞋箱原理。

定理2.1.1　$n+1$只鸽子飞回n个鸽笼，至少有一个鸽笼含有不少于2只的鸽子。

这个定理的证明谁都能完成，现抽去具体的"鸽笼"、"抽屉"等物理属性，从数学上看，就是把m个元素，分放到n个箱子中去，当不能均匀分放时，总有一个箱子内元素数目要超出"平均数"。正式叙述为

定理2.1.2　(鸽笼原理基本形式）$m(m\geqslant 1)$个元素分成n个组，那么，总存在一个组至少含有

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil \tag{2.1-1}$$

（此处$\lceil\ \ \rceil$为"上整数"记号）个元素。其中当m表示为$m=nq+r(0\leqslant r<n$时），

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil=\begin{cases} q+1 & 当r\neq 0 \\ q & 当r=0 \end{cases}$$

一些简单结论列举如下：

13人的小组，至少有二人生日在同一个月；

40人的班级，至少有$\lceil 40/12\rceil=4$人生日同月；

34位内宾参加国宴，至少有2人来自同一行政区(中国目前有33个省、直辖市级行政区)，因为$\lceil 34/33\rceil=2$。

定理的证明可用反证法即得，例子也浅显，下面逐渐介绍鸽笼原理较复杂的一些应用。

例2.1.1　n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，总存在一个数，它大于或等于算术平均数$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$。

例2.1.2　边长为1的正方形内部任置5个点，则其中必有两点，它们之间的距离小于或等于$\sqrt{2}/2$。

〔证明〕　解题关键在于"设计鸽笼"。如果作单位正方形的两条对角线，分成四个全等三角形，这样设计的"鸽笼"对证题无助。另一作法，用过中心且与正方形边平行的两条相互垂直的对称轴，分成全等的四个小正方形，这样总有一个小正方形内至少含2点，它们之间相距小于或等于$\sqrt{2}/2$。证毕。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例2.1.3　在边长为1的正立方体内，任意给定9个点，则其中必有两点，它们之间的距离小于或等于$\sqrt{3}/2$。

〔证明〕　过正方体中心，作三个相互正交的平面，分成8个小正方体即可推出。

例2.1.4　任取黑白杂混围棋子21个，排成3行7列的长方形（不妨说排成矩阵）。求证，不论怎样排法，都可找到一个小长方形（也即子阵），使四个角上的子全白或全黑（子阵角上四子同色）。

〔证明〕　先考察第一行，由鸽笼原理，$a_{11},\cdots,a_{17}$上必有$\left\lceil\frac{7}{2}\right\rceil=4$个同色棋子，不失一般性，比如说$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}$为4个黑子。再考察$a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}$，如其中有2个黑子，那么结论显然成立。如其中至多只有一个黑子，也即白子至少有3个，不妨设a_{21},a_{22},a_{23}为白子。继而深入考察a_{31},a_{32},a_{33}，由鸽笼原理，3子中有$\left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil=2$个子是同色的，若同为白，那么与第2行相应列的2子形成四角同白的子阵；若同为黑，就与第1行相应列的2子形成四角同黑的子阵。结论证得。

例2.1.5　证明：任意6个人的聚会，必发生：或有3人互相认识；或有3人互相不认识。（1958年美国数学月刊）

此例实际上就是要证明下述等价的命题。

命题2.1.1　完全图K_6（6个顶点且每2个点都连接有一条边的图），对它的边用红、蓝两种色任意涂色，则总存在同色边的三角形。

读者不难发现，只要把每个人用一个点代表，任二人如认识，就用红边连接，否则用蓝边连接，例2.1.5即转化成命题2.1.1。

〔证明〕　设K_6的顶点为$v_1,v_2,\cdots,v_6$。从v_1发出的5条边，由鸽笼原理，知其中至少有$\lceil 5/2\rceil=3$条边同色，不妨说$(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_4)$这3条边涂上了红色。再看$\triangle v_2,v_3,v_4$。如它的3条边涂的色相同，则命题得证；如不然，仍由鸽笼原理，知至少有1条红色边，这红边两端点，再配上v_1点，必组成了3边红色的三角形。证毕。

后面将会看到：命题2.1.1即证明了所谓的Ramsey数$r(3,3)=6$。

顺便指出，本教材中对图的边用允许的色种任意"涂"色，意即任选一种色来涂每一条边。它不同于图论中的"染色"，"染色"常意味着关联于同一点的边都要染不同的色。

下面再通过一些例子来看一下"设计鸽笼"的各种技巧。

命题2.1.2　设m是取定的一个自然数，求证：任取$m+1$个整数，则其中至少有2个整数，其差是m的倍数。

为证明方便及以后阅读需要，先介绍"同余"这一基本概念。

设m是给定的一个正整数，任意一个整数n（也包括负整数）被m除，得到一个商和余数，余数为0也就是通常说的整除，否则余数取为1，…，$m-1$之一。总之可写成

$$n=qm+r\qquad(0\leqslant r\leqslant m-1)$$

这样全体整数按余数相同的归入一类，共划分成m个类。余数为i的类记为I_i，这m个剩余类记成

$$I_0,I_1,\cdots,I_{m-1}\tag{2.1-2}$$

较为严格的叙述是这样的，记号$m\mid a$表示$a=qm$；即m整除a。任两个整数a和b，对于取

定的正整数m，当且仅当$m\mid(a-b)$，就称a与b对模m同余，记为$a\equiv b(\bmod m)$。因为任何整数可唯一地表为$a=qm+r(0\leqslant r\leqslant m-1)$，所以每一整数恰与$0,1,\cdots,m-1$中一数同余$(\bmod m)$。有时把任意取定的一个数所在的同余类就记为$\overline{a}$，即$\overline{a}=\{k\mid k-a\equiv 0(\bmod m)\}$。

现来证命题2.1.2，把模m的m个剩余类取为"鸽笼"，$m+1$个数放入m个鸽笼，也即至少有2个数在同一个剩余类内，故这2个数之差为m的倍数。

例2.1.6　设n是正整数，众所周知，当$n\neq 2^a\cdot 5^b$（a,b非负整数）时，$\frac{1}{n}$的十进制小数是循环小数。现求证：$\frac{1}{n}(n\neq 2^a\cdot 5^b)$的循环节长度$d\leqslant n-1$。

〔证明〕　先看3个具体的数字，并把用纸和笔的手算过程表出：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7}&=0.\overline{142857}\\
10&=1\cdot 7+3\\
30&=4\cdot 7+2\\
20&=2\cdot 7+6\\
60&=8\cdot 7+4\\
40&=5\cdot 7+5\\
50&=7\cdot 7+1\\
10&=1\cdot 7+3 \quad \text{(重复)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24}&=0.041\overline{6}\\
10&=0\cdot 24+10\\
100&=4\cdot 24+4\\
40&=1\cdot 24+16\\
160&=6\cdot 24+16 \quad \text{(重复)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{11}&=0.\overline{09}\\
10&=0\cdot 11+10\\
100&=9\cdot 11+1\\
10&=0\cdot 11+10 \quad \text{(重复)}
\end{aligned}$$

对于一般的n，有$\frac{1}{n}=0.d_1d_2d_3\cdots d_kd_{k+1}\cdots$；　即有

$$\begin{aligned}
10&=d_1\cdot n+r_1\\
10\cdot r_1&=d_2\cdot n+r_2\\
10\cdot r_2&=d_3\cdot n+r_3\\
&\vdots\\
10\cdot r_k&=d_{k+1}\cdot n+r_{k+1} \quad (r_{k+1}\text{ 与前面出现过的某一余数重复})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

对于$\frac{1}{n}$的$\frac{1}{10^i}$位上每个d_i值（当然d_i值可为0），都在$1,2,\cdots,n-1$范围内留下一个余数r_i（注意此$r_i\neq 0$），一旦余数第一次重复，相应的d_i诸值就形成循环节了。而余数序列循环节长至多为$n-1$，故命题证得。

例2.1.7　对于一个正整数序列$\{a_1,a_2,\cdots,\}$求证：在它前n项中，必存在一段连续的子序列，其各项整数值之和恰为n的倍数。

〔证明〕　构造"部分和"序列，令$s_0=0$，$s_1=a_1$，$s_2=a_1+a_2$，$\cdots$，$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。对$s_0,s_1,\cdots,s_n$这$n+1$个整数应用命题2.1.2，知其中必有2个数其差为n的倍数，不妨说s_j，s_i且$j>i$。此即表明$s_j-s_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$是$n$的倍数。证毕。

例2.1.8　已知1993为素数，求证：每位数字均为1的k位数中$(1\leqslant k\leqslant 1993)$，必存在一个整数是1993的倍数。

提示：构造 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=11$，…，$a_{1993}=\underbrace{1\cdots1}_{1993个}$ 共1994个整数，由命题 2.1.2 知，其中存在2个数其差为1993的倍数。不妨为a_i和a_{i+j}，则有

$a_{i+j}-a_i\equiv0(\text{mod}1993)$，即 $\underbrace{11\cdots1}_{j个}\times10^i\equiv0\ (\text{mod}\ 1993)$显然 $j\leqslant1993$。如 $j=1993$，则 $i=0$，命题证得。如$j<1993$，$i>0$，借用模一个系数的同余类性质，推知$\underbrace{11\cdots1}_{j个}\equiv0(\text{mod}1993)$（模一个素数的同余类不含所谓零因子，即如 $a\cdot b\equiv0(\text{mod}\,p)$，$p$ 为素数，必有 $a\equiv0$ 或 $b\equiv0$ $(\text{mod}\,p)$，但模一个合数，会有零因子，例如 $m=6$，$2\not\equiv0\ (\text{mod}6)$，$3\not\equiv0(\text{mod}6)$，而$2\cdot3\equiv0$ $(\text{mod}6)$）。

例2.1.9 某国际社团来自世界上6个地区，共有编号为1，2，…，1978的1978位成员。求证：至少有一位成员的序号等于他同地区另两位成员序号之和；或者等于他同一地区另一位成员序号的 2 倍。

为证此命题，先引入一些术语，作些准备。

一个正整数集合，如果其中某一个数可写成集合中 2 个数之和（2个数也可相同），则说这集合具备拆2性。否则说不具备拆2性。记M是不具备拆 2 性的集合，先研究这样的 M的性质。

性质 1 M为非拆 2 集，记M的偏差集$M_1=\{x-y|\ \forall x,y\in M,x>y\}$，必有$M\cap M_1=\phi$（偏差集在$M$外）。

〔证明〕 若不然，有 $x_0\in M$，$y_0\in M$，$x_0-y_0\in M$，则 $x_0=(x_0-y_0)+y_0$，推得 x_0 拆成M中2数之和。形成矛盾。证毕。

性质 2 M为非拆 2 集，记M的迭偏差集 $M_2=\{(x-z)-(x-y)|\ \forall x,y,z\in M,x>y>z\}$，必有$M\cap M_2=\phi$。

〔证明〕 由$(x-z)-(x-y)=y-z\in M_1$，知$M_2\subseteq M_1$即得证。

例 2.1.9 转变成求证来自 6 个地区的成员中，至少有一地区其成员的号码具有拆 2 性。

例2.1.9的证明 反证法。设 A_1，…，A_6为6地区成员序号集合，且均不具备拆 2 性。由鸽笼原理，必有一地区至少有 $\lceil 1978/6\rceil=330$ 人。不妨说 A_1 地区至少有序号 a_1，a_2，…，a_{330}，且$a_i>a_{i+1}$（原始对成员编序不一定按地区连号）。

构造偏差集$M_1=\{a_1-a_i|\ i=2,\cdots,330\}$。由于$0<a_1<1978,0<a_1-a_i<1978$，故 M_1 也可看成成员序号的子集。由A_1不具拆 2 性知$M_1\cap A_1=\phi$，故$M_1\subset A_2\cup A_3\cdots\cup A_6$。

现知M_1共含329个 a_1-a_i型差值，又分属于5个集合，再次用鸽笼原理，知A_2，…，A_6中总存在一集合至少含有 $\lceil 329/5\rceil=66$个 a_1-a_i型整数，不妨说A_2含有 $a_1-a_{i_1}=b_1$，$a_1-a_{i_2}=b_2$，…，$a_1-a_{i_{66}}=b_{66}$ 且 $b_i>b_{i+1}$。

构造偏差集$M_2=\{b_1-b_j\ |\ j=2,\ 3,\cdots,\ 66\}$。由$0<b_1<1978$，$0<b_1-b_j<1978$，故$M_2$也可看成成员序号的子集。由$A_2$不具拆 2 性，知$M_2\cap A_2=\phi$，即$b_1-b_j\notin A_2$。再因为$b_1-b_j=(a_1-a_{i_1})-(a_1-a_{i_j})$为$A_1$中 3 个数之迭偏差，由性质 2，$M_2\cap A_1=\phi$，即 $b_1-b_j\notin A_1$。故 $M_2\subset A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$。

现知M_2共含65个b_1-b_j型值的成员序号，分属于4个集合，第三次用鸽笼原理，知 A_3，…，A_6 中总存在一集合至少含有 $\lceil 65/4\rceil=17$个b_1-b_j型整数，不妨说 A_3含有$b_1-b_{j_1}=c_1$，

$b_1-b_{j_2}=c_2,\cdots,b_1-b_{j_{17}}=c_{17}$，且$c_k>c_{k+1}$。

构造偏差集$M_3=\{c_1-c_k|k=2,\cdots,17\}$。同前相仿，$M_3$属于1，2，…，1978，故$M_3$也可看成成员序号的子集。$A_3$不具拆2性，$M_3\cap A_3=\phi$；又$c_1-c_k=(b_1-b_{j_1})-(b_1-b_{j_k})$为$A_2$中3个数的迭偏差，推出$M_3\cap A_2=\phi$；还从$c_1-c_k=b_{j_k}-b_{j_1}=(a_1-a_{i(j_k)})-(a_1-a_{i(j_1)})\in A_1$，知$M_3\cap A_1=\phi$，故$M_3\subset A_4\cup A_5\cup A_6$。

现知M_3有16个c_1-c_k型值的成员序号，分属于3个集合，第四次用鸽笼原理，知A_4，A_5，A_6中总存在一个集合至少含有$\lceil 16/3\rceil=6$个c_1-c_k型整数，不妨说A_4含有$c_1-c_{k_1}=d_1$，$c_1-c_{k_2}=d_2,\cdots,c_1-c_{k_6}=d_6$，且$d_1>d_2>\cdots>d_6$。

完全类似地构造$M_4=\{d_1-d_2,\cdots,d_1-d_6\}$。由$A_4$不具拆2性，从性质1知$M_4\cap A_4=\phi$。再用性质2，推知$M_4\cap A_3=\phi,M_4\cap A_2=\phi,M_4\cap A_1=\phi$，只有$M_4\subset A_5\cup A_6$。

M_4有5个整数，且也可看成是成员序号，第五次用鸽笼原理，知A_5或A_6中总存在一个集合至少含有$\lceil 5/2\rceil=3$个d_1-d_2型整数，不妨说A_5含有$d_1-d_{l_1}=e_1$，$d_1-d_{l_2}=e_2,d_1-d_{l_3}=e_3$，且$e_1>e_2>e_3$。

构造$M_5=\{e_1-e_2,\ e_1-e_3\}$。同理推出$M_5\cap A_5=\phi$，且$M_5\cap A_i=\phi(i=1,2,3,4)$，只有$M_5\subset A_6$。

现在看$(e_1-e_3)-(e_1-e_2)=e_2-e_3$，它是$A_6$中某两个元的偏差，由$A_6$不具拆2性及性质1，推出$e_2-e_3\in A_6$。同时，与前相仿推出$e_2-e_3\notin A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$，说明$e_2-e_3$不在1，2，…，1978之中。

但另一方面，$0<e_2-e_3<e_2<e_1<d_1<c_1<b_1<a_1<1978$，$e_2-e_3$又应该是某一成员的序号，形成矛盾，推翻了反证时的假设，原命题得证。

此例让我们领略了5次套用鸽笼原理的技巧。深入思考，还可设问：如地区数仍为6，成员总人数$N=1978$是否可减少而结论仍成立？推证时的方法只是找到了检验当N取定时，使结论成立的一种充分性推证过程。

现在把推理中主要步骤相应的数值演变作一个"概略"地表示：

$\lceil 1978/6\rceil=330$（M_1含329个元）$\longrightarrow\lceil 329/5\rceil=66$（$M_2$含65个元）$\longrightarrow\lceil 65/4\rceil=17$（$M_3$含16个元）$\longrightarrow\lceil 16/3\rceil=6$（$M_4$含5个元）$\longrightarrow\lceil 5/2\rceil=3$（$M_5$含2个元），$M_5\subset A_6$，$M_5$中2元偏差就形成矛盾。

也即从初始的N值，5次套用鸽笼原理：$\left\lceil\frac{N}{6}\right\rceil=x_1\to\left\lceil\frac{x_1-1}{5}\right\rceil=x_2\to\left\lceil\frac{x_2-1}{4}\right\rceil=x_3\to$

$\left\lceil\frac{x_3-1}{3}\right\rceil=x_4\to\left\lceil\frac{x_4-1}{2}\right\rceil=x_5$，$x_5-1\geqslant 2$即可。

现在求比1978还要小的值，可反向推理：$x_5\geqslant 3\to\left\lceil\frac{x_4-1}{2}\right\rceil\geqslant 3$，得$x_4\geqslant 6\to\left\lceil\frac{x_3-1}{3}\right\rceil\geqslant 6$，

得$x_3\geqslant 17\to\left\lceil\frac{x_2-1}{4}\right\rceil\geqslant 17$，得$x_2\geqslant 66\to\left\lceil\frac{x_1-1}{5}\right\rceil\geqslant 66$，得$x_1\geqslant 327\to\left\lceil\frac{N}{6}\right\rceil\geqslant 327$，推出$N\geqslant 1957$。

即6个地区1957位成员，必有一地区的序号具有拆2性。我们还要设问："1957"还能降吗？

为此先作一种改叙，1957个点的完全图，顶点标号为1，2，…，1957。对其边按下列规则染色：现有6种颜色，当且仅当$|i-j|\in A_k$地区成员序号集时，连接着点i和点j的边染

为第k种色。

例如有一个三边同为k色的三角形 $\triangle abc$，不妨说 $a<b<c$，即知$b-a\in A_k$，$c-b\in A_k$，$c-a\in A_k$。表明 A_k 中有三个数，其中一个数$c-a$等于另两个数$b-a$及$c-b$之和。也即A_k具有拆 2 性。

现在又得到了判别国际社团问题成员数目的又一种充分性判别法：如 K_N 完全图的边用 6 种色按上述规则染色，有同色边的三角形，则N个成员的国际社团问题结论成立。

后面讲到的Ramsey数，又提供了更精细的一个充分性判别法。$R(3,3,3,3,3,3;2)$表明对 N 个点完全图的边，用 6 种色任意涂色，使之含边同色的三角形的最小的 N 值就是Ramsey 数。当然这个R值至今尚未求得，只求得较好的上界 $R\leqslant1928$，表明“国际社团”问题又可从1957降为1928了。

读者在学完Ramsey数后，请再回过来思考“国际社团”问题，这两个貌似毫不相干的问题还是有深层的内在联系的。建立数学模型是应用数学的重要方面，此处显示了如何借用现成的一些“理论”来解决“新”问题的方法。

顺便指出，国际社团问题本身，N的最小值还没找到，还可以对地区数 6 进行改变而进行研究。

下面叙述鸽笼原理的另外一些表述形式。

命题2.1.3 $p+q-1$ 个元分成两组，则必然发生：或有一个组至少含p个元；或有另一组至少含q个元（p，q均为正整数）。

命题2.1.4 $p_1+p_2+\cdots+p_t-t+1$ 个元分成 t 组，则必然发生：或有第 1 组至少含有 p_1 个元；或有第2组至少含有p_2 个元；…；或有第 t 个组至少含有p_t 个元（p_i均为正整数）。

这二命题浅显，请读者自证。

下面一些例子是与一些著名学者名字联系在一起的，他们巧妙的构思使粗看浅显的鸽笼原理显示强大的生命力。

定理2.1.3 （Erdös和Szekeres，1935）n^2+1个正整数的序列$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}\}$，此处对一切$i,j,a_i\neq a_j(i\neq j)$。那么必存在项数为$n+1$的单调上升或单调下降的子序列。

〔证明〕 引进一个辅助性的参数 l_i，它表示从 a_i项开始最长的上升子序列的项数。如有某个 $l_i\geqslant n+1$，则定理得证。如全部 $l_i<n+1,(i=1,\cdots,n^2+1)$ 则 n^2+1 个 l_i分属于 $1,2,\cdots,n$。由鸽笼原理，至少有

$$\left\lceil\frac{n^2+1}{n}\right\rceil=\left\lceil n+\frac{1}{n}\right\rceil=n+1$$

个l_i是相等的。不妨说$a_{i_1},a_{i_2},\cdots a_{i_{n+1}}$有相同的 l值，则必有$a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}}$。若不然，譬如$a_{i_1}<a_{i_2}$，则以$a_{i_2}$开始的上升子序列至少有$l_{i_2}$项，再在前面接上$a_{i_1}$，则$l_{i_1}=l_{i_1}+1$，与$a_{i_1}$、$a_{i_2}$有相同的$l$值矛盾。证毕。

本定理中n^2+1已不能再降，达到临界值了。例如$n=4$，$4^2=16$项整数，可以不含长为 5 的子列。$\{a_1,\cdots,a_{16}\}$可取为$\{4,3,2,1,\ 8,7,6,5,\ 12,11,10,9,\ 16,15,14,13\}$，其它$n$值也可用同样的思路构造。

下面介绍一个著名的定理，它是1927年在哥庭根这个数学家的发祥地，当时初出茅庐的青年数学家〔Van der Waerden(荷)〕为解决当地数学家 I. Schur 的一个猜想而作的贡献，猜想原意为：全体自然数任意二划分，必有一部分含有任意长（即项数）的等差级数。

后由w-氏修改成现在的定理。迄今不少学者认为1928年英国剑桥大学杰出的数学家Ramsey提出的以他名字命名的Ramsey理论，正是遵循这个思路而演变过来的。

定理2.1.4 （Van der Waerden定理，1927）对于任何正整数k和r，存在一个整数$W(k,r)$，使得当数集$\{1,2,\cdots,W(k,r)\}$以任意方式划分成r个类时，至少有一个类含有k项等差级数。

当$k=2$时，显然取$W(2,r)=r+1$，由鸽笼原理，$r+1$个数分成r类，$\left\lceil\frac{r+1}{r}\right\rceil=2$；至少有一类至少含有2个元素（数）。也即2项等差级数。

当$k=3$时，先看$r=2$。下面将引导分析出$W(3,2)=325$。为简明起见，记整数集$\{1,2,\cdots,325\}$为$[1,325]$。先分划$[1,325]$为65个子集，每子集含5个数，$Bi=[5i-4,5i]$，$i=1,2,\cdots,65$；即有

$[1,325]=[1,5]\cup[6,10]\cup\cdots\cup[321,325]=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{65}$ 现研究$r=2$的情况，$[1,325]$任意的2划分相当于每个数用黑白2种色任意涂色，黑色的数（点）为一类，白色的数（点）为另一类。每个B_i有$2^5=32$种互异的涂色方式；反用鸽笼原理，推知取$B_1,B_2,\cdots,B_{33}$时，必保证有某两子集呈现完全相同的涂色方式。

为叙述简明，不妨说B_{11}和B_{26}即是。$B_{11}=\{51,52,53,54,55\}$，每数（点）或黑或白。先看前3项，$\{51,52,53\}$，这3项中必有2项同色，不妨说$j$和$j+d(d=1或2)$。再查$j+2d$这一项，只要$j$尽量小（此处$j=51$），$j+2d$必仍在$B_{11}$内。如$j,j+d,j+2d$三数同色，则结论成立。

如j，$j+d$，$j+2d$三数不是同一种色，例如用●表黑色○表白色。一种典型的状态如图2.1-1所示。研究B_{11}最后一项作为新的第一项，B_{26}中最后一项作为新的第二项，依这个步长，找到新的第三项：$130+(130-55)=205$。查205这个数（点）上的色：如为白，则白55，白130，白205是白色等差级数；如为黑，则黑51，黑128，黑205是黑色等差级数。对一般情况的$k=3,r=2$的证明实质上也是上述的思路。

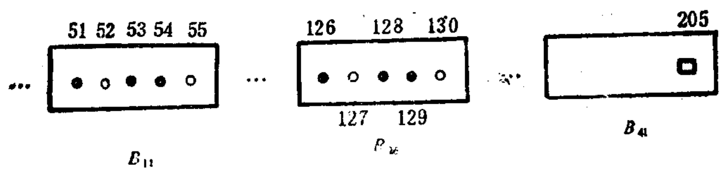


图 2.1-1

最坏的情况无非是相同涂色方式的子集分离得最远，如B_1和B_{33}取代上面的B_{11}和B_{26}。那么B_1最后一项，数5，B_{33}最后一项，数165，及按此步长推算出B_{65}中最末项，数325（或B_1中数1，B_{33}中间项，数163，B_{65}中的项，数325），形成同色等差级数。

现用相仿思路研究$W(3,3)$。自然，这次想到用3种色任意涂色。结论是

$$W(3,3)=7(2\cdot3^7+1)(2\cdot3^{7(2\cdot3^7+1)}+1)=7\cdot(n_1)(2\cdot3^{7\cdot n_1}+1)=7\cdot n_1\cdot n_2$$

此处$n_1=2\cdot3^7+1$，$n_2=2\cdot3^{7\cdot n_1}+1$。下面再说明结论是如何推出的。

首先均匀划分$7\cdot n_1\cdot n_2$个整数为n_2个子集，每个子集含$7\cdot n_1$个数。用3种色对$[1,W(3,3)]$中的数（点）任意涂色，显然每子集有$3^{7\cdot n_1}$种不同的涂色方式。反用鸽笼原理，知前

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com